

№ 1775

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет

МИСиС



Кафедра автоматизированных систем управления

Ю.Ю. Прокопчук, А.И. Широков

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Элементы логико-математического языка

Учебное пособие

Часть II

для студентов специальностей 220200 и 351400

Под редакцией проф. А.Г. Дьячко и проф. Л.П. Рябова

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института

МОСКВА 2002

УДК 519.45

П78

Прокопчук Ю.Ю., Широков А.И.

П78 Дискретная математика: Элементы логико-математического языка: Учеб. пособие. Ч. II / Под ред. проф. А.Г. Дьячко и проф. Л.П. Рябова – М.: МИСиС, 2002. – 149 с.

Одним из средств отражения внутреннего и внешнего мира человека является естественный язык. Описание «мира математических предметов», т.е. системы, состоящей из математических объектов, их свойств и отношений между ними, а также логических связей между двумя последними, совершается на формализованном так называемом *логико-математическом языке* (ЛМЯ). В данном пособии представлена вторая часть раздела «Элементы логико-математического языка» учебной дисциплины «Дискретная математика». Рассмотрены главным образом семантические аспекты логико-математического языка, относящиеся к интерпретациям его выражений.

Пособие предназначено для студентов специальностей 220200 и 351400, изучающих учебные дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Дискретная математика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов.....	7
Введение	8
Глава III. Семантические аспекты логико-математического языка.....	9
§ 1. Значения константных выражений	9
1. Языковые и основные значения константных выражений.....	9
2. Значность константного выражения.....	11
3. Отношение синонимии между константными выражениями и его свойства	13
4. Истинностные значения пропозициональных формул и константных соотношений.....	16
Упражнения.....	18
Примечание	21
§ 2. Значения выражений	24
1. Языковые и основные значения термов и элементарных соотношений.....	24
2. Интерпретация неэлементарных соотношений.....	27
3. Таблицы истинности для пропозициональных формул.....	29
4. Определенность выражения при интерпретации	31
5. Различение термальных и высказывательных форм	32
Упражнения.....	33
Примечание	35
§ 3. Виды вхождений переменных в выражение.....	36
1. Свободные и связанные переменные выражения	36
2. Свободные и связанные вхождения переменных в выражение.....	39
3. Зависимость выражения от переменных. Существенные и фиктивные переменные выражения	40
Упражнения.....	42
Примечание	43
§ 4. Отношение синонимии между выражениями	43
1. О синтаксическом и семантическом подобии выражений	43
2. Отношение синонимии между одноместными выражениями	44
3. Отношение синонимии между многоместными выражениями и его свойства	46
4. Основные равносильности	49
5. Тожественно истинные, тождественно ложные, выполнимые и опровержимые соотношения. Важнейшие тождественно истинные формулы.....	51

Упражнения.....	52
Примечание	54
Приложение 1. Зависимость выражения от переменных различных родов.....	54
Упражнения.....	58
Примечание	58
§ 5. Области задания, определения и значений выражений	59
1. Области, характеризующие константные выражения.....	60
2. Области, характеризующие логические и математические переменные	60
3. Области, характеризующие одноместные термы и элементарные соотношения	61
4. Области, характеризующие многоместные термы и элементарные соотношения	64
5. Истинностные области элементарных соотношений.....	66
6. Области, характеризующие неэлементарные соотношения.....	67
Упражнения.....	69
Примечание	70
Приложение 2. О независимости, совместности и совместимости свойств	72
1. Зависимость и независимость.....	72
2. Совместность, или непротиворечивость	75
3. Совместимость.....	75
Упражнения.....	75
Примечание	78
Глава IV. Квантификация соотношений.....	79
§ 1. Кванторы общности и существования.....	79
1. Об операциях связывания переменных выражения	79
2. Универсальная квантификация одноместных соотношений	80
3. Экзистенциальная квантификация одноместных соотношений... ..	81
4. О зависимости соотношения от переменных	82
Упражнения.....	83
Примечание	85
Приложение 1. Операции квантификации как обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции	86
Упражнения.....	87
Примечание	87
§ 2. Квантификация многоместных соотношений	88
1. О числе переменных многоместного соотношения.....	88
2. Универсальная квантификация многоместных соотношений	89

3. Экзистенциальная квантификация	многочестных соотношений	90
4. Многократная квантификация	многочестных соотношений.....	91
Упражнения		92
Примечание		94
§ 3. Свойства операций квантификации	и их связи с другими коннекторными операциями над соотношениями	94
1. Свойства операций квантификации		94
2. Связь между операциями квантификации	и отрицанием	96
3. Связь между операциями квантификации	и дизъюнкцией.....	96
4. Связь между операциями квантификации	и конъюнкцией	98
5. Связи между операциями квантификации	и импликацией	99
6. Связь между операциями квантификации	и эквивалентностью ..	100
Упражнения		101
Примечание		103
§ 4. Типовые, или ограниченные кванторы		104
1. Определение и примеры типовых кванторов		104
2. Свойства операций ограниченной квантификации	и их связи с другими коннекторными операциями	105
Упражнения		107
Примечание		107
Глава V. Элементы алгебры логики		108
§ 1. Основные понятия и определения		108
1. Предмет алгебры логики		108
2. Высказывательные формы		109
3. Простые высказывания алгебры логики	и простые предложения естественного языка.....	109
4. Сложные предложения естественного языка	и сложные высказывания алгебры логики.....	111
5. О языке алгебры логики.....		111
6. О некоторых логических аспектах построения	сложных высказываний	112
7. Основные операции над высказываниями	алгебры логики.....	113
Упражнения		115
Примечание		117
§ 2. Синтаксические и прагматические аспекты	языка алгебры логики.....	118
1. Определение формул языка алгебры логики		118
2. Подформулы.....		119
3. Кодирование формул		121

4. Бесскбочное кодирование формул алгебры логики	123
Упражнения.....	127
Примечание	129
§3. Семантические аспекты языка алгебры логики	130
1. Таблица истинности для формулы алгебры логики	130
2. Отношение равносильности между формулами	132
3. Тожественно истинные, тождественно ложные, выполнимые и опровержимые формулы.....	133
4. Основные равносильности	134
5. О выразимости одних формул через другие.....	135
Упражнения.....	137
Примечание	139
§ 4. Применения результатов алгебры логики	140
1. Применения в логике	140
2. Применение в теории релейно-контактных схем	142
Упражнения.....	144
Примечание	146
Литература.....	147

*Памяти
Александра Сергеевича
Урмаева*

От авторов

Данное пособие авторы посвящают памяти Александра Сергеевича Урмаева, профессора Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС), безвременно скончавшегося 16 декабря 1976 г. на 41-м году жизни.

А.С. Урмаев работал на кафедре инженерной кибернетики (КИК), руководимой профессором С.В. Емельяновым, с момента ее основания в 1966 г. в должности заместителя заведующего кафедрой. К этому времени относится появление в МИСиС аналоговой и цифровой вычислительной техники (ВТ). Помимо большой организаторской, преподавательской и методической работы А.С. Урмаев руководил секцией Методического совета МИСиС «Применение ВТ в учебном процессе», которую он создал в 1970 г. и которой бессменно руководил до 1976 г. Благодаря его работе в МИСиС, где до 1966 г. не было современной вычислительной техники, в учебные планы всех специальностей были включены и стали регулярно проводиться теоретические и практические занятия по указанным курсам. А.С. Урмаев создал несколько общесоюзных учебников и учебных пособий, которые вышли в издательстве «Наука».

Авторы данного пособия работали с А.С. Урмаевым около десяти лет в качестве студентов или сотрудников. У них сохранились самые лучшие воспоминания о нем как об эрудированном специалисте, прекрасном педагоге и, что не менее важно, исключительно доброжелательном товарище.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии, как и в руководстве [27], повествование ведется в основном в той же форме, что и на лекциях. Глава III посвящена главным образом интерпретациям выражений. В нее включены, в частности, вопросы синонимии выражений (§ 4) и описание теоретико-множественных конструкций, их характеризующих (§ 5). В гл. IV после введения основных понятий (§§ 1 и 2) изучаются свойства операций квантификации и их связи с другими коннекторными операциями (§§ 3 и 4). Главным предметом изучения в гл. V служат логические аспекты языкового понятия *высказывание*, т.е. лингвистического образа логического понятия *конкретное суждение* [27, гл. I, § 2, п. 2]. Материал этой главы хотя и имеет общие черты с материалом, излагаемым в гл. I – IV, но в основном носит самостоятельный характер. Последнее связано с тем, что в учебных планах некоторых специальностей присутствует дисциплина «Математическая логика и теория алгоритмов», но нет дисциплины «Дискретная математика». Именно в этом случае гл. V служит основным учебным пособием для студентов указанных специальностей. Приведенные в книге упражнения с подробным разбором решений некоторых из них служат базой для проведения практических, а разносторонние примечания – семинарских занятий и курсовых работ. При ссылках на I часть пособия [27] указываются ее главы, параграфы и пункты.

Несколько слов о структуре и правилах пользования пособием. Пособие разбито на главы, главы – на параграфы, а параграфы – на пункты. Интересующие нас выражения пронумерованы со ссылкой на номера главы, параграфа и порядковый номер формулы в параграфе. В каждый пункт включены наглядные примеры. Они, несомненно, облегчают понимание текста, поскольку его изложение все же носит в известной мере догматический характер. Нумерация выражений внутри каждого примера своя и обозначена арабскими цифрами.

Авторы выражают свою признательность О.А. Алещенко и М.С. Кузьмину, немало способствовавшим улучшению изложения.

Глава III. СЕМАНТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЯЗЫКА

В гл. I и II мы занимались следующими *синтаксическими* и *прагматическими* вопросами ЛМЯ (гл. I, § 2, п. 4), относящимися в основном к понятию *выражение* и его видам: *термам* и *соотношениям* (гл. II, § 4, п. 2): а) из каких видов *исходных* имен состоят выражения (гл. I, § 3, п. 1); б) что представляют собой эти имена (гл. I, §§ 4 и 5); в) как обозначаются и вводятся в текст выражения (гл. II, § 1, п.п. 1 и 2); г) как классифицируются выражения и их виды в зависимости от вхождения или невхождения в них переменных (гл. II, § 1, п. 4); д) как *формально* строятся термы и соотношения из символов различных родов (гл. II, §§ 2 – 4), а также некоторыми попутными вопросами, в частности, прагматическими правилами упрощения записи выражений (гл. II, § 5, п.п. 1 и 2). В этой главе мы начнем знакомить читателя с некоторыми *семантическими* аспектами выражений, главным образом – их значениями.

§ 1. Значения константных выражений

1. Языковые и основные значения константных выражений

С константными выражениями (*кн-выражениями*), видами которых являются термальные и высказывательные константы (*т-константы* и *вс-константы*) (гл. II, § 4, п. 3), связывают несколько значений¹⁾. Одни значения присущи всем кн-выражениям, а другими может обладать один их вид и не обладать иной. Рассмотрим эти значения.

Языковым значением кн-выражения считают его само. Таким образом, любое кн-выражение имеет языковое значение. Значения кн-выражения, отличные от языкового, называют *основными*. Для каждого из видов кн-выражений мы рассмотрим в этой главе по одному основному значению.

Денотатом, или *предметным (истинностным) значением*, т-константы (соответственно, вс-константы) называют тот объект,

который она обозначает (соответственно, ее *истинностную* модальность, т.е. одну из модальностей: *истина*, *ложь* (гл. I, § 2, п. 2)). Таким образом, указанные основные значения разных видов кн-выражений различны (гл. I, § 2, примеч. 4). Иерархия введенных понятий ЛМЯ представлена схемой *древесной структуры* [11, с. 149] на рис. III.1.

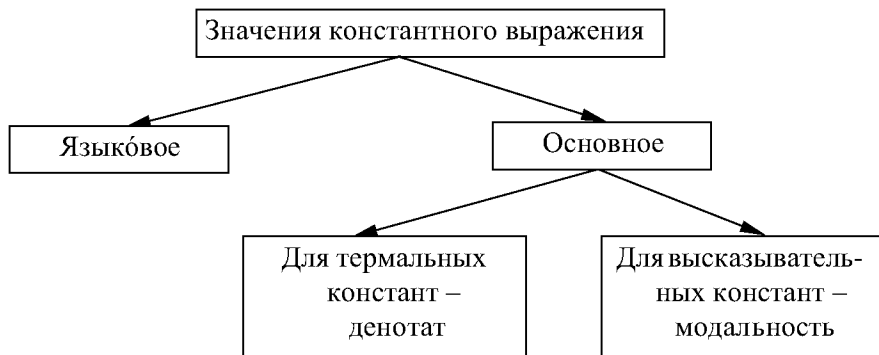


Рис. III.1

Пример 1.

1. Языковыми значениями т-констант 8_{10} , 10_8 , VIII, 2^3 , $\log_2 256$, $(\sin^{-1} 30^\circ)^3$, $10-2$, $3+5$ и 3_5+10_5 являются они сами, а их общим денотатом – число *восемь*.

2. Языковыми значениями элементарных вс-констант (гл. II, § 3, п. 1): (1) $3 \leq 4$; (2) $2 \cdot 2 = 4$; (3) *во всяком треугольнике два угла – острые*; (4) $1 < 0$; (5) $2 + 2 = 5$; (6) *в любом треугольнике один из углов – прямой* служат они сами. Основным значением каждого из высказываний (1) – (3) является модальность *истина*, а высказываний (4) – (6) – *ложь*.

Замечание. Существуют такие кн-выражения, об основных значениях которых установлено немного, главным образом по двум следующим причинам:

1) известно, вещами какого рода являются эти значения, и ясно, что они существуют, но наши интеллектуальные, в частности технические, возможности не позволяют нам знать (по крайней мере, в настоящее время), какими конкретными объектами они являются. Такие положения называют *неопределенностями 1-го рода*;

2) основные значения каких-то кн-выражений пока не определены теоретически, и поэтому – и практически. Иными словами, до настоящего времени (2002 г.) не узнали, либо не договорились, не условились, какие объекты считать основными значениями этих кн-выражений. Такие ситуации называют *неопределенностями 2-го рода*.

Пример 2.

1. Пусть $p = \text{df}(100!^{100!^{100!}})$. Ответы на вопросы: 1) о p -й цифре 10-го изображения (т.е. изображения в 10-й системе счисления) числа π и 2) об истинностном значении высказывания: *p-я цифра 10-го изображения числа π есть 8* осложнены из-за одной и той же неопределенности 1-го рода²⁾.

2. Препятствия при выявлении основных значений для кн-выражений $(5-3):0$ и $((5-3):0) > 2$ связаны с общей для них неопределенностью 2-го рода³⁾.

Утверждение о том, что основное значение кн-выражения A известно, изображают знакосочетанием

$$!A, \quad (\text{III.1.1})$$

которое читают: *кн-выражение A определено*⁴⁾. Фраза (III.1.1) является одноместным соотношением с выраженческой переменной A (гл. II, § 4, п. 3). При подстановке в него на место A различных вр-констант это соотношение может «переходить» в истинное либо ложное высказывание.

Отрицание соотношения (III.1.1) изображают формулой

$$\neg !A, \quad (\text{III.1.2})$$

которую читают: *неверно, что кн-выражение A определено*, или, допуская вольность речи, *кн-выражение A не определено*. *Ясно, что соотношение (III.1.2) «превращается» в истинное высказывание для тех и только тех *интерпретаций* A (§ 3, п. 1 и 2), при которых формула (III.1.1) становится ложной*.

Ниже мы будем иметь дело в основном с определенными кн-выражениями⁵⁾. Появляющиеся в тексте неопределенные кн-выражения будем по возможности как-то квалифицировать (см. также п. 4 § 2).

2. Значность константного выражения

Любому кн-выражению, например A , «соотносят» совокупность, состоящую только из всех его основных значений, которую называют *его экстенционалом* и обозначают через $\mathcal{E}(A)$. Число элементов (*мощность*) $\mathcal{E}(A)$ именуется *значностью* A и обозначают через $|\mathcal{E}(A)|$ ⁶⁾.

Пример 1.

1. Очевидно, что $\mathcal{E}(1 \leq 2) = \{\text{модальность И}\}$, а $\mathcal{E}(1 + 2) = \{\text{число } 3\}$. Допуская вольность, состоящую в отождествлении обозначений экстенционала и номенклатуры переменной (гл. I, § 5, п. 2, замечание), эти равенства обычно

записывают в виде: $\mathfrak{E}(1 \leq 2) = \{I\}$ и $\mathfrak{E}(1 + 2) = \{3\}$ соответственно. Отсюда следует, что $|\mathfrak{E}(1 \leq 2)| = |\mathfrak{E}(1 + 2)| = 1$.

2. Кн-терм $(16)^{1/4}$ не располагает денотатами во множестве $N_{\text{неч}}$ нечетных натуральных чисел, но имеет один денотат: число 2 – во множествах $N_{\text{ч}}$ четных натуральных чисел и N ; два денотата: числа 2 и -2 – во множествах Z , Q и R ; и четыре денотата: числа ± 2 и $\pm 2i$, где $i = \text{df}(-1)^{1/2}$ – во множестве $K^{(7)}$.

В отличие от любой вс-константы, обладающей единственным основным значением⁸⁾, для каждого $n \in N$ существует т-константа, имеющая в точности n денотатов, принадлежащих подходящему множеству (см. пример 1 и упр. 6), т.е. представляющая собой n -значный полисем⁹⁾. Отсюда следует, что «с точки зрения значности» кн-выражений бóльший интерес, но и бóльшие трудности для изучения представляют т-константы. О них и пойдет речь дальше.

Обобщением и уточнением понятия *экстенционал кн-выражения* является следующее. Множество, состоящее только из всех денотатов т-константы T , принадлежащих совокупности M , обозначают через $\mathfrak{E}_M(T)$ и называют *экстенционалом T в M* , а число его элементов (*его мощность*) $|\mathfrak{E}_M(T)|$ – *значностью T в M* ¹⁰⁾. Очевидно, что $\mathfrak{E}_M(T) \subseteq M$.

Допуская вольность речи, т-константу, экстенционал которой включается в совокупность M , называют *т-константой, принадлежащей M* ¹¹⁾.

Пример 2. Из примера 1 получаем, что при $T = \text{df}(16)^{1/4}$ $\mathfrak{E}_{N_{\text{неч}}}(T) = \emptyset$, $\mathfrak{E}_{N_{\text{ч}}}(T) = \mathfrak{E}_N(T) = \{2\}$, $\mathfrak{E}_Z(T) = \mathfrak{E}_Q(T) = \mathfrak{E}_R(T) = \{-2, 2\}$ и $\mathfrak{E}_K(T) = \{2, 2i, -2, -2i\}$, а $|\mathfrak{E}_{N_{\text{неч}}}(T)| = 0$, $|\mathfrak{E}_{N_{\text{ч}}}(T)| = |\mathfrak{E}_N(T)| = 1$, $|\mathfrak{E}_Z(T)| = |\mathfrak{E}_Q(T)| = |\mathfrak{E}_R(T)| = 2$ и $|\mathfrak{E}_K(T)| = 4$.

Если для данных т-константы T и множества M утверждение: $\mathfrak{E}_M(T)$ – *конечное (бесконечное) множество*, – верное, то ее называют *конечнозначной (соответственно, бесконечнозначной) в M* .

Пример 3. Т-константа *кратное 15, принадлежащее отрезку $[0; 500] \subseteq N$ (принадлежащее Z)*, является конечнозначной (соответственно, бесконечнозначной) – см. упр. 17.

Термальную константу T , принадлежащую M , называют *n-значной*, где $n \in N$, если $|\mathfrak{E}_M(T)| = n$. В частности, при $n = 0$ ее именуют *нользначной*, при $n = 1$ – *однозначной*, при $n \leq 1$ – *не более чем однозначной*, а при $n > 1$ – *более чем однозначной*, или *многозначной*. Отсюда следует, что бесконечнозначные т-константы являются многозначными. Иерархия описанных терминов ЛМЯ изображена на рис. III.2.

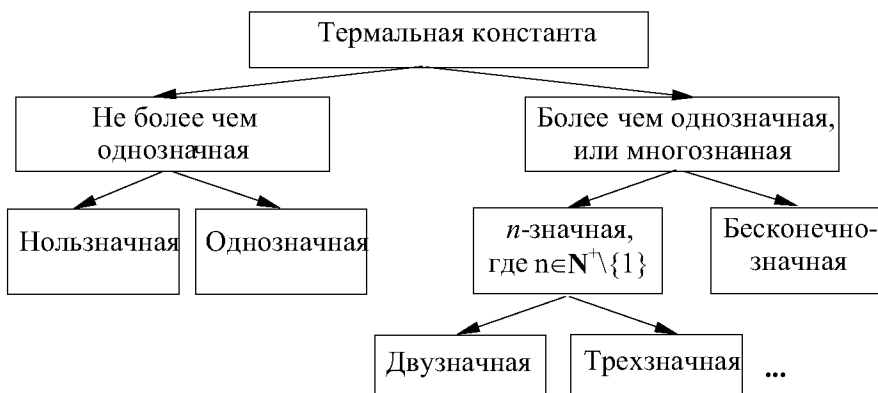


Рис. III.2.

Пример 4. Одноместная т-форма *кратное 15*, принадлежащее M (с множественной переменной M) «переходит» в т-константы разных значений при различных конкретизациях M . А именно, становится нользначной при $M = df\{1,2,\dots,14\}$, однозначной при $M = df\{0,1\}$, двузначной при $M = df\{0,15\}$, n -значной, где $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$, при $M = df\{0,1,2,\dots, (n-1) \cdot 15\}$ и бесконечнозначной, в частности, при $M \in \{\mathbb{N}_c, \mathbb{N}_{\text{неч}}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}\}$.

Из сказанного следует, что какие-то т-константы являются общими именами для предметов из некоторых более чем одноэлементных совокупностей, т.е. в известном смысле подобны переменным. Ниже мы будем иметь дело в основном с не более чем однозначными т-константами¹²⁾. Ситуации, в которых фигурируют многозначные т-константы, постараемся анализировать отдельно. В частности, говоря ниже о денотатах многозначной т-константы, будем иметь ввиду любой из них, если об этом денотате нет более подробных сведений.

3. Отношение синонимии между константными выражениями и его свойства

Кн-выражение A_1 называют *синонимичным*, или *равнозначным*, кн-выражению A_2 , если выполняется одно из следующих альтернативных условий:

$$!A_1 \wedge !A_2 \wedge (\text{основные значения } A_1 \text{ и } A_2 \text{ – одинаковые}); \quad (\text{III.1.3})$$

$$\lceil !A_1 \wedge \rceil !A_2 \text{ }^{13)}. \quad (\text{III.1.4})$$

Бинарное отношение *синонимии*, или *равнозначности*, между одним кн-выражением и другим обозначают знаком \sim (тильда, волна)¹⁴. Утверждение: (кн-выражение) A_1 синонимично, или равнозначно (кн-выражению) A_2 , транслируют двухместным соотношением ЛМЯ $\sim(A_1, A_2)$, или в более привычном и н ф и к с н о м виде [28, с. 98, ст. “Инфикс”]:

$$A_1 \sim A_2, \quad (\text{Ш.1.5})$$

которое читают: (кн-выражение) A_1 синонимично, или равнозначно (кн-выражению) A_2 ¹⁵.

Из сказанного вытекает, что определенные синонимичные т-константы представляют собой разные обозначения одного и того же предмета, а именно – своего денотата, а синонимичные вс-константы имеют одинаковую модальность.

Пример 1. Из пп. 1 и 2 примера 1 п. 1 следует, что $8_{10} \sim 10_8$, $10_8 \sim \text{VIII}$, $10_{-2} \sim 3_5 + 10_5$ и т.д., а из примера 2 п. 2: $\mathcal{E}_R((16)^{1/4}) \sim \mathcal{E}_Z((4)^{1/2})$, так как обе эти константы являются синонимичными именами множества $\{2, -2\}$; $(3 \leq 4) \sim (2 + 2 = 4)$; $(9/3 = 3) \sim$ (во всяком треугольнике два угла – острые); $(1 < 0) \sim (2 + 2 = 5)$. Кроме того, $(5/0) \sim (6/0)$; $(5/0 > 3) \sim (6/0 > 3)$; $(5/0) \sim (6/0 > 4)$ и т.д., так как основные значения кн-выражений, расположенных слева и справа от знака \sim , неопределены (а именно, представляют собой неопределенности 2-го рода – см. п. 1).

Совокупность всех синонимов какого-либо кн-выражения называют *гнездом синонимов*, порожденным его основным значением. Если кн-выражение – т-константа, то элементы ее гнезда синонимов – это различные обозначения ее денотата. Если же кн-выражение – вс-константа, например, P , то элементы ее гнезда синонимов – всевозможные вс-константы, истинностное значение каждой из которых то же, что и истинностное значение P .

Пример 2. Кн-термы, приведенные в пп. 1 примера 1 из п. 1, принадлежат к гнезду синонимов, порожденных числом *восемь*, – их общим денотатом. Высказывания (1) – (3) [(4) – (6)], приведенные в пп. 2 того же примера, принадлежат к гнезду синонимов, порожденных модальностью *истина* [соответственно, *ложь*].

Свойства отношения синонимии между константными выражениями.

Пусть A_1 , A_2 и A_3 – кн-выражения. Легко убедиться, что бинарное отношение¹⁶ \sim , введенное нами на классе кн-выражений, обладает следующими свойствами, названия которых помещены в круглых скобках справа от соответствующих формул:

$$A_1 \sim A_1 \text{ (рефлексивность);} \quad (\text{Ш.1.6})$$

$$(A_1 \sim A_2) \Rightarrow (A_2 \sim A_1) \text{ (симметричность)} \quad (\text{Ш.1.7})$$