№ 1556

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Фоменко Т.Н.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Раздел: *Общая алгебра*

Учебное пособие

МОСКВА, 2000

№ 1556

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра математики

Фоменко Т.Н.

Одобрено
методическим
советом института

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Раздел: *Общая алгебра*

Учебное пособие
для студентов специальностей
01012.00, 2202.00, 1209.00, 0719.00

МОСКВА, 2000

АННОТАЦИЯ

Данное пособие есть второе издание, в авторской редакции, учебного пособия с тем же названием, выпущенного в 1996 году. Перед вами пособие по курсу Алгебра и Геометрия, предназначенное для студентов факультета Информатики и Экономики (ИиЭ) специальностей: 0102.00 (Прикладная математика), 2202.00 (Автоматизированные системы управления и обработки информации), 1209.00 (Проектирование металлургических предприятий) и 0719.00 (Информационные системы) для области применения в экономике.

Годовой курс Алгебра и Геометрия читается в первом и втором семестрах. Материал данного пособия охватывает раздел Общая алгебра – основную часть программы второго семестра. Пособие может служить основой для самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, зачетам, экзаменам и при выполнении контрольных заданий. Одновременно с данным пособием и в дополнение к нему рекомендуется использовать сборник задач по курсу Алгебра и Геометрия, охватывающий те же темы (Учебное пособие МИСиС № 1239, авторы: И.А. Кашапов, Ф.Р. Кашапова, Т.Н. Фоменко, 1996).

Материал данного пособия разделен на части по основным темам данного раздела, в конце помещен список дополнительной литературы, рекомендуемой для более детального изучения данного раздела курса Алгебра и Геометрия”.

ФОМЕНКО Татьяна Николаевна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Раздел: *Общая алгебра*

Учебное пособие
для студентов специальностей
01012.00, 2202.00, 1209.00, 0719.00

	Объем 112 стр.	Тираж 195 экз.
Заказ	Цена “С”	Регистрационный № 305

Московский государственный институт стали и сплавов,
117936 Москва, Ленинский пр-т, 4
Типография МИСиС, ул. Орджоникидзе, 8/9

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОТНОШЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть A – некоторое непустое множество. ***Прямым произведением множества A на себя*** называют множество $A \times A$ всевозможных упорядоченных пар элементов из множества A. Аналогично, ***прямым произведением n экземпляров*** ($n \in N = \{1, 2, ...\}$ – множество целых положительных чисел) ***множества A*** (или ***n-ой степенью множества A***) называют множество $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = A^n$ всевозможных упорядоченных наборов по n элементов из множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1

n-арным отношением *на множестве* A *называется любое подмножество* $\gamma \in A^n$ n*-ой степени множества* A *(*n*-натуральное число). В частности, подмножества множества* A *называют унарными отношениями* ($n = 1$)*, подмножества прямого произведения* $A \times A$ *– бинарными отношениями* ($n = 2$) *подмножества* $A \times A \times A$ *– тернарными отношениями* ($n = 3$) *и так далее.*

ПРИМЕРЫ

1. Отношение $\lambda = \{x \in Z \mid x = 2k,\ k \in Z\}$ четности на множестве Z целых чисел – унарное отношение.

2. Отношение естественного порядка $\alpha = {}''\le'' = \{(x, y) \mid x \le y;$ $x, y \in R\}$ – бинарное отношение на множестве вещественных чисел.

3. Отношение $\beta = \{(x, y, z) \mid z = x + y;\ x, y, z \in R\}$ – тернарное отношение на множестве вещественных чисел R.

Рассмотрим подробнее бинарные отношения и операции над ними.

1.1. АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

С бинарными отношениями как подмножествами прямого произведения можно производить обычные операции: ***объединение***($\cup$),

пересечение($\cap$), ***дополнение***($\setminus$) (дополнение данного подмножества A до некоторого заданного универсального непустого множества Ω обозначают $\Omega \setminus A$, а также просто $-A$, если ясно, о каком Ω идет речь.) Существует несколько способов задания бинарных отношений. Остановимся кратко на некоторых из них. Для этого нам будут нужны следующие понятия (с которыми более подробно можно ознакомиться по [2]).

Высказыванием называют всякое предложение (фразу) естественного или искусственного языка, для которого имеет смысл вопрос о его истинности или ложности. ***Высказывательной формой*** называют выражение (т. е. осмысленное сочетание букв и знаков данного языка), в состав которого входят символы, означающие произвольные элементы их некоторого заданного множества (такие символы носят название ***переменных***), и которое при каждом конкретном наборе значений своих переменных является высказыванием.

Бинарные отношения часто задают с помощью логических высказываний, и принадлежность пары (x, y) к данному бинарному отношению сводится к проверке истинности заданной высказывательной формы при подстановке в нее имен элементов x, y вместо переменных. При этом высказывательная форма, задающая объединение двух отношений, есть дизъюнкция высказывательных форм, задающих два данных отношения; аналогично, пересечению бинарных отношений соответствует конъюнкция их высказывательных форм, а дополнению данного бинарного отношения – операция отрицания соответствующей высказывательной формы. Вследствие этого операции объединения, пересечения и дополнения над бинарными отношениями называют также соответственно ***дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2

Совокупность $\mathcal{P}\left(A^2\right)$ *бинарных отношений на данном множестве вместе с операциями их объединения (дизъюнкции), пересечения (конъюнкции), а также операции дополнения (отрицания) – называется* ***булевой алгеброй бинарных отношений на множестве A.***

Операции булевой алгебры бинарных отношений обладают следующими основными свойствами (для любых бинарных отношений

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}\left(A^2\right)$):

B1. $\alpha \cup \alpha = \alpha$

B2. $\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$

B3. $\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$

B4. $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$

B5. $-(-\alpha) = \alpha$

B6. $-(\alpha \cup \beta) = (-\alpha) \cap (-\beta)$

B7. $-(\alpha \cap \beta) = (-\alpha) \cup (-\beta)$

Свойства **B6**, **B7** называются ***законами двойственности*** (или ***формулами де Моргана***), с их помощью можно вывести также свойства, двойственные **B1 ...B4**, например: $\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$ – свойство, двойственное **B2**.

Отметим, что всякое (непустое) множество с тремя внутренними операциями (т. е. результаты которых принадлежат тому же множеству, на элементы которого эти операции действуют), обладающими свойствами **B1 ...B7**, называют(***абстрактной) булевой алгеброй***, поэтому указанные свойства **B1 ...B7** называют также ***аксиомами булевой алгебры.***

Рассмотрим еще две операции над бинарными отношениями: ***произведение и обращение***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3

Произведением (или композицией) двух бинарных отношений $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ *называется бинарное отношение* $\alpha \cdot \beta$, *определяемое равенством:*

$$\alpha \cdot \beta = \{(x, y) \in A \times A \,|\, (\exists z \in A)((x, z) \in \alpha \wedge ((z, y) \in \beta)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4

Обращением (*или* ***инверсией)*** *данного бинарного отношения* $\alpha \subseteq A \times A$ *называется бинарное отношение*

$$\alpha^{-1}, \alpha^{-1} = \{(x, y) \subseteq A \times A | (y, x) \in \alpha\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5

Полной алгеброй бинарных отношений *на множестве* A *назы-*

вается совокупность всех бинарных отношений на вместе с пятью операциями: дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, произведением (композицией) и обращением.

Перечислим ***основные свойства полной алгебры бинарных отношений*** на A, дополняющие свойства **B1 ...B7** булевой алгебры:

P1. $\alpha \circ i = i \circ \alpha$

(i – отношение равенства, $i = i_A = \{(x, y) | x, y \in A; x = y\}$.

P2. $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$.

P3. $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$.

P4. $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} . \circ \alpha^{-1}$.

P5. $(\alpha \cup \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) \cup (\beta \circ \gamma)$.

P6. $\gamma \circ (\alpha \cup \beta) = (\gamma \circ \alpha) \cup (\gamma \circ \beta)$.

P7. $-\left(\alpha^{-1}\right) = (-\alpha)^{-1}$.

P8. $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$.

Несложная проверка свойств **P1 ...P8** (а также свойств **B1 ...B7** булевой алгебры бинарных отношений) предоставляется читателю.

Кроме бинарных отношений как подмножеств квадрата $A \times A$ более общим образом, можно аналогично рассматривать так называемые ***отношения на паре множеств***, то есть подмножества прямого произведения двух различных множеств A и B. Однако для таких отношений имеет смысл лишь понятие булевой алгебры, но не полной алгебры, поскольку совокупность отношений на паре различных множеств незамкнута, вообще говоря, относительно операций произведения и обращения. В самом деле, произведение отношений $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq B \times C$ естественно определяется как отношение $\alpha \circ \beta \subseteq A \times C$, а обращение отношения $\alpha \subseteq A \times B$ – как отношение $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$. Выделим важный тип отношений на паре множеств, называемых отображениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6

Отображением множества A в множество B *называется отношение* $\lambda \subseteq A \times B$ *на паре множеств, удовлетворяющее усло-*

вию: $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)((x, y) \in \lambda)$.

При этом элемент y называется ***образом*** элемента x и обозначается: $y = \lambda(x)$, а элемент x называется ***прообразом*** элемента y.

Полным прообразом элемента $y \in B$ называется подмножество (возможно пустое) $\lambda^{-1}(y) = \{x \in A | y = \lambda(x)\}$ Отображение называется ***инъективным***, если образы разных элементов различны, то есть если неравенство: $x \neq y$ для элементов $x, y \in A$ влечет за собой неравенство образов: $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.

Отображение называется ***сюръективным***, если прообраз любого элемента непуст, то есть $(\forall y \in B)(\lambda^{-1}(y) \neq \varnothing)$. И наконец, отображение называется ***взаимно-однозначным*** или ***биективным***, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Совокупность образов всех элементов при отображении λ называется образом отображения λ и обозначается $\lambda(A)$, $\lambda(A) \subseteq B$.

Приведем две теоремы об отображениях.

ТЕОРЕМА 1.1

Отображение $\lambda \subseteq A \times B$ взаимнооднозначно тогда и только тогда, когда выполнены равенства: $\cdot \lambda \circ \lambda^{-1} = i_A; \lambda^{-1} \circ \lambda = i_B$.

ТЕОРЕМА 1.2

Для того чтобы дизъюнкция $\lambda \cup \gamma$ (или конъюнкция $\lambda \cap \gamma$) двух отображений была отображением, необходимо и достаточно, чтобы эти отображения совпадали, то есть $\lambda = \gamma$.

Доказательство этих несложных теорем предоставляется читателю в качестве полезного упражнения.■

Аналогично рассмотренному выше понятию отображения множества A в множество B можно рассмотреть следующее понятие n-арного отображения одного множества в другое для всякого положительного натурального числа n (то есть для $n \in N = \{1, 2, ...\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7

***n*-арным отображением** *множества A в множество B называется (обычное) отображение из A^n в B.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8

n-арной операцией *на множестве A называется n-арное отображение из A в A.*

Например, сложение и умножение натуральных чисел – это бинарные операции на множестве Z натуральных чисел. Определения n-арного отображения и n-арной операции даны для любого натурального числа n. Этим понятиям можно придать естественный смысл и ***для n равного нулю: нуль-арным отображением*** из A в B будем называть просто фиксацию некоторого элемента в множестве B. Аналогично, ***нуль-арной операцией*** на множестве A будем называть выбор (фиксацию) некоторого элемента в множестве A (или сам некоторый фиксированный элемент множества A).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9

n-арным предикатом *на множестве A называется n-арное отображение из множества A в так называемое* ***множество модальностей*** *(или степеней истинности) М, которое всюду ниже будет полагаться двухэлементным: М = {И, Л} – множество модальностей классической логики (И-истина, Л-ложь). Здесь, как и выше, $n \in N = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.*

Предикат обычно задают с помощью какой-либо логической формы или с помощью задания подмножества его истинности. Например, предикат $P(x) = \langle x$ – целое число$\rangle$ на множестве всех вещественных чисел – унарный предикат. Его множество истинности – множество всех целых чисел. Предикат "$\geq$ " на множестве всех вещественных чисел, или $Q(x, y) = \langle x \geq y \rangle$ – бинарный предикат. Естественным образом всякий n-арный предикат P определяет n-арное отношение λ_P на A: $\lambda_P = P^{-1}$(И). Понятно, что и всякое данное n-арное отношение определяет предикат той же -арности.

1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

Пусть α – некоторое n-арное отношение на множестве A, $\alpha \in A^n$.Отметим три основных способа задания такого отношения.

1. ***Перечисление элементов прямого произведения***, то есть упо-