МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

В.Н. Шинкин

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
для металлургов

Учебник

Допущено учебно-методическим объединением по образованию в области металлургии в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению Металлургия

Москва 2014

УДК 531/534
Ш62

Р е ц е н з е н т ы :
советник генерального директора ОАО «Институт Цветметобработка»,
дважды лауреат Государственной премии СССР, лауреат Государственной премии УССР,
лауреат премии Совета Министров СССР, заслуженный деятель науки РФ,
д-р техн. наук, проф. *В.П. Полухин*
зав. кафедрой технологии и оборудования трубного производства НИТУ «МИСиС»,
лауреат премии Совета Министров СССР, лауреат Правительственной премии РФ,
д-р техн. наук, проф. *Б.А. Романцев*

Шинкин, В.Н.

Ш62 Механика сплошных сред для металлургов : учеб. / В.Н. Шинкин. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2014. – 628 с.
ISBN 978-5-87623-749-1

В учебнике подробно рассмотрены теоретические и практические вопросы механики сплошных сред по следующим темам: основы тензорного исчисления, теории деформаций и напряжений, законы сохранения и элементы термодинамики сплошных сред, модели сплошных сред и их физические соотношения, постановка задач механики сплошных сред, двумерные задачи в полярных координатах, задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, идеальная несжимаемая жесткопластическая среда и дислокации. Приведены многочисленные примеры и домашние задания, закрепляющие изложенный материал.

Все темы изложены с учетом специфики металлургических процессов. Рассмотрены основы математического моделирования процессов производства труб большого диаметра по технологии немецкой фирмы SMS MEER, процессов правки листа на многороликовых листоправильных машинах линии испанской фирмы Fagor Arrasate для производства листа и штрипса из горячекатаного стального рулона и процессов разрушения труб большого диаметра магистральных газонефтепроводов при дефектах (раскатной пригар, риска, несплавление сварного соединения и т.д.)

Для студентов, обучающихся по направлению 150400 – Металлургия.

УДК 531/534

ISBN 978-5-87623-749-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается любимой дочери –
Анне Владимировне Шинкиной

ПРЕДИСЛОВИЕ

В металлургическом производстве широко применяются различные процессы, связанные с обработкой металлов давлением, − прокатка, прессование, волочение, ковка, объемная и листовая штамповка. Для качественного и количественного описания процессов деформации металла в таких процессах необходимо использовать теорию и методы механики сплошных сред. В связи с этим уже на этапе общеинженерной подготовки следует уделять должное внимание формированию у студентов металлургических специальностей навыков в осуществлении расчетов, связанных с деформациями и напряжениями элементов металлургических машин и оборудования.

В учебнике подробно рассмотрены теоретические и практические вопросы механики сплошных сред по следующим темам: основы тензорного исчисления, теории деформаций и напряжений, законы сохранения и элементы термодинамики сплошных сред, модели сплошных сред и их физические соотношения, постановка задач механики сплошных сред (идеальная жидкость и газ, вязкая жидкость, идеальная упругая среда, идеальная несжимаемая жесткопластическая среда, упругопластическая среда), двумерные задачи в полярных координатах, задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, идеальная несжимаемая жесткопластическая среда и дислокации.

Все темы изложены с учетом специфики металлургических процессов. Например, рассмотрены основы математического моделирования процессов производства труб большого диаметра по технологии немецкой фирмы SMS MEER, процессов правки листа на многороликовых листоправильных машинах линии испанской фирмы Fagor Arrasate для производства листа и штрипса из горячекатаного стального рулона и процессов разрушения труб большого диаметра магистральных газонефтепроводов при дефектах – раскатной пригар, риска, несплавление сварного соединения и т.д.

Приведены многочисленные примеры и домашние задания, закрепляющие изложенный материал и способствующие более качественному усвоению специальных дисциплин, связанных с обработкой металлов давлением, деталями машин, конвективным теплообменом в печах, электрометаллургией, непрерывной разливкой стали и совмещенными литейно-прокатными процессами в металлургии.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Статика

Сила есть мера механического взаимодействия твердых тел, в результате которого тела могут приобретать ускорение или деформироваться. Сила является векторной величиной и характеризуется модулем, точкой приложения и направлением (линией действия силы) (рис. 1.1).

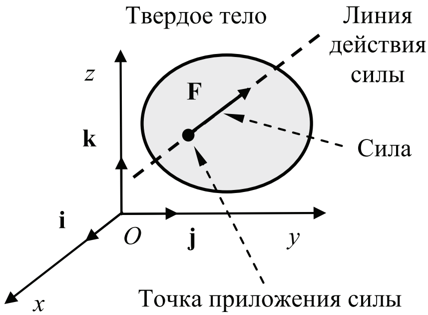

Рис. 1.1

Пусть $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}=(F_x,F_y,F_z)$, $[\mathbf{F}]$=Н (ньютон), $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ – модуль силы; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные орты, $|\,\mathbf{i}\,|=|\,\mathbf{j}\,|=|\,\mathbf{k}\,|=1$.

Главным вектором системы сил $\{\mathbf{F}_1, \ldots ,\mathbf{F}_n\}$ называется их геометрическая сумма

$$\boxed{\mathbf{F}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\,,}\quad \mathbf{F}_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{ix}\,,\quad \mathbf{F}_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{iy}\,,\quad \mathbf{F}_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{iz}\,.$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}=(a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}=$ $=(b_x, b_y, b_z)$.

Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется скалярная величина, равная

$$a\bullet b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}.$$

Векторным произведением двух векторов **a** и **b** называется векторная величина, равная

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \mathbf{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \mathbf{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right),}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Моментом силы относительно точки называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\boxed{\mathbf{M}_O\left(\mathbf{F}\right) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =}$$

$$= \mathbf{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \mathbf{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \mathbf{k}\left(xF_y - yF_x\right) = \left(M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}\right),$$

где $\mathbf{r} = \left(x, y, z\right)$ – радиус-вектор точки приложения силы;

$\mathbf{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$ – вектор силы;

$M_{Ox} = yF_z - zF_y$, $M_{Oy} = zF_x - xF_z$, $M_{Oz} = xF_y - yF_x$ – ***моменты силы относительно осей*** x, y и z (рис. 1.2).

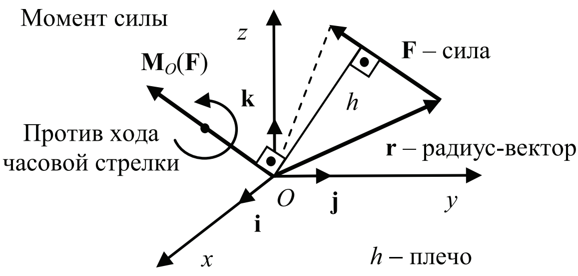

Рис. 1.2

Момент силы $\mathbf{M}_O$ перпендикулярен радиусу-вектору $\mathbf{r}$ и вектору силы $\mathbf{F}$.

Положительным направлением момента силы считается направление, откуда поворот силы виден происходящим против хода часовой стрелки. По абсолютной величине момент силы относительно точки равен произведению «силы на плечо»:

$$\left|\mathbf{M}_O\right| = \left|\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right| = Fh.$$

Главным моментом системы сил относительно выбранной точки называется геометрическая сумма моментов всех сил относительно этой точки:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O\left(\mathbf{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i\ .}$$

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил:

$$\boxed{\mathbf{F}_O = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0.}$$

Эти два векторных равенства эквивалентны шести скалярным равенствам

$$F_{Ox} = 0, \quad F_{Oy} = 0, \quad F_{Oz} = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0.$$

Парой сил называется совокупность двух сил $\left\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\right\}$, равных по модулю и противоположных по направлению. Момент пары сил не зависит от выбора точки.

1.2. Кинематика

В инерциальной (неподвижной) системе координат ***абсолютной скоростью*** точки называется векторная величина, численно равная полной производной радиуса-вектора точки по времени (рис. 1.3):

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{r}\left(t+\Delta t\right) - \mathbf{r}\left(t\right)}{\Delta t}, \quad \left[\mathbf{v}\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

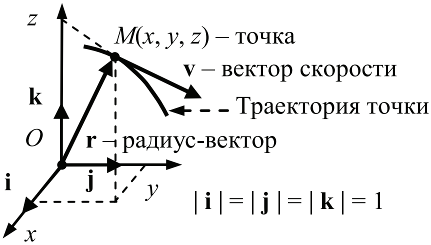

Рис. 1.3

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Абсолютным ускорением точки называется векторная величина, численно равная полной производной абсолютной скорости точки по времени:

$$\boxed{\mathbf{W}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \quad [\mathbf{W}]=\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.}$$

Основные движения твердого тела: поступательное, плоскопараллельное, сферическое и вращательное.

Поступательным движением твердого тела называется движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе во все время движения.

Плоскопараллельным движением твердого тела называется движение, при котором любая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой фиксированной неподвижной плоскости.

Вращательным движением твердого тела (*движением тела вокруг неподвижной оси*) называется движение тела с двумя неподвижными точками (рис. 1.4). Ось, проходящая через две неподвижные точки, называется *осью вращения тела* (ось z).

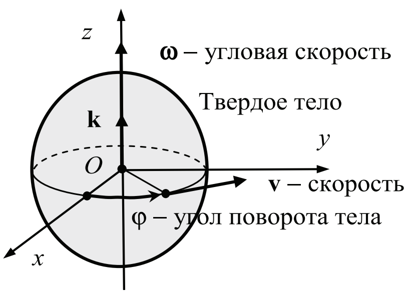

Рис. 1.4

Сферическим движением твердого тела называется движение тела с одной неподвижной точкой. При сферическом движении тело в каждый фиксированный момент времени совершает вращательное движение с ***мгновенной угловой скоростью*** $\boldsymbol{\omega}$ вокруг некоторой оси.

Вектором угловой скорости при вращательном движении твердого тела называется векторная величина, численно равная полной производной угла поворота тела по времени и направленная в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}.}$$

Вектором углового ускорения при вращательном движении твердого тела называется векторная величина, численно равная полной производной вектора угловой скорости по времени:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{k}.}$$

Сложным движением точки M называется движение точки относительно подвижной системы координат. Рассмотрим инерциальную (неподвижную) систему координат $Ox_1y_1z_1$. Пусть подвижная система координат $Ax_2y_2z_2$ движется поступательно относительно неподвижной системы координат. Пусть система координат $Axyz$ совершает сферическое движение относительно подвижной системы координат $Ax_2y_2z_2$ с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Движение точки M относительно неподвижной системы координат называется ***абсолютным движением точки***, а движение точки M относительно подвижной системы координат $Axyz$ называется ***относительным движением точки*** (рис. 1.5).

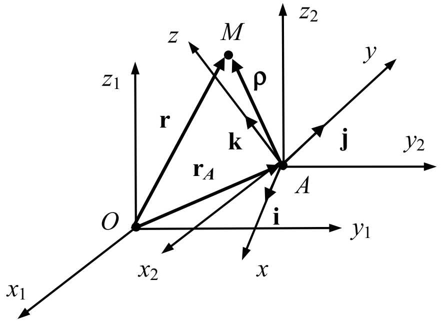

Рис. 1.5

Пусть $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$ – радиусы-векторы точки M относительно неподвижной и подвижной систем координат.

Абсолютная скорость точки M равна

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r},$$

где $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ – ***переносная скорость точки*** M (скорость точки подвижной системы координат $Axyz$, которая в данный момент времени совпадает сточкой M); $\mathbf{v}_r$ – ***относительная скорость точки*** M (скорость точки M относительно подвижной системы координат $Axyz$).

Теорема об абсолютной скорости при сложном движении. *Абсолютная скорость точки при сложном движении равна сумме переносной и относительной скоростей*.

Абсолютное ускорение точки M равно

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) + \mathbf{W}_r + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_C\ ,}$$

где $\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_A + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ – ***переносное ускорение точки*** M (ускорение точки подвижной системы координат $Axyz$, которая в данный момент времени совпадает с точкой M); $\mathbf{W}_r$ – ***относительное ускорение точки*** M (ускорение точки M относительно подвижной системы координат $Axyz$); $\mathbf{W}_C = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ – ***кориолисово ускорение точки*** M $\left[W_C = 2\omega\, v_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r)\right]$.

Вектор $\mathbf{W}_C$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$.

Касательным (тангенциальным) ускорением точки M называется ускорение $\mathbf{W}_e^{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}$, а ***центростремительным (нормальным) ускорением точки*** M называется ускорение $\mathbf{W}_e^{n} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$.

Центростремительное ускорение всегда направлено в сторону линии вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и перпендикулярно к ней.

Теорема Кориолиса. *Абсолютное ускорение точки при сложном движении равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений*.

1.3. Геометрия масс

Плотностью тела в точке (x, y, z) называется скалярная величина, численно равная

$$\gamma(x,y,z)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V},\quad [\gamma]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

где Δm – элемент массы тела; ΔV – элемент объема тела.

Масса неоднородного тела

$$M=\int_V \gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V \gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_V \mathrm{d}m,\quad [M]=\text{кг}.$$

Моментом инерции твердого тела относительно оси называется скалярная величина, численно равная интегралу по объему от произведения плотности тела на квадрат кратчайшего расстояния (плеча) точек тела до оси:

$$\boxed{I_x=\int_V {h_x}^2\mathrm{d}m=\int_V {h_x}^2\gamma\mathrm{d}V=\int_V \left(y^2+z^2\right)\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_x]=\text{кг}\cdot\text{м}^2,}$$

$$\boxed{I_y=\int_V {h_y}^2\mathrm{d}m=\int_V {h_y}^2\gamma\mathrm{d}V=\int_V \left(x^2+z^2\right)\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_x]=\text{кг}\cdot\text{м}^2,}$$

$$\boxed{I_z=\int_V {h_z}^2\mathrm{d}m=\int_V {h_z}^2\gamma\mathrm{d}V=\int_V \left(x^2+y^2\right)\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_x]=\text{кг}\cdot\text{м}^2.}$$

Полярным моментом инерции твердого тела относительно полюса O называется скалярная величина, численно равная

$$I_O=\int_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\int_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma\mathrm{d}V,$$

$$I_x+I_y+I_z=2I_O,\quad [I_O]=\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Центробежными моментами инерции твердого тела называются скалярные величины, численно равные

$$I_{xy}=\int_V xy\,\mathrm{d}m=\int_V xy\,\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_{xy}]=\text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$I_{xz}=\int_V xz\,\mathrm{d}m=\int_V xz\,\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_{xz}]=\text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$I_{yz}=\int_V yz\,\mathrm{d}m=\int_V yz\,\gamma\mathrm{d}V,\quad [I_{yz}]=\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Главной осью инерции твердого тела называется ось, для которой два центробежных момента инерции тела, содержащие индекс этой оси, равны нулю. Например, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то ось z – главная ось инерции тела.

Главной центральной осью инерции твердого тела называется главная ось инерции тела, проходящая через центр масс тела.

Моменты инерции тела относительно двух осей. **Теорема Гюйгенса–Штейнера**. *Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, параллельной данной оси и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между параллельными осями*:

$$\boxed{I = I_C + Md^2.}$$

1.4. Динамика

Первый закон Ньютона (принцип инерции Галилея). *Изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Второй закон Ньютона (основной закон динамики). *Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета прямо пропорционально величине силы, имеет направление силы и обратно пропорционально массе точки*:

$$\boxed{m\mathbf{W} = \mathbf{F},}$$

где m – масса точки; $\mathbf{W}$ – ускорение; $\mathbf{F}$ – сила.

Третий закон Ньютона. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

Закон независимости действия сил. *Если на материальную точку действуют несколько сил, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме ускорений, вызываемых каждой силой в отдельности*:

$$m\mathbf{W} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n, \quad m\mathbf{W}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 1,\ldots,n; \;\; \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \ldots + \mathbf{W}_n.$$

Принцип освобождаемости. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу.*

Под ***материальной системой*** (МС) понимают совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны. ***Массой материальной системы*** из n материальных точек называется сумма масс всех материальных точек, входящих в эту систему: $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Центром масс (центром инерции) материальной системы называется абстрактная геометрическая точка, радиус-вектор которой равен

$$\boxed{\mathbf{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k .}$$

Теорема о движении центра масс материальной системы. *Центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на систему*:

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_C}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_O^e .$$

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, численно равная произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}, \quad [Q] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}},$$

где m – масса точки; $\mathbf{v}$ – скорость.

Количеством движения материальной системы называется векторная величина, численно равная геометрической сумме количеств движения материальных точек, входящих в систему:

$$\boxed{\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k , \quad [Q] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.}$$

Теорема о количестве движения материальной системы. *Количество движения материальной системы равно произведению массы системы на вектор скорости ее центра масс*:

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C .$$

Теорема об изменении количества движения материальной системы. *Полная производная по времени от количества движения материальной системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_O^e = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e.}$$

Моментом количества движения материальной точки относительно центра (полюса) O называется векторная величина, численно равная векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\, m\left(yv_z - zv_y\right) + \mathbf{j}\, m\left(zv_x - xv_z\right) + \mathbf{k}\, m\left(xv_y - yv_x\right).$$

Моментом количеств движения материальной системы относительно центра (полюса) O называется векторная величина, численно равная геометрической сумме векторов количеств движения материальных точек, входящих в эту систему, относительно того же центра O:

$$\boxed{\mathbf{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k.}$$

Момент количества движения твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω_z, численно равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость вращения тела:

$$K_z = I_z \omega_z.$$

Момент количества движения при сферическом движении твердого тела (движение тела с одной неподвижной точкой). Пусть O и C – соответственно неподвижная точка тела и его центр масс. Тогда скорость центра масс тела равна

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C\ ,$$

где $\mathbf{r}_C$ и $\boldsymbol{\omega}$ – соответственно радиус-вектор центра масс тела относительно неподвижной точки O и мгновенная угловая скорость тела относительно мгновенной оси вращения тела, проходящей через точку O.

Момент количества движения твердого тела равен

$$\mathbf{K}_O = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\boldsymbol{x}} \\ \omega_{\boldsymbol{y}} \\ \omega_{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}.$$

Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы. *Полная производная по времени от момента количеств движения материальной системы, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}_O^e.}$$

Кинетической энергия материальной точки называется скалярная величина, численно равная половине произведения массы точки m на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2,$$

где m – масса точки; v – скорость точки.

Кинетической энергией материальной системы называется скалярная величина, численно равная сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в систему:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k {v_k}^2.}$$

Теорема Кёнига. *Кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении равна сумме половины произведения массы материальной системы на квадрат скорости ее центра масс и кинетической энергии системы относительно ее центра масс*:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M {v_C}^2 + T_{Cr}.}$$

Кинетическая энергия твердого тела есть скалярная величина, численно равная

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \int_V v^2 \mathrm{d}m, \quad [T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.}$$

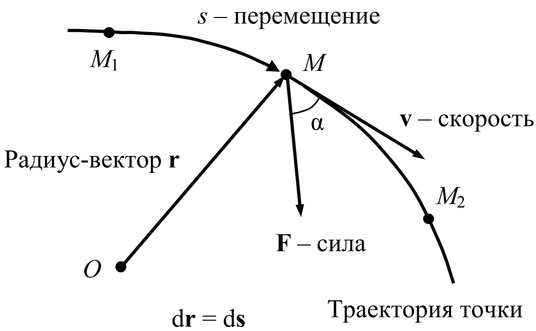

Рис. 1.6

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося произвольным образом, складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии тела в его движении относительно центра масс:

$$T = \frac{1}{2} M {v_C}^2 + \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2,$$

где v_C – скорость центра масс тела; $I_{C\omega}$ – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; ω – мгновенная угловая скорость тела.

Элементарной работой силы называется скалярная величина, численно равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения (рис. 1.6):

$$\boxed{\mathrm{d}A = (\mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r}) = (\mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{s}) = F\, \mathrm{d}s \cos(\mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s}), \quad [\mathrm{d}A] = \text{Н} \cdot \text{м}.}$$

Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы. *Изменение кинетической энергии материальной системы при ее переходе из начального положения в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении внешних и внутренних сил, приложенных к материальным точкам системы*:

$$\boxed{T - T_0 = A^e + A^i.}$$

Пусть материальная система состоит из n материальных точек с радиусами-векторами $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Обозначим главный вектор сил, приложенных к k-й материальной точке системы, через $\mathbf{F}_k = \left(F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}\right)$. ***Силовым полем*** силы $\mathbf{F}$ называется область пространства, в котором сила может быть задана как функция радиуса-вектора $\mathbf{r} = \left(x, y, z\right)$ любой точки пространства и времени: $\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{F}\left(x, y, z, t\right)$. Силовое поле называется ***стационарным***, если сила не зависит явно от времени: $\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right) = \mathbf{F}\left(x, y, z\right)$. ***Потенциальным силовым полем*** называется силовое поле, работа сил в котором не зависит от формы траектории движения точек материальной системы, а определяется только их начальным и конечным положением.

Теорема о потенциальности силового поля. *Необходимым и достаточным условием потенциальности стационарного силового поля является существование не зависящей от времени непрерывно-дифференцируемой функции* $\Pi\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n\right)$:

$$\boxed{F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k},\ F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k},\ F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Z_k},\ k = 1, \ldots, n.}$$

В этом случае силы $\mathbf{F}_k = \left(F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}\right)$ называются ***консервативными (потенциальными) силами***, функция $\Pi\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n\right)$ – ***потенциальной энергией***, а функция $U = -\Pi$ – ***силовой функцией***.

Закон сохранения полной механической энергии. *Сумма кинетической и потенциальной энергий (полная механическая энергия) материальной системы, движущейся под действием только консервативных (потенциальных) сил, сохраняет свое значение*:

$$\boxed{T + \Pi = \mathrm{const},}$$

где T и Π – кинетическая и потенциальная энергии материальной системы.

Основные формулы теоретической механики

Статика

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r} = \left(x, y, z\right), \quad \mathbf{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i\,, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i} \ \boxed{\mathbf{F}_O = 0, \mathbf{M}_O = 0}$$

Кинематика

$$\boxed{\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},\quad \mathbf{W}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}}\ \boxed{\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{k},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v}=\mathbf{v}_e+\mathbf{v}_r=\mathbf{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}+\mathbf{v}_r}$$

$$\boxed{\mathbf{W}=\mathbf{W}_e+\mathbf{W}_r+\mathbf{W}_C=\mathbf{W}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})+\mathbf{W}_r+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r}$$

Динамика

$$\boxed{m\mathbf{W}=\mathbf{F}}\ \boxed{\mathbf{r}_C=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n}m_k\mathbf{r}_k,\quad M=\sum_{k=1}^{n}m_k}\ \boxed{M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_C}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}_O^e}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}=\sum_{k=1}^{n}m_k\mathbf{v}_k}\ \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}_O^e}\ \boxed{\mathbf{K}_O=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times m_k\mathbf{v}_k}\ \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}_O}{\mathrm{d}t}=\mathbf{M}_O^e}$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k{v_k}^2}\ \boxed{T=\frac{1}{2}M{v_C}^2+T_{Cr}}\ \boxed{T=\frac{1}{2}\int_V v^2\mathrm{d}m}$$

$$\boxed{\mathrm{d}A=(\mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{r})}\ \boxed{T-T_0=A^e+A^i}\ \boxed{T+\Pi=\mathrm{const}}$$

$$\boxed{I_z=\int_V h_z^2\mathrm{d}m=\int_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m}\ \boxed{I=I_C+Md^2}$$

Вопросы для самоконтроля по теоретической механике

1. Чем характеризуется сила?
2. Момент силы относительно точки и оси.
3. Главный вектор и главный момент системы сил.
4. Теорема Пуансо. Необходимые и достаточные условия эквивалентности системы сил. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела.
5. Абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки.
6. Угловая скорость и угловое ускорение тела при его движении вокруг неподвижной оси.

7. Основные виды движения твердого тела (поступательное, плоскопараллельное, сферическое и вращательное движение).

8. Абсолютная скорость и ускорение точки при сложном движении. Теорема Кориолиса.

9. Первый, второй и третий законы Ньютона.

10. Количество движения материальной системы (МС). Теорема об изменении количества движения МС.

11. Момент количеств движения МС. Теорема об изменении момента количеств движения МС.

12. Элементарная работа силы.

13. Кинетическая энергия МС. Теорема Кенига. Теорема об изменении кинетической энергии МС.

14. Потенциальное силовое поле. Необходимые и достаточные условия потенциальности силового поля.

15. Закон сохранения полной механической энергии МС.

16. Центр масс МС. Теорема о движении центра масс МС.

17. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Гюйгенса–Штейнера.

2. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Основной и взаимный базисы системы координат

Математические объекты, инвариантные (независимые) относительно преобразования координат, называются ***тензорами.*** Примерами тензоров являются скалярные величины – плотность, температура, давление, объем, площадь поверхности, расстояние между точками.

Рассмотрим декартову прямоугольную, цилиндрическую и сферическую системы координат [рис. 2.1 – декартова прямоугольная система координат (ДПСК): $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$; рис. 2.2 – цилиндрическая система координат (ЦСК): $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$; рис. 2.3 – сферическая система координат (ССК): $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$].

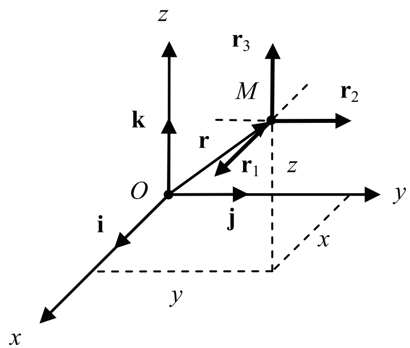

Рис. 2.1

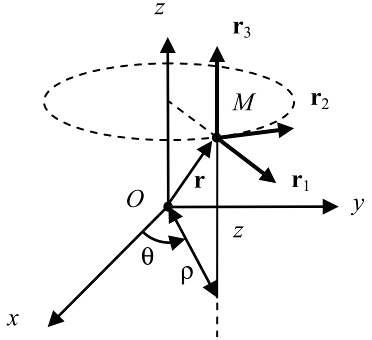

Рис. 2.2

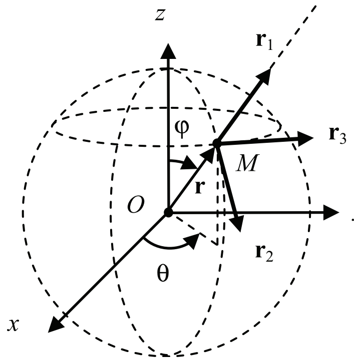

Рис. 2.3

Координатной линией называется геометрическое место точек в пространстве, характеризуемое изменением только одной из координат, тогда как две другие координаты остаются неизменными.

Прямолинейными системами координат называются системы координат, координатные линии которых являются прямыми линиями (ДПСК). ***Криволинейными системами координат*** называются системы координат, координатные линии которых являются кривыми линиями (ЦСК, ССК).

Пусть радиус-вектор точки M равен

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Основной базис системы координат в данной точке пространства есть совокупность трех векторов, определенных как частные производные по соответствующим координатам от радиус-вектора данной точки:

$$\boxed{\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}.}$$

Для ДПСК:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z;$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}, \ \ |\,\mathbf{r}_1\,| = |\,\mathbf{r}_2\,| = |\,\mathbf{r}_3\,| = 1.$$

Для ЦСК:

$$x^1=\rho,\quad x^2=\theta,\quad x^3=z;\ \ x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z;$$

$$\mathbf{r}=\rho\cos\theta\,\mathbf{i}+\rho\sin\theta\,\mathbf{j}+z\mathbf{k};$$

$$\mathbf{r}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}=\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j},\,\mathbf{r}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta\,\mathbf{i}+\rho\cos\theta\,\mathbf{j},\,\mathbf{r}_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}=\mathbf{k};$$

$$|\,\mathbf{r}_1|=1,|\,\mathbf{r}_2|=\rho,|\,\mathbf{r}_3|=1.$$

Для ССК:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi;$$

$$\mathbf{r}=r\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i}+r\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j}+r\cos\varphi\mathbf{k};\quad x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=\theta;$$

$$\mathbf{r}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}=\sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{i}+\sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{j}+\cos\varphi\ \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}=r\cos\varphi\cos\theta\ \mathbf{i}+r\cos\varphi\sin\theta\ \mathbf{j}-r\sin\varphi\ \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=-r\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{i}+r\sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{j};$$

$$|\,\mathbf{r}_1|=1,|\,\mathbf{r}_2|=r,|\,\mathbf{r}_3|=r\left|\sin\varphi\right|.$$

Векторы основного базиса направлены по касательным к соответствующим координатным линиям, проведенным в данной точке пространства, в направлении возрастания координат.

Правило суммирования Эйнштейна по двойному индексу: *если в каком-либо выражении один и тот же индекс встречается и сверху, и снизу, то предполагается, что по этому индексу производится суммирование в пределах от 1 до 3; при этом знак суммирования опускается.*

Например, дифференциал радиуса-вектора точки равен

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3=\mathbf{r}_1\mathrm{d}x^1+\mathbf{r}_2\mathrm{d}x^2+\mathbf{r}_3\mathrm{d}x^3=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{r}_i\mathrm{d}x^i=\mathbf{r}_i\mathrm{d}x^i,$$

а квадрат расстояния между двумя сколь угодно близкими точками

$$(\mathrm{d}l)^2=\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\mathbf{r}\bullet\mathrm{d}\mathbf{r}=(\mathbf{r}_i\mathrm{d}x^i)\bullet(\mathbf{r}_j\mathrm{d}x^j)=(\mathbf{r}_i\bullet\mathbf{r}_j)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

Метрическими коэффициентами основного базиса системы координат называются скалярные произведения векторов основного базиса:

$$\boxed{g_{ij} = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_j}.$$

Откуда получаем

$$g_{ji} = \mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_j = g_{ij}, \ \boxed{g_{ji} = g_{ij}}.$$

Метрические коэффициенты образуют симметричную матрицу

$$((g_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}\right).$$

Равенство

$$\boxed{\mathrm{d}l^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$$

называется ***метрикой пространства.*** Метрика пространства есть квадратичная относительно дифференциалов координат форма, выражающая квадрат расстояния между двумя сколь угодно близкими точками.

Для ДПСК:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1; \quad g_{ij} = 0, i \neq j;$$

$$((g_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z; \quad \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}z;$$

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Для ЦСК:

$$\mathbf{r}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}, \mathbf{r}_2 = -\rho\sin\theta\,\mathbf{i} + \rho\cos\theta\,\mathbf{j}, \mathbf{r}_3 = \mathbf{k};$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1; \quad g_{ij} = 0, i \neq j;$$

$$((g_{ij}))=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right);$$

$$x^1=\rho,\quad x^2=\theta,\quad x^3=z;\quad \mathrm{d}x^1=\mathrm{d}\rho,\quad \mathrm{d}x^2=\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}x^3=\mathrm{d}z;$$

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2.$$

Для ССК:

$$\mathbf{r}_1=\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j}+\cos\varphi\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2=r\cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{i}+r\cos\varphi\sin\theta\,\mathbf{j}+r\sin\varphi\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_3=-r\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{i}+r\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{j};$$

$$g_{11}=1,\,g_{22}=r^2,\,g_{33}=r^2\sin^2\varphi;\quad g_{ij}=0,\,i\neq j;$$

$$((g_{ij}))=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\varphi\end{pmatrix}\right);$$

$$x^1=r,\quad x^2=\varphi,\quad x^3=\theta;\quad \mathrm{d}x^1=\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}x^2=\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}x^3=\mathrm{d}\theta;$$

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2+r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Ортогональными системами координат (ОСК) называются системы координат, координатные линии которых в любой точке пространства взаимно перпендикулярны. Следовательно, взаимно перпендикулярны и векторы основного базиса (ДПСК, ЦСК, ССК).

Взаимный базис системы координат в данной точке пространства есть совокупность трех векторов $\mathbf{r}^1$, $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{r}^3$, которые взаимосвязаны с векторами основного базиса соотношениями

$$\boxed{\mathbf{r}_i\bullet\mathbf{r}^j=\delta_i^j=\begin{Bmatrix}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{Bmatrix}},$$

где δ_i^j – ***символ Кронекера***.

Для ортогональной системы координат одноименные векторы основного и взаимного базисов параллельны и направлены в одну сторону, но могут иметь разные длины (рис. 2.4).

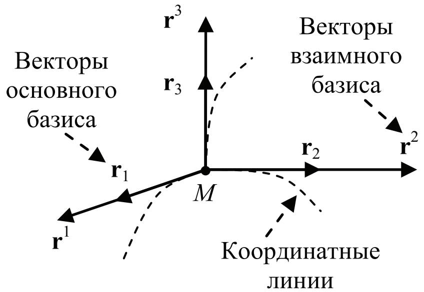

Рис. 2.4

Метрическими коэффициентами взаимного базиса системы координат называются скалярные произведения векторов взаимного базиса:

$$\boxed{g^{ij} = \mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^j}.$$

Откуда получаем

$$g^{ij} = \mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^j = \mathbf{r}^j \bullet \mathbf{r}^i = g^{ji}, \ \boxed{g^{ij} = g^{ji}}.$$

Следовательно, метрическая матрица взаимного базиса является симметричной:

$$((g^{ij})) = \left(\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix}\right).$$

Для ОСК:

$$((g^{ij})) = \left(\begin{pmatrix} g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{r}_i \parallel \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}^i = 1, \quad r_i \cdot r^i = 1, \quad r^i = \frac{1}{r_i};$$

$$g_{ii} = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_i = (r_i)^2, \quad g^{ii} = \mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^i = (r^i)^2 = \left(\frac{1}{r_i}\right)^2 = \frac{1}{(r_i)^2} = \frac{1}{g_{ii}}, \ \boxed{g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}}.$$

Для ДПСК:

$$g^{ii} = 1; \quad g^{ij} = 0, \ i \neq j; \ ((g_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Для ЦСК:

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{\rho^2}, g^{33} = 1; \quad g^{ij} = 0, i \neq j; \ ((g^{ij})) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Для ССК:

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}; \quad g^{ij} = 0, \quad i \neq j;$$

$$((g^{ij})) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \end{pmatrix}\right).$$

Метрическими коэффициентами смешанного типа называются скалярные произведения двух базисных векторов, один из которых принадлежит к основному базису, а второй – к взаимному базису:

$$\boxed{g_i^j = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}^j = \delta_i^j = \begin{Bmatrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{Bmatrix},} \ \boxed{g_i^j = g_j^i,} \ ((g_i{}^j)) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

2.2. Неопределенное умножение векторов. Тензоры второго и третьего рангов

Любая операция в математике над математическим объектом полностью определяется ее свойствами. Пусть **a** и **b** – векторы, α и β – скалярные величины.

Основные свойства неопределенного умножения векторов:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba};\\ \mathbf{c}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \mathbf{c}\alpha\mathbf{a}+\mathbf{c}\beta\mathbf{b} = \alpha\mathbf{ca}+\beta\mathbf{cb};\\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}) = \mathbf{ab}\bullet\mathbf{c}, \quad (\mathbf{c}\bullet\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}\bullet\mathbf{ab};\\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{ab}\times\mathbf{c}, \quad (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{ab}.\end{gathered}}$$

Неопределенное умножение векторов есть некоторая операция над ними, приводящая к образованию не скаляров и не векторов, а некоторых новых объектов – тензоров второго порядка.

Диадные произведения базисных векторов $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$, $\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j$, представляют собой результат неопределенного умножения векторов или основного базиса $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$, или взаимного базиса $\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$, или обоих базисов $\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j$.

Тензор есть математический объект, инвариантный относительно преобразования координат, представляющий собой сумму произведений некоторых чисел – ***компонент тензора*** – на базисные объекты; инвариантность тензора обеспечивается взаимообратным характером преобразования компонент и базисных объектов при переходе от одной системы координат к другой.

Тензор второго ранга есть математический объект, инвариантный относительно преобразования координат и представляющий собой сумму произведений девяти чисел (компонент тензора) на соответствующие диадные произведения (базисные объекты):

$$\boxed{(a) = a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j.}$$

Каждому тензору второго ранга соответствуют матрицы порядка 3×3:

$$((a_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right),\ ((a^{ij})) = \left(\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13}\\ a^{21} & a^{22} & a^{23}\\ a^{31} & a^{32} & a^{33}\end{pmatrix}\right),\ ((a_i^j)) = \left(\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3\end{pmatrix}\right).$$

Ранг тензора – число, определяющее количество компонент тензора. Число компонент тензора N связано с рангом r тензора соотношением

$$\boxed{N = 3^r.}$$

Тензор нулевого ранга (r = 0) есть скалярная величина, характеризуемая только одним числовым значением (N = 1).

Тензор первого ранга (r = 1) есть вектор $\mathbf{a} = a_i\mathbf{r}^i = a^j\mathbf{r}_j$, характеризуемый тремя числами – компонентами a_1, a_2, a_3 (или a^1, a^2, a^3) (N = 3).

Тензор второго ранга (r = 2) имеет девять компонент (N = 9):

$$(a) = a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = a^i_j\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j = a^j_i\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j.$$

Каждому тензору второго ранга можно поставить в соответствие матрицы порядка 3×3.

Тензор третьего ранга (r = 3) имеет двадцать семь компонент (N = 27):

$$(a) = a_{ijk}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j\mathbf{r}^k = a^{ijk}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k = a^k_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j\mathbf{r}_k = a^{ij}_k\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}^k = \ldots$$

Фундаментальным метрическим тензором называется тензор второго ранга, компонентами которого являются метрические коэффициенты:

$$\boxed{(g) = g_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = g^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = g^j_i\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j,}$$

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^j, \quad g^j_i = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}^j = \delta^j_i, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad g^j_i = g^i_j.$$

Тензор называется ***симметричным***, если

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad a^j_i = a^i_j.$$

Количество независимых компонент симметричного тензора равно шести:

$$((a_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\right).$$

Примером симметричного тензора второго ранга является фундаментальный метрический тензор.

Тензор называется ***антисимметричным,*** если

$$a_{ij} = -a_{ji}, \; a^{ij} = -a^{ji}, \; a^i_j = -a^j_i \; .$$

Количество независимых компонент антисимметричного тензора равно трем:

$$((a_{ij})) = \left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \right), \; a_{ii} = -a_{ii}, \quad 2a_{ii} = 0, \quad a_{ii} = 0.$$

Иногда антисимметричный тензор второго ранга называют ***псевдовектором***.

2.3. Умножение тензора на скаляр, сложение и вычитание тензоров

Тензорная алгебра является разделом тензорного исчисления, в котором определяются правила проведении алгебраических операций с тензорами: сложение и вычитание тензоров, умножение тензора на скаляр, операции жонглирования индексами, свертывание тензора, скалярное и векторное умножение тензоров.

Умножение тензора на скаляр

Рассмотрим скалярную величину α и тензоры (a) и (b):

$$(a) = a_i \mathbf{r}^i = a^j \mathbf{r}_j, \; (b) = b_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = b^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = b^j_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j,$$

$$\boxed{(c) = \alpha(a) = (a)\alpha}, \; \boxed{c_i = \alpha a_i, \quad c^j = \alpha a^j,}$$

$$\boxed{(d) = \alpha(b) = (b)\alpha}, \; \boxed{d_{ij} = \alpha b_{ij}, \quad c^{ij} = \alpha b^{ij}, \quad c^j_i = \alpha b^j_i.}$$

Сложение и вычитание тензоров

Ранги и структура суммируемых (вычитаемых) тензоров должны быть одинаковыми. Тогда

$$(a) = a_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = a^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = a^j_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j, \; (b) = b_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = b^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = b^j_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j,$$

$$\boxed{(c) = (a) + (b)} = c_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = c^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = c^j_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \; ,$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad c^{ij} = a^{ij} + b^{ij}, \quad c_i^j = a_i^j + b_i^j,}$$

$$\boxed{(a)+(b)=(b)+(a),} \ \boxed{(c)=(a)-(b),}$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad c^{ij} = a^{ij} - b^{ij}, \quad c_i^j = a_i^j - b_i^j.}$$

2.4. Операции «жонглирования» индексами

Операции «опускания» и «поднятия» индекса

Рассмотрим тензор первого ранга $\mathbf{a} = a_i\mathbf{r}^i = a^j\mathbf{r}_j$. Тогда

$\boxed{a_k = a^j g_{jk}}$ – «поднятие» индекса;

$\boxed{a^k = a_i g^{ik}}$ – «опускание» индекса.

Для ДПСК:

$$g_{ik} = 0, i \neq k; \quad g_{jj} = 1; \quad a_k = a^k; \quad \mathbf{a} = a_i\mathbf{r}^i = a^j\mathbf{r}_j \ ;$$

$$a_i\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}_k = a^j\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}_k \ , \quad a_i\delta_k^i = a^j g_{jk} \ , \quad a_k = a^j g_{jk} \ ;$$

$$a_i\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^k = a^j\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}^k, \quad a_i g^{ik} = a^j \delta_j^k = a^k, \quad a_k g^{ik} = a^k.$$

Рассмотрим тензор второго ранга

$$(a) = a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j.$$

Тогда

$$\boxed{a_{kl} = a_k^j g_{jl} = a^{ij} g_{ik} g_{jl}, \quad a^{kl} = a_j^k g^{jl} = a_{ij} g^{ik} g^{jl}, \quad a_k^j = a^{ij} g_{ik} = a_{ki} g^{ij}.}$$

Рассмотрим скалярное произведение $\mathbf{r}_k \bullet (a)$:

$$\mathbf{r}_k \bullet a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = \mathbf{r}_k \bullet a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_k \bullet a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j,$$

$$a_{ij}(\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}^i)\mathbf{r}^j = a^{ij}(\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_j = a_i^j(\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}^i)\mathbf{r}_j,$$

$$a_{ij}\delta_k^i\mathbf{r}^j = a^{ij} g_{ki}\mathbf{r}_j = a_i^j\delta_k^i\mathbf{r}_j, \quad a_{kj}\mathbf{r}^j = a^{ij} g_{ki}\mathbf{r}_j = a_k^j\mathbf{r}_j,$$

$$a_k^j = a^{ij} g_{ki} = a^{ij} g_{ik} \ .$$

Рассмотрим двойное скалярное произведение $\mathbf{r}_l \bullet \mathbf{r}_k \bullet (a)$:

$$\mathbf{r}_k \bullet a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = \mathbf{r}_k \bullet a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_k \bullet a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j,$$

$$a_{ij}\delta_k^i\mathbf{r}^j = a^{ij}g_{ki}\mathbf{r}_j = a_i^j\delta_k^i\mathbf{r}_j, \quad a_{kj}\mathbf{r}^j = a^{ij}g_{ki}\mathbf{r}_j = a_k^j\mathbf{r}_j,$$

$$\mathbf{r}_l \bullet a_{kj}\mathbf{r}^j = \mathbf{r}_l \bullet a^{ij}g_{ki}\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_l \bullet a_k^j\mathbf{r}_j,$$

$$a_{kj}\mathbf{r}_l \bullet \mathbf{r}^j = a^{ij}g_{ki}\mathbf{r}_l \bullet \mathbf{r}_j = a_k^j\mathbf{r}_l \bullet \mathbf{r}_j,$$

$$a_{kj}\delta_l^j = a^{ij}g_{ki}g_{lj} = a_k^j g_{lj}, \; a_{kl} = a_k^j g_{jl} = a^{ij}g_{ik}g_{jl}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $(a)\bullet\, \mathbf{r}^k$:

$$a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j \bullet \mathbf{r}^k = a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}^k = a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}^k,$$

$$a_{ij}\mathbf{r}^i g^{jk} = a^{ij}\mathbf{r}_i\delta_j^k = a_i^j\mathbf{r}^i\delta_j^k,$$

$$a_{ij}g^{jk}\mathbf{r}^i = a^{ik}\mathbf{r}_i = a_i^k\mathbf{r}^i,$$

$$a_i^k = a_{ij}g^{jk}, \; a_k^j = a_{ki}g^{ij}.$$

Рассмотрим двойное скалярное произведение $(a)\bullet\, \mathbf{r}^k \bullet\, \mathbf{r}^l$:

$$a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j \bullet \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l = a^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l = a_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j \bullet \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l,$$

$$a_{ij}g^{jk}\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^l = a^{ij}\delta_j^k\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}^l = a_i^j\delta_j^k\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^l,$$

$$a_{ij}g^{jk}\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^l = a^{ik}\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}^l = a_i^k\mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^l,$$

$$a_{ij}g^{jk}g^{il} = a^{ik}\delta_i^l = a_i^k g^{il}, \; a_{ij}g^{jk}g^{il} = a^{lk} = a_i^k g^{il},$$

$$a^{lk} = a_i^k g^{il} = a_{ij}g^{jk}g^{il} = a_{ij}g^{il}g^{jk}, \; a^{kl} = a_i^l g^{ik} = a_{ij}g^{ik}g^{jl}.$$

Операция замены одного индекса другим

Отметим, что $g_j^i = \delta_j^i$. Очевидно, что

$$a_i = a_j g_i^j, \quad a^j = a^i g_i^j,$$

$$a_{kj}\delta_i^k = a_{ij} = a_{il}g_j^l = a_{kl}g_j^l g_i^k, \quad a^{ij} = a^{il}g_l^j = a^{kl}g_l^j g_k^i = a^{kj}g_k^i,$$

$$a^i_j = a^k_j g^i_k = a^i_l g^l_j = a^k_l g^l_j g^i_k,$$

$$a_i = a_j \delta^j_i = a_j g^j_i, \quad a_{ij} = a_{il} \delta^l_j = a_{il} g^l_j = a_{kl} g^l_j \delta^k_i = a_{kl} g^l_j g^k_i \ .$$

2.5. Скалярное и векторное умножение тензоров, тензор Риччи

Скалярное умножение тензоров

Результатом скалярного умножения двух тензоров первого ранга $(a) = a_i\mathbf{r}^i$ и $(b) = b_j\mathbf{r}^j$ является скалярная величина, равная

$$(a)\bullet(b) = (a_i\mathbf{r}^i)\bullet(b_j\mathbf{r}^j) = a_i b_j \mathbf{r}^i \bullet \mathbf{r}^j = a_i(b_j g^{ij}) = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3.$$

Для ДПСК ($b_i = b^i$):

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

При скалярном умножении тензора второго ранга $(a) = a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$ на тензор первого ранга $(b) = b^k\mathbf{r}_k$ получается тензор первого ранга:

$$(c) = (a)\bullet(b) = (a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j)\bullet(b^k\mathbf{r}_k) = a_{ij}b^k\mathbf{r}^i(\mathbf{r}^j \bullet \mathbf{r}_k) = a_{ij}b^k\mathbf{r}^i\delta^j_k = a_{ik}b^k\mathbf{r}^i = c_i\mathbf{r}^i.$$

При скалярном умножении тензоров на вектор результирующий тензор имеет ранг на единицу меньше ранга перемножаемых тензоров.

Векторное умножение тензоров

Дискриминантный тензор (тензор Риччи) есть тензор третьего ранга

$$(\Lambda) = \Lambda_{ijk}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j\mathbf{r}^k = \Lambda^{ijk}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k = \Lambda^{ij}_k\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j\mathbf{r}_k = \Lambda^{ij}_k\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}^k,$$

компоненты которого являются компонентами в разложении векторных произведений базисных векторов по векторам основного и взаимного базисов:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = \Lambda_{ijk}\mathbf{r}^k = \Lambda^k_{ij}\mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \Lambda^{ijk}\mathbf{r}_k = \Lambda^{ij}_k\mathbf{r}^k,$$

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j = \Lambda^{jk}_i\mathbf{r}_k = \Lambda^j_{ik}\mathbf{r}^k, \quad \mathbf{r}^j \times \mathbf{r}_i = (-\Lambda^{jk}_i)\mathbf{r}_k = (-\Lambda^j_{ik})\mathbf{r}^k.$$

Компоненты различных видов связаны между собой в соответствии с правилами «жонглирования» индексами:

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{ijl} = \Lambda_{ij}^{k} g_{kl}, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_{ij}^{l} = \Lambda_{ijk} g^{kl},$$

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_i^{jl} = \Lambda_{ik}^{j} g^{kl} = \Lambda_{iks} g^{sj} g^{kl},$$

$$(\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda^{ijl} = \Lambda_k^{ij} g^{kl} = \Lambda_{kst} g^{ti} g^{sj} g^{kl},$$

$$(\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_l^{ij} = \Lambda^{ijk} g_{kl}, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{il}^{j} = \Lambda_i^{jk} g_{kl},$$

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{ijk} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{ij}^{k} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_l, \quad (\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda^{ijk} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_k^{ij} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}_l,$$

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{ijl} = \Lambda_{ij}^{k} g_{kl}, \quad (\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda^{ijk} g_{kl} = \Lambda_l^{ij},$$

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_{ijk} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_{ij}^{k} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}^l, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_i^{jk} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_{ik}^{j} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l,$$

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_{ijk} g^{kl} = \Lambda_{ij}^{l}, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_i^{jl} = \Lambda_{ik}^{j} g^{kl},$$

$$(\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda^{ijk} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda_k^{ij} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}^l, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_i^{jk} \mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_{ik}^{j} \mathbf{r}^k \bullet \mathbf{r}_l,$$

$$(\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}^l = \Lambda^{ijl} = \Lambda_k^{ij} g^{kl}, \quad (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}^j) \bullet \mathbf{r}_l = \Lambda_i^{jk} g_{kl} = \Lambda_{il}^{j}.$$

Если мы знаем компоненты Λ_{ijl}, то по вышеприведенным формулам можем найти все другие компоненты тензора Риччи $\Lambda_{ij}^{\ l}$, $\Lambda_i^{\ jl}$ и Λ^{ijl}. Компоненты Λ_{ijl} можно найти из равенства $\Lambda_{ijl} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \bullet \mathbf{r}_l$. Откуда следует, что $\Lambda_{ijl} = 0$ при $i = j$, или $i = l$, или $j = l$.

При $i \neq j$, $i \neq l$, $j \neq l$ компоненты

$$\Lambda_{ijl} = \pm |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cdot |\mathbf{r}_3| = \pm\sqrt{(\mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 \bullet \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_3 \bullet \mathbf{r}_3)} = \pm\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \pm\sqrt{g},$$

где

$$\big(\big(g_{ij}\big)\big) = \left(\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}\right); \quad g = \det\left|\big(\big(g_{ij}\big)\big)\right| = g_{11} g_{22} g_{33}.$$

Поэтому

$$\boxed{\Lambda_{ijl} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \text{или } i = l, \text{или } j = l; \\ \pm\sqrt{g} & \text{при } i \neq j, i \neq l, j \neq l, \end{cases}}$$

где

$$\Lambda_{ijl} = +\sqrt{g}\text{, если }\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l\right) - \text{правая тройка векторов;}$$

$$\Lambda_{ijl} = -\sqrt{g}\text{, если }\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l\right) - \text{левая тройка векторов.}$$

Для определения правой тройки векторов пользуются рис. 2.5 (правые тройки векторов ($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$), ($\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1$) и ($\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$) – поворот по часовой стрелке) и рис. 2.6 (правая тройка векторов ($\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_k$) – ***правило правой руки***).

Результат векторного умножения двух тензоров первого ранга есть также тензор первого ранга:

$$(a)\times(b) = (a^i\mathbf{r}_i)\times(b^j\mathbf{r}_j) = a^i b^j(\mathbf{r}_i\times\mathbf{r}_j) = a^i b^j \Lambda_{ijk}\mathbf{r}^k = c_k\mathbf{r}^k\ .$$

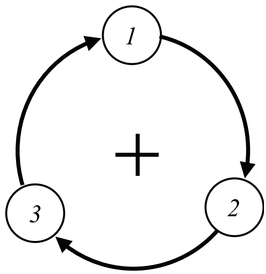

Рис. 2.5

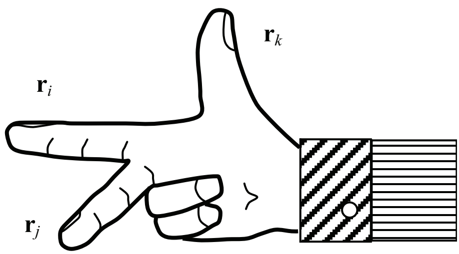

Рис. 2.6

При векторном умножении тензора второго ранга $(a) = a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$ на тензор первого ранга $(b) = b^k\mathbf{r}_k$ получится тензор второго ранга:

$$(a)\times(b) = (a_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j)\times(b^k\mathbf{r}_k) = a_{ij}b^k\mathbf{r}^i(\mathbf{r}^j\times\mathbf{r}_k) =$$
$$= a_{ij}b^k\mathbf{r}^i(-\Lambda^j_{kl}\mathbf{r}^l) = -a_{ij}b^k\Lambda^j_{kl}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^l = c_{il}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^l.$$

При векторном умножении тензоров на вектор ранг результирующего тензора равен рангу перемножаемых тензоров.

Для ДПСК:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = 1,$$

$$\Lambda_{ijl} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \text{ или } i = l, \text{ или } j = l; \\ \pm 1 & \text{при } i \neq j, i \neq l, j \neq l. \end{cases}$$

Для ЦСК:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2, \quad g_{33} = 1, \quad g = \rho,$$

$$\Lambda_{ijl} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \text{ или } i = l, \text{ или } j = l; \\ \pm\rho & \text{при } i \neq j, i \neq l, j \neq l. \end{cases}$$

Для ССК:

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2\sin^2\varphi, \quad g = r^2\sin\varphi,$$

$$\Lambda_{ijl} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \text{ или } i = l, \text{ или } j = l; \\ \pm r^2\sin\varphi & \text{при } i \neq j, i \neq l, j \neq l. \end{cases}$$

2.6. Дифференцирование тензоров по координатам, символы Кристоффеля

Тензорный анализ является разделом тензорного исчисления, в котором рассматриваются операции дифференцирования и интегрирования тензоров.

Рассмотрим тензор первого ранга (вектор) $(a) = a^i\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$. Обозначим

$$\boxed{\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial x^j}} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^j\partial x^i} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^i\partial x^j} = \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial x^i} = \mathbf{r}_{ji}, \ \boxed{\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}}.$$