

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

**В.Н. Шинкин**

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ для металлургов**

**Учебник**

Допущено учебно-методическим объединением  
по образованию в области металлургии в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по направлению 150400 – Металлургия

Москва 2013

УДК 539.3/6  
Ш62

Рецензент

д-р техн. наук, проф. *Б.А. Романцев* (зав. кафедрой технологии и оборудования  
трубного производства НИТУ «МИСиС»)

**Шинкин В.Н.**

Ш62 Соппротивление материалов для металлургов: учеб. /  
В.Н. Шинкин. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2013. – 655 с.  
ISBN 978-5-87623-730-9

В учебнике рассмотрены основные теоретические и практические вопросы сопротивления материалов металлоконструкций по следующим темам: основные положения статики и сопротивления материалов, центральное растяжение и сжатие, геометрические характеристики плоских сечений, кручение, прямой изгиб, сдвиг и смятие, напряженно-деформируемое состояние в точке, теории прочности, сложное сопротивление, задача Ламэ о равновесии толстостенной трубы, энергетические методы вычисления перемещений и метод сил вычисления перемещений в статически неопределимых системах.

Приведены многочисленные примеры расчета на устойчивость стержневых элементов металлоконструкций, на прочность при циклически изменяющихся напряжениях и ударных нагрузках элементов металлоконструкций, изучение которых формирует у студентов базисные навыки, необходимые для выполнения расчетов деталей и узлов металлургических машин и оборудования.

Все темы изложены с учетом специфики металлургических процессов. Например, рассмотрены основы математического моделирования процессов производства труб большого диаметра по технологии немецкой фирмы SMS MEER, процессов правки листа на многороликовых листопрямильных машинах линии испанской фирмы Fagor Agrasate для производства листа и штрипса из горячекатаного стального рулона и процессов разрушения труб большого диаметра магистральных газонефтепроводов при дефектах раскатной пригар, риска, несплавление сварного соединения и т.д.

В приложении приведен сокращенный сортамент прокатной стали.

Для студентов, обучающихся по направлению 150400 «Металлургия».

УДК 539.3/6

ISBN 978-5-87623-730-9

© В.Н. Шинкин, 2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	11
<b>1. Основные понятия статики</b> .....	14
1.1. Необходимые и достаточные условия равновесия системы сил.....	14
1.2. Примеры решения задач статики .....	18
1.3. Домашнее задание «Статика».....	24
Вопросы для самоконтроля по статике .....	34
<b>2. Основные положения сопротивления материалов</b> .....	35
2.1. Допущения и гипотезы.....	35
2.2. Метод сечений .....	37
2.3. Напряжения и деформации.....	37
<b>3. Геометрические характеристики плоских сечений</b> .....	40
3.1. Статические моменты и моменты инерции сечения .....	40
3.2. Теорема Штейнера о параллельном переносе осей.....	41
3.3. Изменение моментов инерции при повороте осей .....	43
3.4. Моменты инерции простых сечений .....	45
3.5. Примеры расчета моментов инерции плоских сечений.....	52
3.6. Домашнее задание «Геометрические характеристики плоских сечений».....	61
<b>4. Центральное растяжение и сжатие</b> .....	68
4.1. Закон Гука .....	68
4.2. Статически неопределимые системы .....	71
4.3. Механические свойства материалов .....	75
4.4. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии ....	78
4.5. Домашнее задание «Центральное растяжение и сжатие бруса».....	95
<b>5. Сдвиг и смятие</b> .....	102
5.1. Сдвиг.....	102
5.2. Смятие.....	103
<b>6. Кручение</b> .....	105
6.1. Напряжения и угловые деформации при кручении.....	105
6.2. Полярные моменты сопротивления простых сечений .....	107
6.3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении .....	108
<b>7. Прямой изгиб</b> .....	119
7.1. Нейтральный слой при изгибе.....	119
7.2. Дифференциальные зависимости при изгибе .....	121

7.3. Нормальные напряжения при изгибе.....	121
7.4. Моменты сопротивления простых сечений .....	123
7.5. Расчеты на прочность при изгибе .....	124
7.6. Касательные напряжения при прямом изгибе .....	124
7.7. Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе .....	129
7.8. Расчет на жесткость при изгибе .....	130
7.9. Домашнее задание «Прямой изгиб балки» .....	146
<b>8. Напряженно-деформированное состояние в точке</b> .....	153
8.1. Тензор напряжений .....	153
8.2. Главные площадки и главные напряжения .....	155
8.3. Виды напряженного состояния .....	157
8.4. Обобщенный закон Гука.....	164
<b>9. Теории прочности</b> .....	167
<b>10. Сложное сопротивление</b> .....	170
10.1. Косой изгиб .....	170
10.2. Изгиб с растяжением (сжатием).....	172
10.3. Внецентренное растяжение (сжатие).....	174
10.4. Кручение с изгибом.....	182
10.5. Домашнее задание «Кручение с изгибом» .....	189
<b>11. Энергетические методы вычисления перемещений</b> .....	196
11.1. Интеграл Мора.....	196
11.2. Правило Верещагина.....	198
11.3. Площади и центры тяжести простейших фигур .....	201
<b>12. Канонические уравнения метода сил для статически неопределимых систем</b> .....	208
12.1. Степень статической неопределимости системы и эквивалентные системы .....	208
12.2. Канонические уравнения метода сил для один раз статически неопределимой системы.....	209
12.3. Канонические уравнения метода сил для два раза статически неопределимой системы.....	211
12.4. Канонические уравнения метода сил для три раза статически неопределимой системы.....	213
12.5. Примеры решения статически неопределимых систем с помощью канонических уравнений метода сил .....	216
<b>13. Толстостенный цилиндр под действием внутреннего и внешнего давлений (задача Ламе)</b> .....	222
13.1. Уравнения равновесия .....	222
13.2. Решение в напряжениях.....	226

13.3. Цилиндр нагружен только внутренним давлением.....	227
13.4. Цилиндр нагружен только внешним давлением.....	228
13.5. Решение в перемещениях.....	229
13.6. Пластическое состояние толстостенной трубы.....	230
13.7. Упругопластическое состояние толстостенной трубы.....	231
13.8. Примеры расчета толстостенных цилиндров.....	232
13.9. Домашнее задание «Расчет толстостенных цилиндров под действием внутреннего и внешнего давлений».....	243
<b>14. Тонкостенные осесимметричные оболочки</b> .....	<b>246</b>
14.1. Уравнение Лапласа.....	246
14.2. Осевая равнодействующая внешних сил.....	248
14.3. Примеры расчета цилиндрических тонкостенных сосудов.....	250
14.4. Примеры расчета конических тонкостенных сосудов.....	260
14.5. Примеры расчета сферических тонкостенных сосудов.....	269
14.6. Примеры расчета тонкостенных сосудов, имеющих комбинированную геометрическую конфигурацию.....	272
14.7. Домашнее задание «Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек».....	280
<b>15. Упругопластический изгиб бруса</b> .....	<b>286</b>
15.1. Графоаналитический способ построения напряжений.....	286
15.2. Упругопластический изгиб бруса прямоугольного сечения.....	288
<b>16. Прочность при ударных нагрузках без учета массы упругой системы</b> .....	<b>298</b>
16.1. Общий метод приближенного вычисления напряжений при ударе.....	298
16.2. Центральный продольный удар по брусу постоянного сечения.....	302
16.3. Центральный продольный удар по ступенчатому стержню.....	306
16.4. Вертикальный удар вследствие внезапной остановки движения.....	310
16.5. Продольный внецентренный удар.....	312
16.6. Продольный удар стержня об абсолютно жесткую плиту ..	318
16.7. Поперечный удар.....	320
16.8. Скручивающий удар.....	324
16.9. Домашнее задание «Расчет на прочность балки при ударе».....	327

<b>17. Удар с учетом массы упругой системы</b> .....	330
17.1. Понятие о приведенной массе упругой системы. Коэффициент приведения массы к точке удара .....	330
17.2. Примеры вычисления коэффициента приведения массы к точке удара .....	332
17.3. Общий метод определения динамического коэффициента при ударе с учетом массы упругой системы .....	336
<b>18. Основы теории устойчивости сжатых стержней</b> .....	341
18.1. Общее понятие об устойчивости сжатых стержней .....	341
18.2. Формула Эйлера .....	342
18.3. Влияние способа закрепления концов стержня на критическую силу .....	344
18.4. Условие применимости формулы Эйлера .....	345
18.5. Формула Ясинского и условие ее применимости .....	346
18.6. Методика расчетов сжатых стержней на устойчивость .....	348
18.7. Проверочные расчеты сжатых стержней на устойчивость ..	351
18.8. Определение допускаемой нагрузки .....	352
18.9. Проектные расчеты сжатых стержней .....	356
18.10. Влияние нагрева на устойчивость стержня .....	360
18.11. Расчет на устойчивость стержней с участками разной жесткости .....	361
18.12. Расчет на устойчивость стержня, нагруженного продольной силой, приложенной посередине .....	363
18.13. Расчет на устойчивость стержня, нагруженного продольной силой через абсолютно жесткий шатун .....	365
18.14. Влияние малой начальной кривизны на прогиб сжатого стержня .....	367
18.15. Расчет стержня под действием эксцентрично приложенной силы .....	369
18.16. Домашнее задание «Проектный расчет на устойчивость сжатых стержней» .....	371
18.17. Домашнее задание «Определение критической силы сжатого стержня» .....	372
<b>19. Устойчивость элементов стержневых систем</b> .....	380
19.1. Устойчивость стержней на основе расчета систем сходящихся сил .....	380
19.2. Устойчивость стержневых элементов статически определимых плоских ферм .....	390
19.3. Устойчивость стержней на основе расчета произвольной пространственной системы сил .....	407

19.4. Учет монтажных напряжений при расчете стержневых систем на устойчивость.....	411
19.5. Влияние нагрева на устойчивость элементов стержневой системы.....	414
19.6. Домашнее задание «Расчет на устойчивость стержней статически определимых плоских ферм».....	417
19.7. Домашнее задание «Расчет на устойчивость статически неопределимых стержневых систем при наличии монтажных напряжений» .....	425
<b>20. Продольно-поперечный изгиб.....</b>	<b>432</b>
20.1. Дифференциальные уравнения при продольно-поперечном изгибе .....	432
20.2. Расчеты сжатого стержня под действием одной поперечной силы.....	434
20.3. Расчеты сжатого стержня под действием системы поперечных сил.....	438
20.4. Расчеты сжатого стержня под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки .....	441
20.5. Приближенные расчеты при продольно-поперечном изгибе .....	442
20.6. Расчеты на прочность при продольно-поперечном изгибе ...	446
20.7. Домашнее задание «Продольно-поперечный изгиб бруса».....	450
<b>21. Энергетический метод решения задач устойчивости.....</b>	<b>457</b>
21.1. Полная энергия упругой системы .....	457
21.2. Критерий устойчивости в энергетическом методе.....	459
21.3. Метод Ритца для приближенного определения критической силы .....	459
21.4. Частные случаи применения метода Ритца.....	460
21.5. Примеры определения критической силы с помощью метода Ритца .....	463
21.6. Домашнее задание «Энергетический метод решения задач устойчивости стержней».....	466
<b>22. Устойчивость равномерно сжатых кругового кольца и арки .....</b>	<b>469</b>
22.1. Устойчивость равномерно сжатого кругового кольца.....	469
22.2. Устойчивость равномерно сжатой круговой арки, шарнирно закрепленной по концам .....	473
22.3. Домашнее задание «Устойчивость круговых арок».....	476

<b>23. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях ..</b>	<b>479</b>
23.1. Общее понятие об усталости материалов .....	479
23.2. Зарождение многоциклового усталостного трещины и характер ее распространения. Основные признаки многоциклового усталостного излома.....	482
23.3. Цикл напряжений и его характеристики .....	484
23.4. Классификация циклов напряжений.....	485
23.5. Испытания на усталость при симметричном цикле напряжений в условиях чистого изгиба. Кривая усталости (кривая Вёлера).....	487
23.6. Три типа кривых усталости и их аналитическое описание ...	490
23.7. Справочные данные о пределах выносливости и эмпирические формулы для их определения.....	496
23.8. Испытания в условиях асимметричных циклов. Диаграмма предельных напряжений (диаграмма Смита) .....	498
23.9. Диаграмма предельных амплитуд напряжений (диаграмма Хэя).....	502
23.10. Способы схематизации диаграммы предельных амплитуд напряжений .....	505
<b>24. Факторы, влияющие на предел выносливости при циклически изменяющихся напряжениях.....</b>	<b>509</b>
24.1. Коэффициент снижения предела выносливости .....	509
24.2. Влияние закона и частоты изменения напряжений на усталостную прочность.....	510
24.3. Влияние концентрации напряжений на предел выносливости .....	511
24.4. Влияние масштабного эффекта на предел выносливости ...	526
24.5. Совместное влияние концентрации напряжений и масштабного фактора.....	528
24.6. Влияние качества обработки поверхности на предел выносливости .....	535
24.7. Влияние коррозии на предел выносливости .....	537
24.8. Влияние поверхностного упрочнения деталей на предел выносливости .....	540
24.9. Влияние коэффициента анизотропии на предел выносливости .....	542
24.10. Коэффициент запаса усталостной прочности при симметричном цикле напряжений.....	542

24.11. Коэффициент запаса усталостной прочности при асимметричном цикле напряжений .....	543
24.12. Коэффициент запаса усталостной прочности при двухосном напряженном состоянии .....	546
<b>25. Расчет на прочность при циклически изменяющихся напряжениях .....</b>	<b>550</b>
25.1. Примеры расчетов на прочность при циклически изменяющихся напряжениях .....	550
25.2. Домашнее задание «Проверка элемента детали на усталостную прочность при переменном нагружении» .....	565
<b>26. Математические основы производства труб большого диаметра по технологии SMS MEER .....</b>	<b>574</b>
26.1. Отечественные магистральные газонефтепроводы .....	574
26.2. Формовка листовой заготовки на кромкогибочном прессе .....	576
26.3. Условие возникновения гофра продольной кромки листа при формовке заготовки на кромкогибочном прессе .....	579
26.4. Гибка плоской пластины на прессе пошаговой формовки .....	582
26.5. Гибка цилиндрической оболочки на прессе пошаговой формовки .....	585
26.6. Гибка изогнутой оболочки на прессе пошаговой формовки .....	589
26.7. Критерий перегиба в обратную сторону свободной части листовой заготовки на трубоформовочном прессе SMS MEER .....	593
26.8. Моделирование процесса экспандирования труб большого диаметра по технологии SMS MEER .....	599
26.9. Моделирование процесса гидроиспытания труб большого диаметра по технологии SMS MEER .....	602
26.10. Расчет максимальных напряжений в стенке трубы при экспандировании с учетом остаточных напряжений заготовки после трубоформовочного пресса SMS MEER .....	610
<b>27. Математические основы правки листа на многороликовой листопрямительной машине линии Fagor Arrasate .....</b>	<b>616</b>
27.1. Виды стали для производства стальных листов .....	616
27.2. Горячекатаный и холоднокатаный стальной лист .....	617
27.3. Многороликовые листопрямительные машины .....	618
27.4. Процесс производства листа из горячекатанного рулона на линии поперечной резки Fagor Arrasate .....	620

27.5. Правка листа на пятироликовой листоправильной машине Fagor Arrasate.....	622
27.6. Правка стального листа на четырехроликовой листоправильной машине.....	629
27.7. Гибка стального листа на трехроликовой гибочной машине.....	631
27.8. Расчет остаточных деформаций бруса при малоцикловых знакопеременных напряжениях.....	634
<b>28. Разрушение магистральных труб большого диаметра при дефектах.....</b>	<b>637</b>
28.1. Статистика и причины аварий газонефтепроводов.....	637
28.2. Рекомендации по снижению числа отказов на газонефтепроводах.....	638
28.3. Критерий разрушения труб большого диаметра при несплавлении сварного соединения и внутреннем давлении.....	639
28.4. Критерий разрыва труб газонефтепроводов при дефекте «раскатной пригар с риской».....	643
28.5. Критерий разрыва трубы при внутреннем давлении и дефекте «риска» на поверхности трубы.....	648
<b>Библиографический список.....</b>	<b>650</b>
<b>Приложение.....</b>	<b>652</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник предназначен для студентов металлургических специальностей вузов. Теоретический материал написан достаточно сжато, что соответствует практике его изложения в аудиторных условиях. Все используемые формулы и теоремы строго математически обоснованы. Приведен сокращенный сортамент прокатной стали, необходимый для выполнения расчетно-графических работ, и обширный список учебной литературы, носящий справочный характер. Учебник должен помочь студентам в их самостоятельной работе при решении задач и подготовке к экзаменам и зачетам.

Начало развития сопротивления материалов как науки относят к 1638 г. и связывают с именем *Галилео Галилея*, знаменитого итальянского ученого. Галилей был профессором математики в Падуде. Он жил в период разложения феодального строя, развития торгового капитала, международных морских сношений и зарождения горной и металлургической промышленности.

Экономика того времени поставила на очередь решение ряда новых технических проблем. Оживление внешних торговых сношений вызвало необходимость увеличения тоннажа судов, а это повлекло за собой изменение их конструкции; одновременно стал вопрос о реконструкции и создании новых внутренних водных путей сообщения, включая устройство каналов и шлюзов. Эти технические задачи не могли быть решены простым копированием существовавших раньше конструкций судов и сооружений. Возникла необходимость в аналитических расчетах по оценке прочности элементов конструкции в зависимости от их размеров и величины действующих на них нагрузок.

Значительная часть работ Галилея была посвящена решению задач о зависимости между размерами балок и стержней и теми нагрузками, которые могут выдержать эти элементы конструкции. Он указал, что полученные им результаты могут «принести большую пользу при постройке крупных судов, в особенности при укреплении палуб и покрытий, так как в сооружениях этого рода легкость имеет огромное значение». Исследования Галилея опубликованы в его книге «*Discorsi e Dimostrazioni matematiche*» (1638, Лейден, Голландия).

Дальнейшее развитие сопротивления материалов шло параллельно с развитием техники строительства и машиностроения и связано с целым рядом работ выдающихся ученых-математиков, физиков и инженеров. Среди них значительное место занимают русские и советские ученые.

Большой вклад в науку о сопротивлении материалов внес в XVIII в. действительный член Петербургской Академии наук *Леонард Эйлер*, решивший задачу об устойчивости сжатых стержней.

В XIX в. мировую известность приобрели работы *Д.И. Журавского* и *Х.С. Головина*. В связи с проектированием и постройкой ряда мостов на строившейся Николаевской (ныне Октябрьской) железной дороге между Петербургом и Москвой Журавский решил ряд важных и интересных вопросов, связанных с прочностью балок при их изгибе. Головин впервые правильно решил задачу о прочности кривых стержней. В мировую науку прочно вошли работы *Ф.С. Ясинского* по вопросам устойчивости элементов конструкций, вызванные к жизни изучением причин разрушения некоторых мостов. Профессор *П.И. Собко* организовал крупнейшую лабораторию по испытанию материалов в Петербургском институте инженеров путей сообщения.

С начала XX в. роль русских ученых в науке о сопротивлении материалов стала ведущей. Профессор *И.Г. Бубнов* явился основоположником современной науки о прочности корабля. Академик *А.Н. Крылов*, помимо дальнейшего развития задач о расчете корабля, известен крупнейшими исследованиями в области динамических расчетов. Профессор *Н.П. Пузыревский* создал новую методику расчета балок на упругом основании.

Из многочисленных трудов академика *Б.Г. Галеркина* достаточно упомянуть работы по развитию вариационных методов механики, общему решению пространственной задачи теории упругости и расчету плит. Многих вопросов расчета на прочность касались и работы *С.П. Тимошенко*.

В советское время передовая роль России укрепилась еще в большей степени. Академик *А.Н. Динник* опубликовал ряд крупных работ по устойчивости элементов конструкций. Профессор *Н.М. Герсеванов* плодотворно работал в области механики грунтов – науки, решающей задачи прочности и устойчивости оснований и фундаментов сооружений и машин.

Профессора *П.Ф. Папкович* и *Ю.А. Шиманский* стали во главе школы ученых, занимающихся вопросами прочности кораблей. Про-

фессор ***Н.Н. Давиденков*** создал совместно со своими учениками новую теорию, объясняющую причины разрушения материалов. Большое значение имеют его труды по вопросам динамической прочности и разрушения при ударе. Усилиями наших инженеров разработана новая теория расчета железобетонных конструкций, которая более правильно, чем теории, принятые за границей, отражает действительный характер работы этих конструкций и при обеспеченной прочности дает значительную экономию размеров. Академик ***Н.И. Мухелишвили*** развил современные методы теории функций комплексного переменного и теории сингулярных интегральных уравнений и применил их к решению ряда задач на прочность. Профессор ***В.З. Власов*** создал новую оригинальную теорию расчета тонкостенных оболочек и тонких стержней, имеющих широкое применение в различных конструкциях.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

## 1.1. Необходимые и достаточные условия равновесия системы сил

**Сила** есть мера механического взаимодействия твердых тел, в результате которого тела могут приобретать ускорения или деформироваться. Сила есть векторная величина и характеризуется модулем, точкой приложения и направлением (линией действия силы) (рис. 1.1).

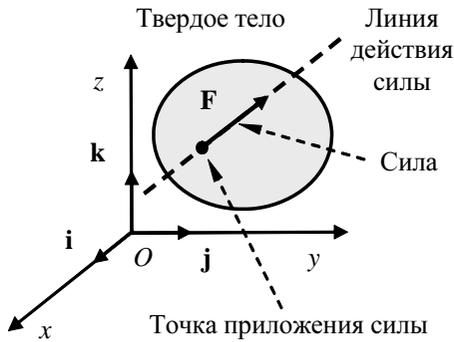


Рис. 1.1

Пусть  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z)$ ,  $[\mathbf{F}] = \text{Н}$  (ньютон),  
 $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  – модуль силы;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные орты,  
 $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ .

**Главным вектором** системы сил  $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n\}$  называется их геометрическая сумма (рис. 1.2)

$$\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{F}_O = (F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz}), \mathbf{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), F_{Ox} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, F_{Oy} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, F_{Oz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

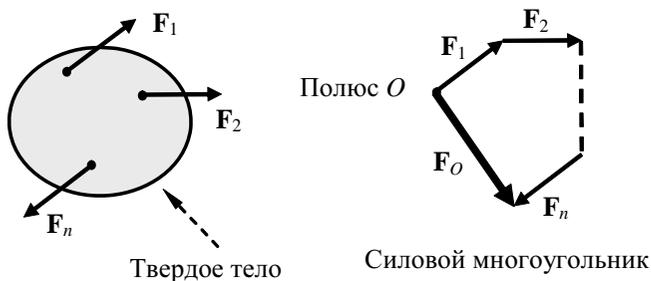


Рис. 1.2

Главный вектор не зависит от выбора полюса (точки).

**Моментом силы относительно точки** называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x) = (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}),$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – радиус-вектор точки приложения силы;

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  – вектор силы;  $M_{Ox} = yF_z - zF_y$ ,  $M_{Oy} = zF_x - xF_z$

и  $M_{Oz} = xF_y - yF_x$  – **моменты силы относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$**  (рис. 1.3).

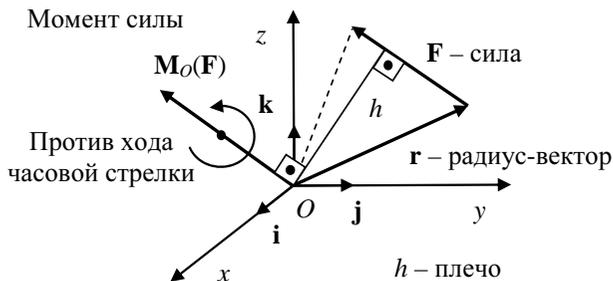


Рис. 1.3

Момент силы  $\mathbf{M}_O$  перпендикулярен радиусу-вектору  $\mathbf{r}$  и вектору силы  $\mathbf{F}$ . Действительно, скалярные произведения

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O \bullet \mathbf{r} &= M_O r \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = \\ &= (yF_z - zF_y)x + (zF_x - xF_z)y + (xF_y - yF_x)z = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O \bullet \mathbf{F} &= M_O F \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = \\ &= (yF_z - zF_y)F_x + (zF_x - xF_z)F_y + (xF_y - yF_x)F_z = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = 0$  и  $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = 0$ . Поэтому  $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = 90^\circ$ ,  $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = 90^\circ$ .

Плоскостью действия момента  $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  называется плоскость, образованная радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и вектором силы  $\mathbf{F}$ . Момент силы перпендикулярен его плоскости действия.

Положительным направлением момента силы считается направление, откуда «поворот» силы виден происходящим против хода часовой стрелки. В механике *плечом* называется кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы. По абсолютной величине момент силы относительно точки равен произведению «силы на плечо»:

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F}) = F(r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})) = Fh.$$

Для определения направления момента силы удобно пользоваться «правилом правой руки» (рис. 1.4).

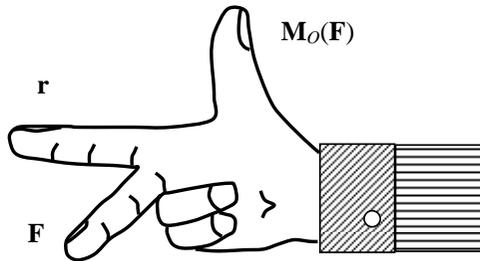


Рис. 1.4

**Главным моментом системы сил** относительно выбранной точки называется геометрическая сумма моментов всех сил относительно этой точки

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i .$$

Главный момент системы сил зависит от выбора полюса. Действительно, относительно произвольных точек  $A$  и  $B$  он равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{BA} + \mathbf{r}_{Ai}) \times \mathbf{F}_i = \\ &= \mathbf{BA} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A , \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A .$$

Откуда следует, что если главный вектор и главный момент системы сил одновременно равны нулю относительно одной точки, то они равны нулю относительно любой другой точки.

**Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил** является равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил:

$$\mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{F}_O = 0 .$$

Эти два векторных равенства эквивалентны шести скалярным равенствам

$$F_{Ox} = 0, \quad F_{Oy} = 0, \quad F_{Oz} = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0 .$$

**Парой сил** называется совокупность двух сил  $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ , равных по модулю и противоположных по направлению.

**Плоскостью действия момента пары сил** называется плоскость действия сил пары сил.

Главный вектор пары сил равен нулю, а момент пары сил не зависит от выбора полюса.

Действительно,

$$\mathbf{F}_O = \mathbf{F} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_A .$$

Основные опоры и их опорные реакции показаны на рис. 1.5.

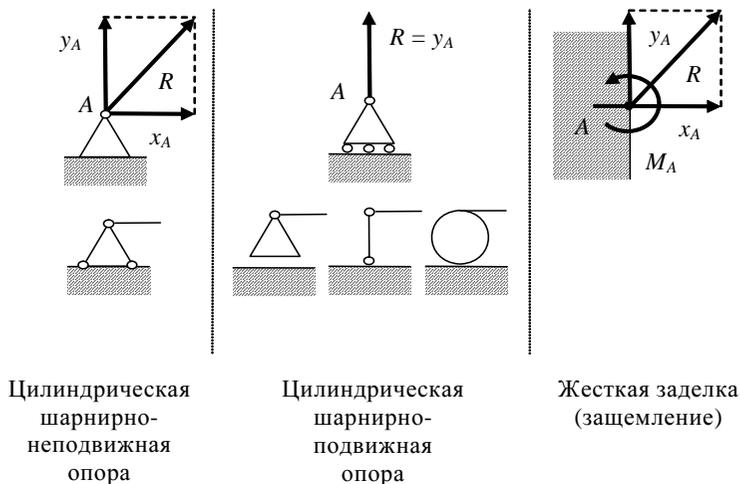


Рис. 1.5

## 1.2. Примеры решения задач статики

**Пример 1.1.** Найти реакции опор балки (рис. 1.6).

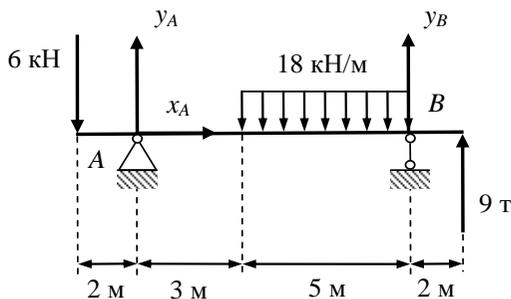


Рис. 1.6

*Решение.* Заменяем действие равномерно распределенной нагрузки силой  $Q = 18 \cdot 5 = 90$  кН, приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной вертикально вниз. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: x_A = 0, \quad \sum_i F_i(y) = 0: -6 + y_A - Q + y_B + 9 = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: 6 \cdot 2 - Q \cdot 5,5 + y_B \cdot 8 + 9 \cdot 10 = 0.$$

Откуда получаем

$$y_A = 37,875 \text{ кН}, \quad y_B = 49,125 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} M_{BZ} = 0: & 6 \cdot 10 - y_A \cdot 8 + Q \cdot 2,5 + 9 \cdot 2 = \\ & = 60 - 37,875 \cdot 8 + 90 \cdot 2,5 + 18 = 0. \end{aligned}$$

Ответ:  $x_A = 0$  кН,  $y_A = 37,875$  кН,  $y_B = 49,125$  кН.

**Пример 1.2.** Найти реакции опор рамы (рис. 1.7). Дано:  $G = 20$  кН,  $P = 10$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $a = 2$  м,  $\alpha = 45^\circ$ .

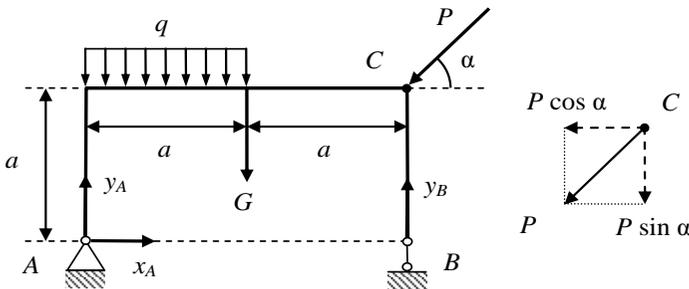


Рис. 1.7

*Решение.* Заменяем действие равномерно распределенной нагрузки  $q$  силой  $Q = q \cdot a = 4$  кН, приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной вертикально вниз. Разложим силу  $P$  на две составляющие, направленные по вертикали и горизонтали. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A - P \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad y_A - Q - G - P \sin \alpha + y_B = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: \quad -Q \cdot \frac{a}{2} - G \cdot a + P \cos \alpha \cdot a - P \sin \alpha \cdot 2a + y_B \cdot 2a = 0.$$

Откуда получаем

$$x_A = 7,071 \text{ кН}, \quad y_A = 16,536 \text{ кН},$$

$$y_B = 14,536 \text{ кН}, \quad R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 17,984 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$M_{BZ} = 0: \quad -y_A \cdot 2a + Q \cdot \frac{3a}{2} + G \cdot a + P \cos \alpha \cdot a =$$

$$= -16,536 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 0,707 \cdot 2 = -0,004 \approx 0.$$

Ответ:  $x_A = 7,071 \text{ кН}$ ,  $y_A = 16,536 \text{ кН}$ ,  $y_B = 14,536 \text{ кН}$ ,  $R_A = 17,984 \text{ кН}$ .

**Пример 1.3.** Найти реакции опор (рис. 1.8). Дано:  $G = 5 \text{ кН}$ ,  $P = 4 \text{ кН}$ ,  $q = 2,5 \text{ кН/м}$ ,  $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

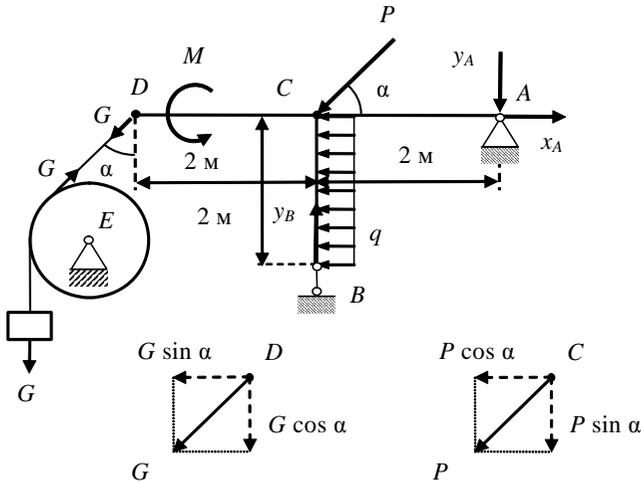


Рис. 1.8

*Решение.* Заменяем действие равномерно распределенной нагрузки  $q$  силой  $Q = q \cdot 2 = 5 \text{ кН}$ , приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной горизонтально справа налево. Так как блок  $E$  не вращается, то натяжение веревок сверху и снизу блока одинаковы (в противном случае, суммарный момент от натяжения веревок относительно центра блока  $E$  был бы отличен от нуля и блок начал бы вращаться). Разложим силы  $G$  и  $P$  на две составляющие,

направленные по вертикали и горизонтали. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил, действующие на твердое тело  $DCAB$ , равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A - P \cos \alpha - Q - G \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad -y_A - P \sin \alpha + y_B - G \cos \alpha = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: \quad P \sin \alpha \cdot 2 - Q \cdot 1 - y_B \cdot 2 + M + G \cos \alpha \cdot 4 = 0.$$

Откуда получаем

$$x_A = 11,364 \text{ кН}, \quad y_A = 5,035 \text{ кН},$$

$$y_B = 11,399 \text{ кН}, \quad R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 12,429 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$M_{BZ} = 0: \quad -x_A \cdot 2 - y_A \cdot 2 + P \cos \alpha \cdot 2 + Q \cdot 1 + M + G \cos \alpha \cdot 2 + G \sin \alpha \cdot 2 = \\ = -11,364 \cdot 2 - 5,035 \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 1 + 8 + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 0,001 \approx 0.$$

Ответ:  $x_A = 11,364 \text{ кН}$ ,  $y_A = 5,035 \text{ кН}$ ,  $y_B = 11,399 \text{ кН}$ ,  $R_A = 12,429 \text{ кН}$ .

**Пример 1.4.** Найти реакции опор рамки (рис. 1.9). Дано:  $a = 0,6 \text{ м}$ ,  $b = 0,4 \text{ м}$ ,  $c = 0,3 \text{ м}$ ,  $G = 2 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

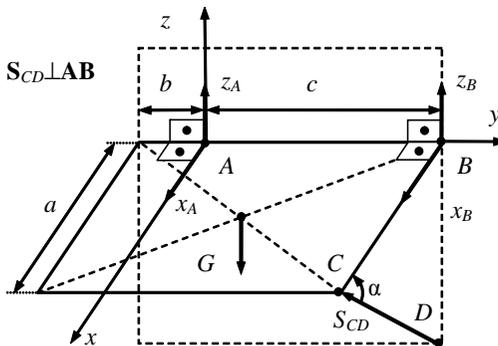


Рис. 1.9

*Решение.* Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A + x_B + S_{CD} \cdot \cos \alpha = 0; \quad \sum_i F_i(y) = 0: \quad y_A + y_B = 0;$$

$$\sum_i F_i(z) = 0: \quad z_A + z_B - G + S_{CD} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$M_{AX} = 0: \quad -G \cdot \left( \frac{c-b}{2} \right) + S_{CD} \cdot \sin \alpha \cdot c + z_B \cdot c = 0;$$

$$M_{AY} = 0: \quad G \cdot \left( \frac{a}{2} \right) - S_{CD} \cdot \sin \alpha \cdot a = 0;$$

$$M_{AZ} = 0: \quad -x_B \cdot c - S_{CD} \cdot \cos \alpha \cdot c = 0.$$

Так как опоры в точках  $A$  и  $B$  – петли, то

$$y_A = y_B = 0.$$

Из полученной системы линейных уравнений получаем

$$x_A = 0 \text{ кН}, \quad y_A = 0 \text{ кН}, \quad z_A = 2,333 \text{ кН};$$

$$x_B = -1 \text{ кН}, \quad y_B = 0 \text{ кН}, \quad z_B = -1,333 \text{ кН}; \quad S_{CD} = 1,414 \text{ кН};$$

$$R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} = 2,333 \text{ кН}; \quad R_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = 1,666 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$M_{BX} = 0: \quad -z_A \cdot c + G \cdot \left( \frac{c+b}{2} \right) = -2,333 \cdot 0,3 + 2 \cdot \frac{0,7}{2} = 0,001 \approx 0;$$

$$M_{BZ} = 0: \quad x_A \cdot c = 0; \quad 0 \cdot 0,3 = 0.$$

*Ответ:*  $S_{CD} = 1,414$  кН,  $R_A = 2,333$  кН,  $R_B = 1,666$  кН.

**Пример 1.5.** Найти методом вырезания узлов усилия  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  в шести стержнях шарнирно-стержневой конструкции (рис. 1.10). *Дано:*  $a = 3,5$  м,  $b = 5$  м,  $c = 4$  м,  $P = 2$  кН.

*Решение.* Не ограничивая общности, будем считать, что все стержни сжаты.

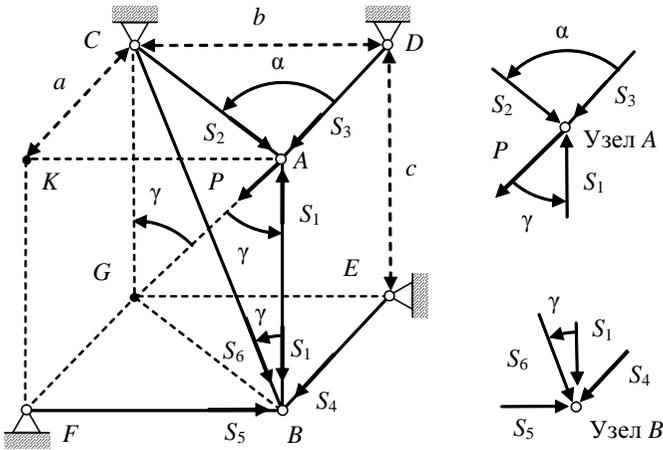


Рис. 1.10

Найдем косинусы и синусы углов  $\alpha$  и  $\gamma$ :

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2} = 6,103 \text{ м}, \quad AG = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7,297 \text{ м},$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{3,5}{6,103} = 0,573, \quad \sin \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{6,103} = 0,819,$$

$$\cos \gamma = \frac{CG}{AG} = \frac{4}{7,297} = 0,548, \quad \sin \gamma = \frac{AC}{AG} = \frac{6,103}{7,297} = 0,836.$$

*Узел А.* Спроектируем все силы в узле  $A$  на три взаимно перпендикулярных направления –  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{AK}$  и  $\mathbf{AD}$ :

$$S_1 - P \cos \gamma = 0, \quad S_2 \sin \alpha - P \sin \gamma \sin \alpha = 0,$$

$$S_3 + S_2 \cos \alpha - P \sin \gamma \cos \alpha = 0.$$

Откуда

$$S_1 = P \cos \gamma = 2 \cdot 0,548 = 1,096 \text{ кН}, \quad S_2 = P \sin \gamma = 2 \cdot 0,836 = 1,672 \text{ кН},$$

$$S_3 = -(S_2 - P \sin \gamma) \cos \alpha = 0 \cdot \cos \alpha = 0 \text{ кН}.$$

*Узел В.* Спроектируем все силы в узле  $B$  на три взаимно перпендикулярных направления –  $\mathbf{BE}$ ,  $\mathbf{BF}$  и  $\mathbf{BA}$ :

$$S_4 + S_6 \sin \gamma \cos \alpha = 0, \quad S_5 + S_6 \sin \gamma \sin \alpha = 0, \quad S_6 \cos \gamma + S_1 = 0.$$

Откуда

$$S_6 = -\frac{S_1}{\cos \gamma} = -\frac{P \cos \gamma}{\cos \gamma} = -P = -2 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_6 \sin \gamma \cos \alpha = 2 \cdot 0,836 \cdot 0,573 = 0,958 \text{ кН},$$

$$S_5 = -S_6 \sin \gamma \sin \alpha = 2 \cdot 0,836 \cdot 0,819 = 1,369 \text{ кН}.$$

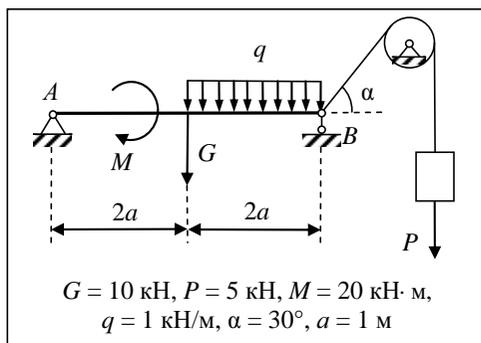
Так как  $S_6 < 0$ , то стержень  $CB$  – растянут.

Ответ:  $S_1 = 1,096 \text{ кН}$ ,  $S_2 = 1,672 \text{ кН}$ ,  $S_3 = 0 \text{ кН}$ ,  $S_4 = 0,958 \text{ кН}$ ,  
 $S_5 = 1,369 \text{ кН}$ ,  $S_6 = -2 \text{ кН}$ .

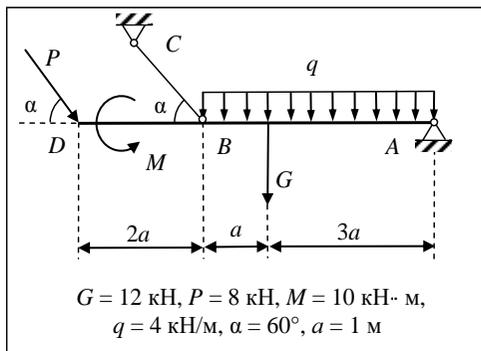
### 1.3. Домашнее задание «Статика»

Найти реакции опор балки.

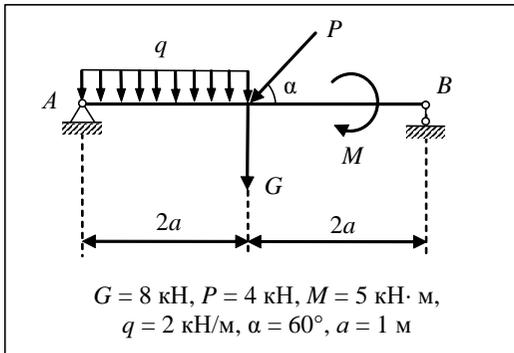
Вариант 1



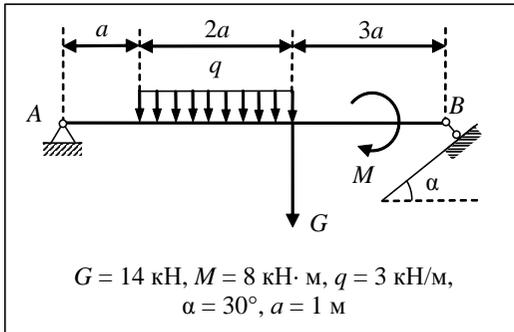
Вариант 2



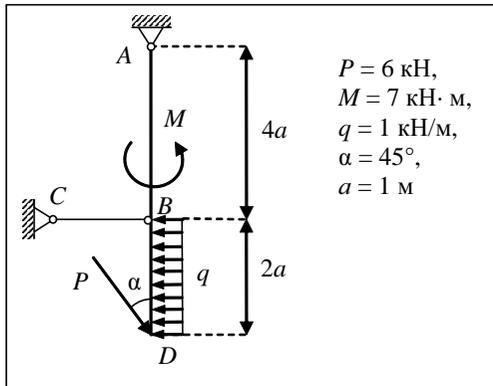
### Вариант 3



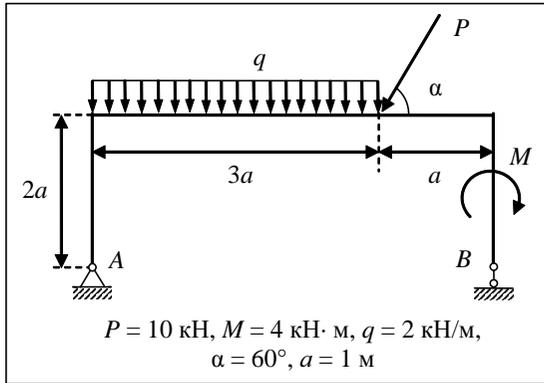
### Вариант 4



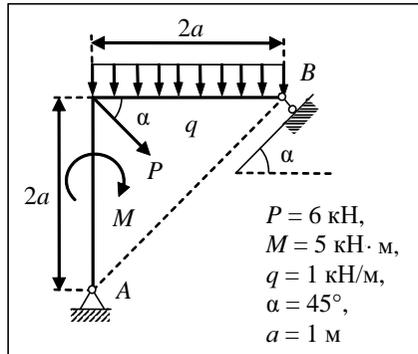
### Вариант 5



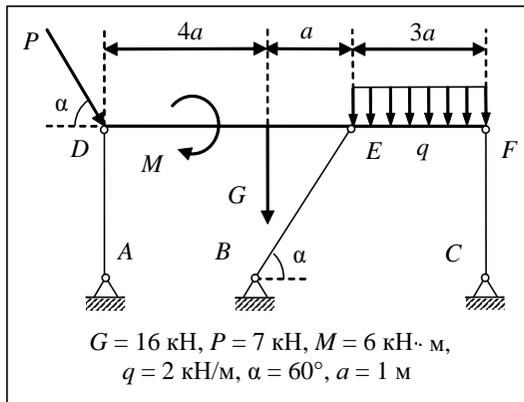
### Вариант 6



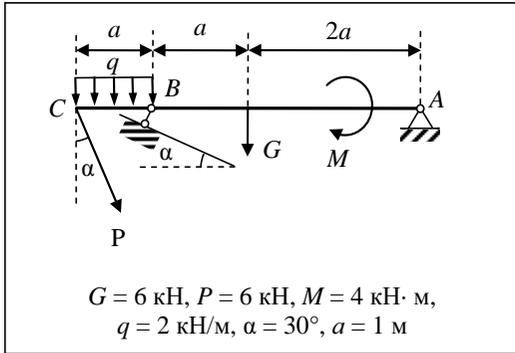
### Вариант 7



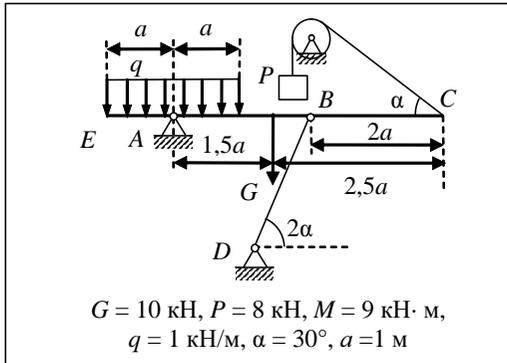
### Вариант 8



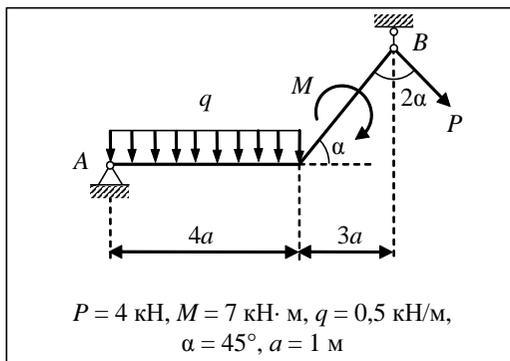
### Вариант 9



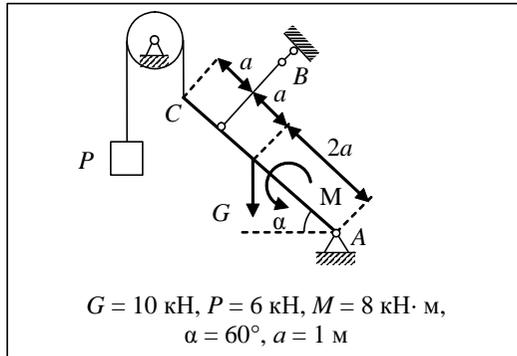
### Вариант 10



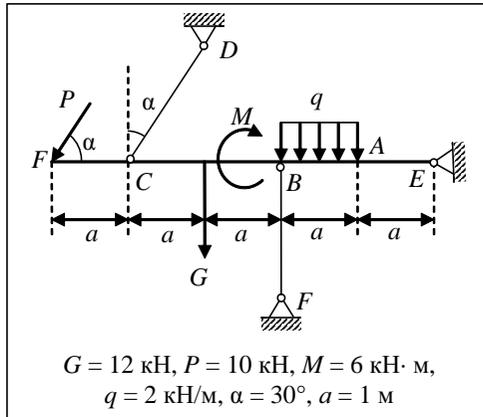
### Вариант 11



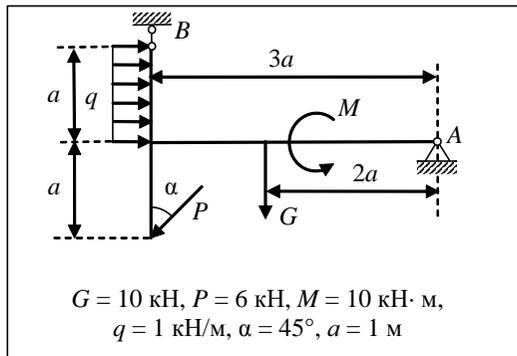
### Вариант 12



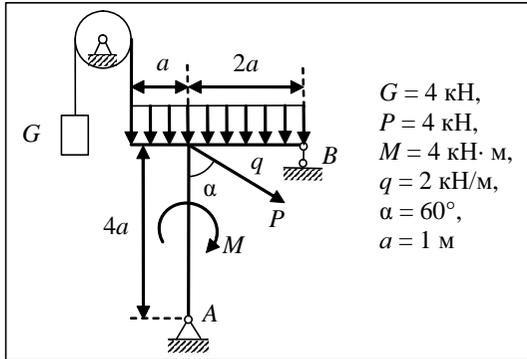
### Вариант 13



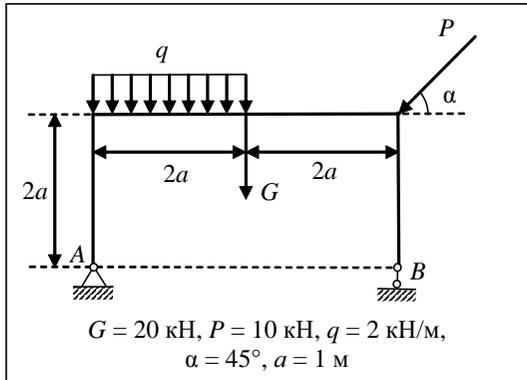
### Вариант 14



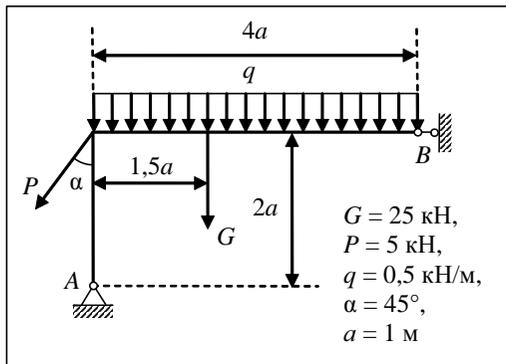
### Вариант 15



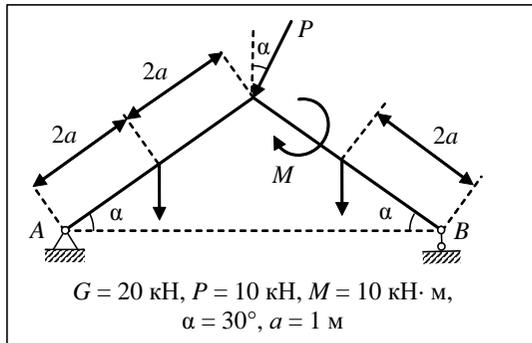
### Вариант 16



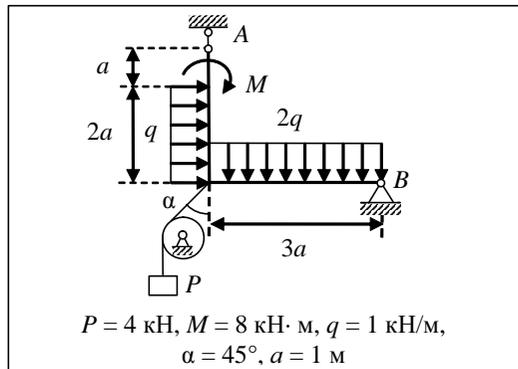
### Вариант 17



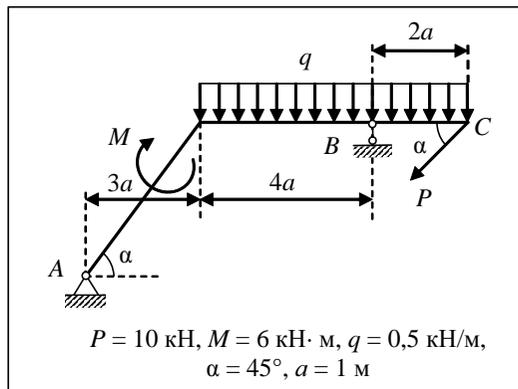
### Вариант 18



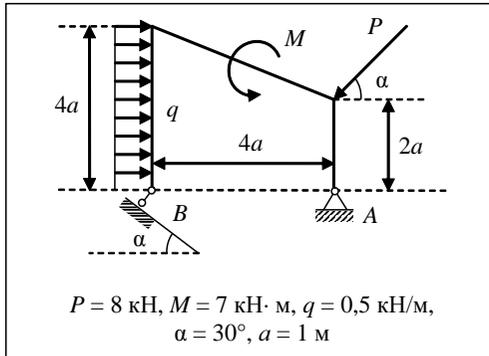
### Вариант 19



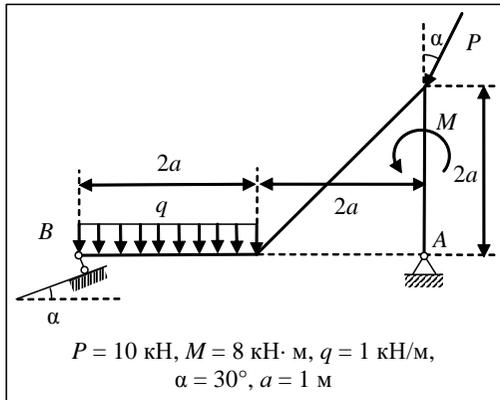
### Вариант 20



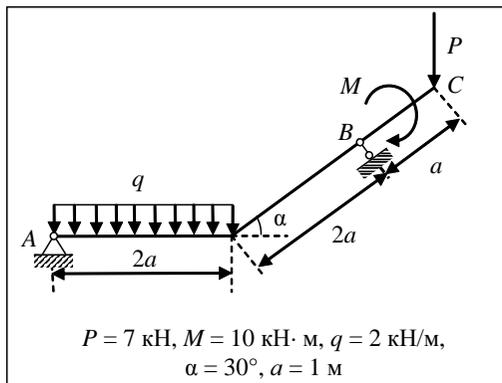
### Вариант 21



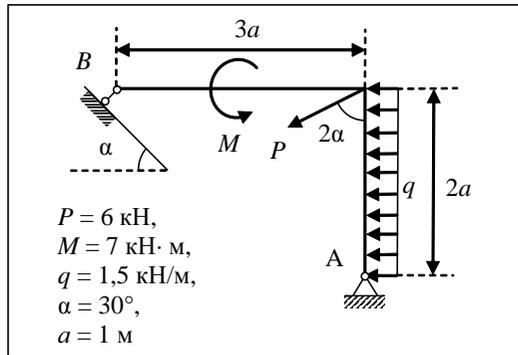
### Вариант 22



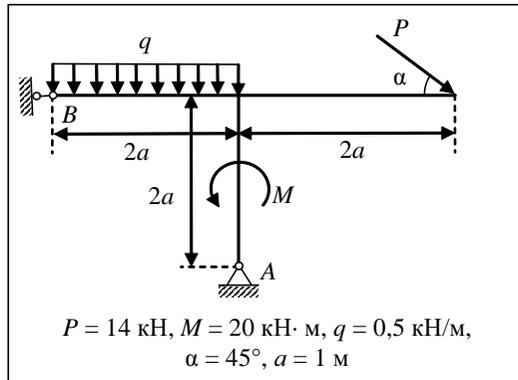
### Вариант 23



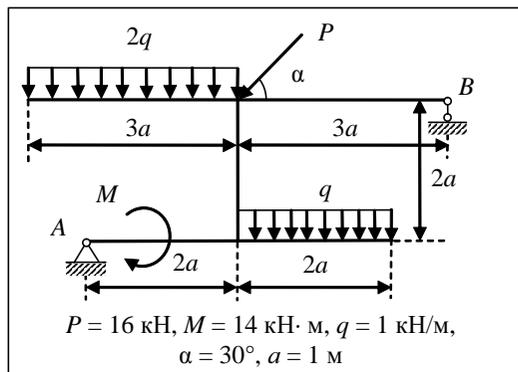
### Вариант 24



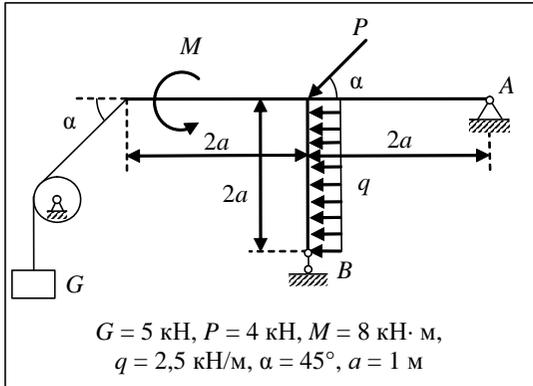
### Вариант 25



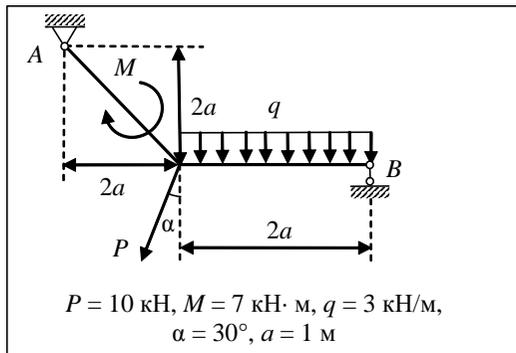
### Вариант 26



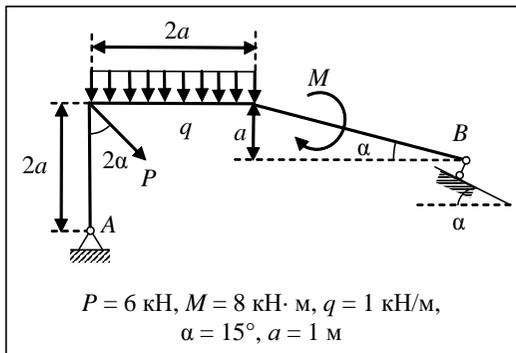
### Вариант 27



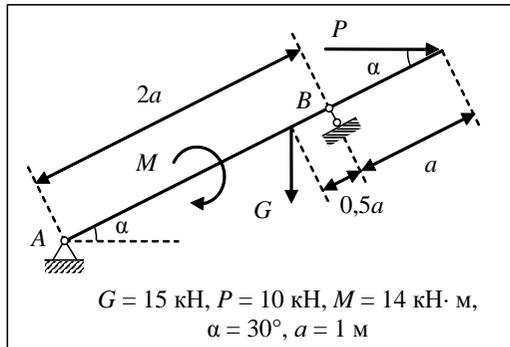
### Вариант 28



### Вариант 29



### Вариант 30



### Вопросы для самоконтроля по статике

1. Дайте определение силы и назовите ее три основных параметра.
2. Чему равны момент силы относительно точки и оси?
3. Как определяются главный вектор и главный момент системы сил?
4. Назовите необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

**Сопротивление материалов** – раздел механики деформируемого твердого тела, в котором рассматриваются методы расчета элементов машин и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

**Прочность** называется способность материала сопротивляться воздействию внешних сил, не разрушаясь и без появления остаточных деформаций. Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку, при наименьшей затрате материала.

**Жесткостью** называется способность тела сопротивляться образованию деформаций. Расчеты на жесткость гарантируют, что изменения формы и размеров тела не превзойдут допустимых норм.

**Устойчивостью** называется способность конструкций сопротивляться усилиям, стремящимся вывести их из состояния равновесия. Расчеты на устойчивость предотвращают внезапную потерю равновесия и искривление элементов конструкции.

### 2.1. Допущения и гипотезы

#### *Виды тел*

**Брусом** называется тело, длина которого значительно больше его поперечных размеров (рис. 2.1). Линия центров тяжести поперечных сечений бруса называется **осью бруса**. **Оболочкой** называется тело, длина и ширина которого значительно больше его толщины. Плоская оболочка называется **пластиной**. **Массивом** (массивным телом) называется тело, все три размера которого имеют один порядок.



Рис. 2.1

## Виды внешних нагрузок

По видам приложения внешние нагрузки делятся на *сосредоточенные* (размерность  $[F] = \text{Н}$ ) и *распределенные* (рис. 2.2). В свою очередь распределенные нагрузки делятся на *объемные* (силы тяжести, инерции, электромагнитные силы и так далее; размерность  $[\gamma] = \text{Н}/\text{м}^3$ ), *поверхностные* (давление воды, ветра и так далее; размерность  $[p] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$ , паскаль) и *линейные* (размерность  $[q] = \text{Н}/\text{м}$ ).

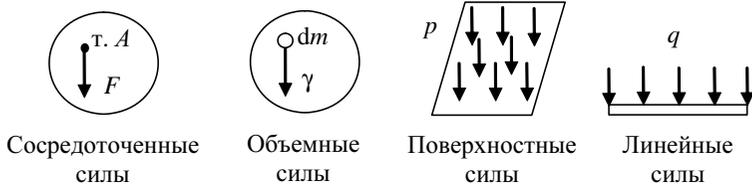


Рис. 2.2

По характеру действия внешние нагрузки делятся на *статические* и *динамические* (ударные, циклические и т.д.). Внешние нагрузки также делятся на *активные нагрузки* и *опорные реакции*, которые находят из уравнений равновесия статики.

### Допущения о свойствах материала

Материал считается сплошным, однородным, изотропным и идеально упругим.

**Сплошность** – материал считается непрерывным. **Однородность** – физические свойства материала одинаковы во всех его точках. **Изотропность** – свойства материала одинаковы по всем направлениям. **Идеальная упругость** – свойство материала (тела) полностью восстанавливать свою форму и размеры после устранения причин, вызвавших деформацию.

### Допущения о деформациях

1. Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.
2. Принцип неизменности начальных размеров – деформации малы по сравнению с первоначальными размерами тела.
3. Гипотеза о линейной деформируемости тел – деформации прямо пропорциональны приложенным силам (закон Гука).
4. Принцип независимости действия сил.

5. **Гипотеза плоских сечений Бернулли** – плоские поперечные сечения бруса до деформации остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации.

6. **Принцип Сен-Венана** – напряженное состояние тела на достаточном удалении от области действия локальных нагрузок очень мало зависит от детального способа их приложения.

## 2.2. Метод сечений

Для определения внутренних сил в теле применяют **метод сечений**:

- 1) мысленно рассекают брус на две части поперечной плоскостью, перпендикулярной оси бруса;
- 2) отбрасывают одну из частей;
- 3) заменяют действие отброшенной части на оставленную часть шестью **внутренними силовыми факторами** (ВСФ) – продольной (нормальной) силой  $N_z$ , двумя поперечными силами  $Q_x$  и  $Q_y$ , крутящим моментом  $M_z$  и двумя изгибающими моментами  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 2.3);

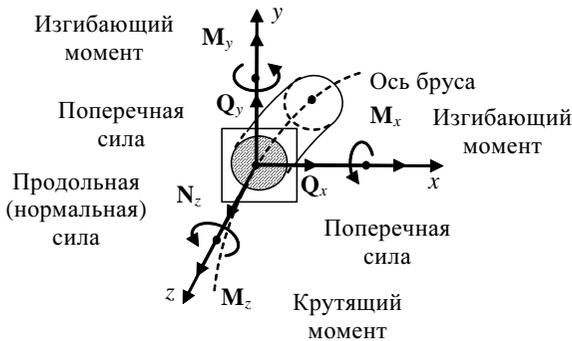


Рис. 2.3

- 4) определяют ВСФ из уравнений равновесия статики;
- 5) по третьему закону Ньютона ВСФ отброшенной части равны по модулю и противоположны по направлению ВСФ оставленной части.

## 2.3. Напряжения и деформации

Рассмотрим произвольную точку  $M$  в произвольном сечении твердого тела (рис. 2.4). Пусть  $A$  – площадь сечения. Проведем в точке  $M$  единичную нормаль  $\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ , к плоскости сечения. Выделим вблизи точки  $M$  площадку  $\Delta A$ . Пусть на площадке  $\Delta A$  действует сила  $\Delta \mathbf{F}$ .

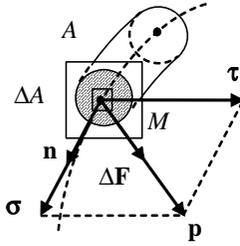


Рис. 2.4

**Полным напряжением** в точке  $M$  называется векторная величина, численно равная

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}, \quad [p] = \frac{H}{M^2} = \text{Па}.$$

Разложим полное напряжение на нормальное напряжение  $\sigma$  и касательное напряжение  $\tau$ :

$$\mathbf{p} = \sigma + \tau, \quad \sigma \perp \tau, \quad \sigma \perp A, \quad \sigma \parallel \mathbf{n}, \quad \sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2}.$$

Пусть после деформации тела внутренний отрезок  $\mathbf{AB}$  переходит в отрезок  $\mathbf{A'B'}$  (рис. 2.5).



Рис. 2.5

**Относительной линейной деформацией** в точке  $A$  по направлению  $\mathbf{AB}$  называется безразмерная величина

$$\epsilon_{AB} = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB}.$$

Относительные линейные деформации вдоль координатных осей  $x, y, z$  обозначаются  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ .

Пусть прямой угол  $\angle DOC$  внутри тела после деформации переходит в угол  $\angle D'O'C'$  (рис. 2.6).



Рис. 2.6

**Углом сдвига (угловой деформацией)** в точке  $O$  в плоскости  $DOC$  называется безразмерная величина

$$\gamma_{DOC} = \lim_{DO \rightarrow 0, CO \rightarrow 0} (\angle DOC - \angle D'O'C').$$

В координатных плоскостях  $xу$ ,  $xz$ ,  $yz$  углы сдвига обозначаются  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ .

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

#### 3.1. Статические моменты и моменты инерции сечения

Введем декартову прямоугольную систему координат  $Ox$ . Рассмотрим в плоскости координат произвольное сечение (замкнутую область) с площадью  $A$  (рис. 3.1).

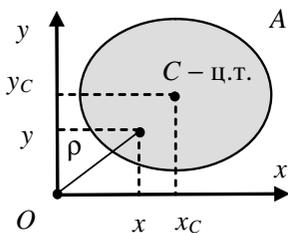


Рис. 3.1

**Статическими моментами сечения** относительно осей  $x$  и  $y$  называются интегралы вида

$$S_x = \int_A y \, dA, \quad S_y = \int_A x \, dA.$$

Точка  $C$  с координатами  $(x_C, y_C)$ :

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x \, dA}{A}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y \, dA}{A},$$

называется **центром тяжести сечения**.

Если оси координат проходят через центр тяжести сечения, то статические моменты сечения равны нулю:

$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad S_x = y_C A = 0, \quad S_y = x_C A = 0.$$

**Осевыми моментами инерции сечения** относительно осей  $x$  и  $y$  называются интегралы вида