

№ 498

МИСиС

Ю.Ю. Прокопчук
А.И. Широков

Дискретная математика

Основные теоретико-множественные
конструкции

Часть III

Учебное пособие

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

№ 498

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет



Кафедра автоматизированных систем управления

Ю.Ю. Прокопчук
А.И. Широков

Дискретная математика

Основные теоретико-множественные
конструкции

Часть III

Учебное пособие

Под редакцией проф. А.Г. Дьячко и проф. Е.А. Калашникова

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института

Москва Издательство «УЧЕБА» 2005

УДК 591.45
П78

Рецензент
д-р техн. наук, проф. МГГА Л.П. Рябов

Прокопчук Ю.Ю., Широков А.И.

П78 Дискретная математика: Основные теоретико-множественные конструкции. Ч. III: Учеб. пособие / Под ред. А.Г. Дьячко и Е.А. Калашникова. – М.: МИСиС, 2005. – 77 с.

Пособие представляет собой третью часть раздела «Основные теоретико-множественные конструкции» учебного курса «Дискретная математика». В него входит описание такого фундаментального понятия современной математики, как *соответствие*, в частности *функция*, а также относящийся к последним логический и математический аппарат.

Содержание пособия соответствует программе курса «Дискретная математика». Предназначено для студентов, изучающих учебные дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Дискретная математика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов.....	4
Введение.....	5
Глава V. Отношения между множествами. Соответствия.....	6
§ 1. Определение отношения между множествами. Виды отношений.....	6
1. Определение отношения между множествами.....	6
2. Виды отношений.....	7
Упражнения.....	8
Примечания.....	12
§ 2. Соответствия.....	13
1. Терминология и обозначения.....	13
2. Способы задания соответствий.....	14
3. Образ и полный прообраз множества относительно соответствия.....	18
Упражнения.....	18
Примечания.....	21
§ 3. Отношения между соответствиями и операции над ними.....	22
1. Отношения между соответствиями.....	22
2. Действия над соответствиями, порожденные теоретико-множественными операциями.....	23
3. Действия над соответствиями, порожденные операциями над графиками.....	24
Упражнения.....	27
Примечания.....	32
Глава VI. Свойства соответствий. Задачи анализа и синтеза соответствий.....	33
§ 1. Свойства соответствий.....	33
1. Основные свойства соответствий.....	33
2. Свойства функциональных соответствий.....	34
3. Связи между свойствами соответствий.....	35
Упражнения.....	37
Примечания.....	47
§ 2. Задачи анализа и синтеза соответствий.....	47
1. Задача анализа для соответствий.....	47
2. Задача синтеза для соответствий.....	49
Упражнения.....	50
Примечания.....	69
Библиографический список.....	70
Приложение 1. Указатель знаков и обозначений.....	72
Приложение 2. Указатель терминов.....	74

От авторов

Данное пособие авторы посвящают памяти Юлия Михайловича Социна, заместителя начальника Вычислительного центра Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС), скоропостижно скончавшегося 5 июня 1987 года.

Ю.М. Социн работал на кафедре инженерной кибернетики (КИК) МИСиС, возглавляемой академиком РАН С.В. Емельяновым, с момента ее основания в 1966 году. К этому времени относится появление в МИСиС аналоговой и цифровой вычислительной техники, методическое руководство, математическое сопровождение и техническое обеспечение которой осуществлялось главным образом сотрудниками КИК. Последний из этих аспектов деятельности реализовывался при непосредственном участии Ю.М. Социна. Его теоретические знания, в высшей степени добросовестное отношение к делу и энергичность позволили внедрить в учебную и научную практику МИСиС электронные цифровые машины нескольких поколений. С марта 1972 по июнь 1987 года Ю.М. Социн работал в должности первого заместителя начальника вычислительного центра МИСиС. Его деятельность на этом поприще была посвящена главным образом внедрению персональных компьютеров в учебную и научную практику студентов, аспирантов и сотрудников МИСиС.

Авторы пособия сотрудничали с Ю.М. Социным в течение более двух десятилетий и до настоящего времени сохранили самые теплые воспоминания о нем как о специалисте высшей категории, верном партнере, доброжелательном старшем товарище и очень скромном человеке.

ВВЕДЕНИЕ

1. Понятия *множество* и *кортеж*, представленные в главах гл. I и II пособия [15], являются категориями современной математики [12, с. 8], на основе которых могут быть «построены» теоретико-множественные конструкции «любой степени сложности». Простейшие среди них – *множества кортежей* (то есть *графики*) и *кортежи множеств* подробно изучены в главах III и IV пособия [16]. Рассмотрим содержание данного пособия.

В гл. V вводится одно из фундаментальных понятий современной математики – *отношение между множествами*, и сообщаются сведения об его отдельных видах. А именно, в § 1 это понятие логически строго определяется на основе теоретико-множественных конструкций: *кортеж множеств* [16, гл. III, § 3, п. 3, с. 48], *прямое произведение множеств* (см. там же) и *n-график* [16, гл. III, § 2, п. 3, определение 1, с. 23], и иллюстрируется примерами. Здесь же читатель знакомится с некоторыми отдельными видами указанных отношений, в частности, с *n-местными отношениями на множестве*, *свойствами* и *соответствиями*. Последние и служат основным объектом изучения в этой и последующей главах. § 2 посвящен подробному изложению общих вопросов, связанных с соответствиями. Полученные здесь результаты базируются в основном на исследованиях, проведенных в [16, гл. IV, § 1, с. 90 – 104]. В § 3 определяются и анализируются некоторые связи между соответствиями и действия над ними, порожденные теоретико-множественными и графическими операциями.

В гл. VI читатель получает сведения об основных свойствах соответствий, проблемах их анализа и синтеза. В § 1 перечисляются указанные свойства и доказывается их семантическая независимость. Здесь же приводится строгое определение одного из главных понятий современной математики и ее приложений – *функциональных соответствий*, или *функций*. Далее рассматриваются виды функций и связи между свойствами соответствий. В § 2 изложены постановки задач анализа и синтеза соответствий. Решения этих задач проиллюстрированы на примерах.

2. Некоторые места текста имеют целью уберечь читателя от серьезной ошибки, которую он рискует совершить; эти места отмечены знаком **Z** («опасный поворот») [1, с. 20].

3. Авторы благодарят Т.В. Дубравину и М.С. Кузьмина за помощь в компьютерной верстке.

ГЛАВА V. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ. СООТВЕТСТВИЯ

Развѣтые в гл. I–IV пособий [15, 16] концепции позволяют построить довольно общую теоретико-множественную конструкцию: *отношение между множествами* (§ 1, п. 1 данного пособия), конкретизациями которой являются такие фундаментальные понятия современной математики как *соответствие* (§ 1, п. 2), в частности, *функция* (гл. VI, § 1, п. 1), и *n-местное отношение на множестве* (§ 1, п. 2), *в частности, *бинарное отношение на множестве* (гл. X).* Эти концепции позволяют также рассматривать некоторые уже введенные понятия с более общей точки зрения.

§ 1. Определение отношения между множествами. Виды отношений

1. Определение отношения между множествами

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}^+$,

$$Y = \text{df} \langle X_i \rangle_{i \in [1;n]} \quad (1)$$

– кортеж множеств, а

$$G \subseteq \prod_{i \in [1;n]} X_i. \quad (2)$$

n-местным, или *n-арным*, *отношением между множествами из их кортежа* (1) называют пару

$$Q = \text{df} \langle G, Y \rangle. \quad (3)$$

n-график G называют *графиком отношения* (3), а кортеж (1) – *его носителем*.

Пример 1. 1) Кортеж длины 2 $Q_1 = \text{df} \langle G_1, \langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle \rangle$, где G_1 – бинарный график [16, гл. IV, § 1, п. 1, с. 90], состоящий лишь из всех пар $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}^2$, для компонент каждой из которых верно неравенство $x \leq y$, представляет собой двухместное, или бинарное, отношение между множествами из кортежа $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle$, или на множестве \mathbf{R} , которое называют *отношением нестрогого порядка на множестве \mathbf{R}* .

2) Пара $Q_2 = \text{df} \langle G_2, \langle \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q} \rangle \rangle$, где G_2 – тернарный график [16, гл. III, § 2, п. 1, с. 23], составленный исключительно из всех троек $\langle n, z, q \rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$, для компонент каждой из которых верно равенство: