№ 1751

Ю.Ю. Прокопчук
А.И. Широков
Т.В. Дубравина

Дискретная математика

Основные теоретико-множественные конструкции

Часть I

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

№ 1751

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра автоматизированных систем управления

Ю.Ю. Прокопчук
А.И. Широков
Т.В. Дубравина

Дискретная математика

Основные теоретико-множественные конструкции

Часть I

Учебное пособие
для студентов специальностей 220200 и 351400

Под редакцией В.А. Грузмана и А.Г. Дьячко

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института

Москва Издательство «УЧЕБА» 2003

УДК 591.45
П78

Р е ц е н з е н т
доктор технических наук, профессор МГТУ *В.А. Уткин*

Прокопчук Ю.Ю., Широков А.И., Дубравина Т.В.

П78 Дискретная математика: Основные теоретико-множественные конструкции. Ч. I: Учеб. пособие /Под ред. В.А. Грузмана и А.Г. Дьячко. – М.: МИСиС, 2003. – 119 с.

Теория множеств (ТМ) – это учение о наиболее общих свойствах состоящих из объектов п р о и з в о л ь н о й природы *совокупностей* и отношениях между ними. Опыт современной математики и анализ ее основ подтвердили тезис о том, что совокупность, или *множество*, служит той единственной *категорией* [26, с. 4], на основе которой может быть построено логически безупречно все «здание» математической науки. Изложенные в пособии сведения касаются описаний и характеристик основных понятий ТМ: *множеств* и *кортежей*, а также относящегося к ним математического аппарата.

Содержание пособия соответствует программе курса «Дискретная математика». Предназначено для студентов специальностей 220200 и 351400, изучающих учебные дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Дискретная математика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Памяти
Эммануила Марковича
Бравермана

От авторов

Данное пособие авторы посвящают памяти Эммануила Марковича Бравермана, профессора Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС), скончавшегося после тяжелой и продолжительной болезни в апреле 1976 г.

Э.М. Браверман работал на кафедре инженерной кибернетики МИСиС, руководимой академиком С.В. Емельяновым, в должности профессора в период с 1966 по 1976 г. Его учебные курсы были направлены главным образом на изложение методов решения дискретных и непрерывных экстремальных задач и отличались оригинальностью и глубиной, а также математической строгостью и педагогическим мастерством. Кроме того, в его курсах впервые в МИСиС освещались вопросы теории систем и системного анализа. Позже основы этой теории были включены в учебные планы всех специальностей, и в студенческих группах стали регулярно проводиться лекционные и практические занятия, отражающие те или иные ее аспекты. В период своей работы в МИСиС Э.М. Браверман руководил общеинститутским научно-методическим семинаром «Основы теории больших систем». Э.М. Браверман создал лично и в соавторстве несколько общесоюзных учебников и учебных пособий, которые вышли в издательстве «Наука».

Авторы данного пособия работали с Э.М. Браверманом более десяти лет на учебной и научной ниве в качестве студентов или сотрудников. У них до настоящего времени сохранились самые теплые воспоминания о нем как об эрудированном специалисте, прекрасном педагоге и, что особенно важно, в высшей степени доброжелательном старшем товарище.

ВВЕДЕНИЕ

1. *Теория множеств* (ТМ) – это учение о наиболее общих свойствах и отношениях между совокупностями объектов различной природы. Она была создана усилиями логиков и математиков XIX века, которые стремились построить логический базис для математического анализа. Первые труды в этой сфере (Б. Больцано, Р. Дедекинд, Г. Фреге) в основном были посвящены изучению числовых множеств и множеств числовых функций. Решительный шаг в создании ТМ сделал Г. Кантор (1845 – 1918), заслуги которого заключаются в том, что он, во-первых, начал рассматривать множества элементов произвольной природы, и, во-вторых, получил фундаментальные результаты, связанные с понятием *мощность множества* (гл. I, § 1, п. 4).

После начального периода недоверия к ТМ, вызванного появлением *антиномий* [1, т. 1, с. 292 – 296, ст. «Антиномия»; 10, с. 48 ст. «Антиномия»], которое было преодолено главным образом при помощи так называемого *аксиоматического метода* (см. прил. 2 к гл. I), началось ее триумфальное шествие по всем областям математики и других наук, которое продолжается и сейчас.

2. Рассмотрим вкратце теоретико-познавательные аспекты понятия *множество*.

Во-первых, его становление отражает синтетическую функцию мышления, направленную на построение новых объектов из исходных. Процедура такого построения связана с движением мысли от единичного к общему посредством абстрагирования от частностей. Например, изучение таких отдельных математических предметов как числа, приводит нас к рассмотрению сначала отдельных числовых множеств, а затем – множеств *абстрактных объектов* [2, с. 4, ст. «Абстрактные объекты»][1)].

Во-вторых, понятие *множество* служит хорошим подспорьем для решения одной из важнейших общенаучных задач: сведѐния (редукции) сложного к простому. Например, такие столь внешне непохожие друг на друга вещи, как геометрические линии, фигуры и тела удобно рассматривать как совокупности, состоящие из объектов одного и того же вида – точек. Здесь идея множества используется для унификации описания и анализа уже имеющихся в наличии различных довольно сложных математических предметов.

И наконец, в-третьих, общенаучная практика свидетельствует о необычайной широте и плодотворности понятия *множество*. В частности, опыт современной математики и анализ ее основ подтвердили тезис о том, что такой вид совокупностей, как множества служит тем единственным исходным «материалом», на основе которого может быть «построено» все «здание» математической науки [5, с. 12 – 13]. Отсюда вытекает *универсальность языка* ТМ, являющегося фрагментом логико-математического языка (ЛМЯ) [27, 28], служащего для описания современной математики.

3. Из сказанного выше следует, что для изложения математики достаточно лишь одного-единственного языка – языка, описывающего ТМ. Если прежде считали, что каждый раздел математики зависит от специфической интуиции исследователя, дающей ему первичные понятия и утверждения, и поэтому для каждого из них необходим свой самостоятельный *формализованный язык* [26, с. 14], то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно «вывести» практически всю современную математику из единственного источника – ТМ. Таким образом, нам будет достаточно, выбрав подходящий формализованный язык, пояснить, как «передать» на нем теорию множеств, а затем, по мере того как мы будем обращаться к различным разделам математики, показать, как они включаются в ТМ [5, с. 23]. В нашей серии учебной литературы по дискретной математике, в которую включаются, в частности, работы [21 – 28], начало этому положено в данном пособии.

4. Авторы благодарят И.В. Одина за подготовку графических материалов.

Примечание

[1)]*Наглядный пример построения множества вещественных чисел на основе единственного понятия *пустое множество* приведен в [4, с. 6].*

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Исходные понятия

1. Собирательные понятия и их роль в процессе познания

Напомним, что в логике *собирательным* называют такое понятие, в содержании которого необходимо присутствуют признаки, отражающие интуитивно ясную идею объединительности, или коллективизируемости (от лат. collectivus – собирательный), в том или ином смысле, и тем самым позволяющие рассматривать его объем как единое целое [10, с. 554, ст. «Собирательное понятие»]. Так, понятия церковь, государство, полк, оркестр, команда (экипаж), стая и т.д. являются собирательными[1)].

То, что разумно сказать о собирательном понятии, может оказаться истинным, ложным, либо неосмысленным для каких-то предметов из его объема[2)]. Так, используя в рассуждении собирательное понятие *корабельная роща*, мы имеем в виду, что лишь какие-то ее деревья подходят для строительства кораблей, а вовсе не то, что для этой цели годится каждое из них. *Другой пример. Совокупность $\{\mathbf{N}, 1, \{1, 2\}\}$ – конечная. Однако среди трех ее членов конечной является только совокупность $\{1, 2\}$. Совокупность **N** – бесконечная. Число же *один* вообще не является совокупностью в нашем понимании [24, с. 5 – 6]. Поэтому утверждение о его конечности не истинно либо ложно, а абсурдно*.

Среди различных видов понятий собирательные занимают особое место в научном и учебном процессе, поскольку именно они часто выступают в качестве исходных объектов той или иной теории, на основе которых строятся производные объекты и вокруг которых развивается дальнейшее учение. *Например, собирательные понятия *множество* (п. 3) и *кортеж* (см. далее гл. II, § 1, п. 1) являются базисными в современной математике.*

2. Признаки понятия «совокупность»

Собирательное понятие *совокупность* (*предметов*), являясь одним из начальных в современной науке, представляет собой *общенаучную категорию* [26, с. 8]. Поэтому мы в состоянии только как-то пояснить его при помощи других категорий или проиллюстрировать. Так, мы можем говорить о совокупности студентов, находящихся в этой аудитории в настоящее время; о совокупности корней какого-то уравнения; о совокупности фруктов в данной корзине; о совокупности снежинок, упавших на площадку, и т.д. Умственный акт возникновения этого понятия мы способны представить себе, например, следующим образом. Располагая отдельными предметами, или *элементами*, мы мысленно собираем, объединяем их в одно целое, то есть образуем новый предмет, который и отражаем в понятии *совокупность* (*этих предметов,* или *элементов*)[3]. Такое его описание, данное скорее в психологических, чем логических терминах, довольно расплывчато и поэтому неосторожное обращение с ним иногда приводит к *парадоксам* [10, с. 431, ст. «Парадокс»]. Чтобы по возможности избежать их, попытаемся сформулировать и раскрыть некоторые признаки, которые мы хотели бы «вложить» в *содержание* этого понятия [26, с. 7].

СВ1 На природу элементов совокупности, их свойства и отношения между ними, в частности, их взаиморасположение априóри[4] не накладывается никаких ограничений.

СВ2 Совокупность, построенная из исходных элементов, – это новый объект, отличный от каждого из них[5].

Из сказанного следует, что в качестве первоначального, «рабочего» определения совокупности может быть принято такое:

Совокупность – это объект, фактически имеющий или потенциально способный иметь элементы, из которых он состоит.

3. О совокупностях, изучаемых в математике

Если проанализировать процесс эволюции понятия совокупность, то можно выделить два его основных направления [5, с. 325–328].

Во-первых, философско-логическое направление, в процессе развития которого были выявлены и сформулированы такие связи между объектами, как *принадлежность элемента совокупности* (см. § 2, п. 1), *равенства* и *включения совокупностей* (см. § 2, пп. 2 и 3, соответственно), и другие. Эти интуитивно понятные отношения широко применяются во всех научных дисциплинах. Можно предположить, что ученые любой специальности более или менее сознательно пользовались ими всегда[6].

И, во-вторых, направление, посвященное исследованию количественных характеристик совокупностей, то есть тех их сторон, которые и служат одним из предметов исследования математической науки [26, с. 11 – 12]. Сюда относится, в частности, и вопрос о *числе элементов совокупности*, или ее *мощности*[7]. Отсутствие в течение долгого времени полной ясности по этому вопросу, то есть по «количественной стороне» понятия совокупность, послужило причиной появления разного рода неопределенностей и недоразумений на пути развития этого направления. Проиллюстрируем сказанное.

Очевидно, что подсчет числа элементов одних совокупностей, например, пальцев конечности или глаз человека, может быть осуществлен довольно легко, других, в частности, статей Большой Советской Энциклопедии (БСЭ), хотя и вызывает технические трудности, но все же может быть реализован. А, например, подсчет числа элементов совокупности, состоящей только из всех натуральных чисел, вызывает затруднения у читателя, который прочитал пособие только до этого места, а с соответствующей литературой не знаком. Кроме того, по тем или иным причинам процедура пересчета элементов совокупности отнюдь не всегда оказывается выполнимой, а если и выполнима, то ведет к точному в определенном смысле результату. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих это утверждение.

Пример 1. Рассмотрим совокупность А, представляющую собой собрание отдельных капель жидкости, помещенных в сосуд. Когда А построена, ее элементы оказываются попарно неотделимыми друг от друга, и поэтому они не могут быть пересчитаны. Таким образом, причина отсутствия точной количественной оценки совокупности А состоит в том, что предметы, из которых она построена, став элементами А, оказываются неразличимыми.

Пример 2. Здесь речь пойдет о совокупности В всех предметов зеленого цвета, находящихся в моей комнате. Сегодня к В принадлежит и стоящий на столе свежий цветок. Но, завянув и пожелтев, он не будет входить в нее уже через неделю. Однако В может пополниться, например, двумя книгами в зеленых переплетах, взятыми мною в библиотеке. «Граница» В является «открытой» для миграции элементов, и поэтому число ее элементов то уменьшается, то увеличивается, что позволяет говорить нам только о числе ее элементов в данный конкретный момент времени. Мощность В – это не натуральная константа, а натуральная переменная[8]. Таким образом, причина отсутствия мощности у совокупности В только одна: изменяющееся во времени количество ее элементов.