

№ 1529

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет



Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

Архангельский А.В.

Одобрено
методическим
советом института

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для практических занятий
студентов специальностей 1106, 5104, 0709, 1209 и 1703

МОСКВА, 2000

АННОТАЦИЯ

В пособии изложены решения основных задач курса сопротивления материалов излагаемого студентам специальностей 1106 5104 0709 1209 1703

Большое внимание уделено вопросам вызывающим у студентов трудности при решении задач (построения эпюр внутренних силовых факторов, составление дифференциального уравнения впрямой линии в универсальной форме и его интегрирование, применение метода сил и энергетических методов определения перемещений и др.) Легко усваиваемые методы решения задач описаны кратко, почти конспективно

Для лучшего усвоения методов решения задач рекомендуется после их изучения по пособию решить эти задачи самостоятельно, без помощи пособия, а затем сравнить ход решения и полученные результаты с изложенными в пособии

© Московский государственный
институт стали и сплавов
(Технологический
университет) (МИСиС) 2000

СОДЕРЖАНИЕ

О точности вычислений в инженерных расчетах	5
1. Анализ внутренних силовых факторов	8
1.1. Краткие теоретические сведения	8
1.2. Построение эпюр	10
1.2.1. Эпюры продольных сил при растяжении и сжатии	10
1.2.2. Эпюры крутящих моментов	13
1.2.3. Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов при плоском изгибе балок	15
1.2.4. Построение эпюр внутренних силовых факторов в плоских рамах	24
2. Осевое растяжение и сжатие	32
2.1. Расчет статически определимых систем	32
2.1.1. Краткие теоретические сведения	32
2.1.2. Расчет на прочность	34
2.1.3. Подбор поперечного сечения	39
2.1.4. Определение допустимой нагрузки	41
2.2. Расчет статически неопределимых систем	45
2.2.1. Краткие теоретические сведения	45
2.2.2. Расчет на прочность	47
2.2.3. Расчет температурных напряжений	54
2.2.4. Расчет монтажных напряжений при сборке конструкций	59
3. Напряженное и деформированное состояние	62
3.1. Краткие теоретические сведения	62
3.2. Расчет напряжений и деформаций	67
3.2.1. Определение напряжений при одноосном действии сил	68
3.2.2. Определение напряжений при плоском напряженном состоянии	71
3.2.3. Расчеты с применением обобщенного закона Гука	75
4. Геометрические характеристики плоских сечений	77
4.1. Краткие теоретические сведения	77
4.2. Вычисление геометрических характеристик плоских сечений	80

5. Расчеты при кручении брусьев круглого поперечного сечения	87
5.1. Краткие теоретические сведения	87
5.2. Расчеты на прочность и жесткость	90
5.3. Статически неопределимые задачи кручения	94
6. Прямой изгиб балок	98
6.1. Краткие теоретические сведения	98
6.2. Расчет балок на прочность	100
6.3. Определение перемещений точек и сечений методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии	107
7. Применение теорий прочности к расчету валов	114
7.1. Краткие теоретические сведения	114
7.2. Расчет валов на прочность	116
8. Определение перемещений энергетическим методом	121
8.1. Краткие теоретические сведения	121
8.2. Вычисление перемещений с помощью интеграла Мора	124
8.3. Вычисление перемещений способом Верещагина	130
9. Расчет статически неопределимых систем методом сил	139
9.1. Краткие теоретические сведения	139
9.2. Примеры раскрытия статической неопределимости	142
9.3. Определение перемещений в статически неопределимых системах	151
10. Расчеты сложного сопротивления	154
10.1. Краткие теоретические сведения	154
10.2. Косой изгиб	156
10.3. Внецентренное растяжение и сжатие	161
11. Устойчивость равновесия упругих стержней	167
11.1. Краткие теоретические сведения	167
11.2. Расчеты по формуле Эйлера	169
11.3. Расчеты нагрузок за пределом упругости	172
11.4. Расчет на устойчивость по коэффициентам φ продольного изгиба	173
Литература	176

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

В механике степень точности результатов расчета ограничивается предпосылками и гипотезами, положенными в ее основу, а также точностью измерений линейных размеров рассчитываемой конструкции, механических характеристик ее материала и величин приложенных нагрузок. Поэтому, в расчетах приходится иметь дело с приближенными значениями величин. Эти числа записываются в соответствии с наиболее распространенным правилом – выписывать значащими цифрами все верные цифры и первую сомнительную. Например, модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа есть число с двумя значащими цифрами – 2 и 1. В этом числе сомнительной цифрой будет единица. Это связано с тем, что модуль упругости вычисляют как отношение двух независимо определяемых величин – нагрузки и деформации – которые измеряют с некоторыми погрешностями. Значит, для стали может быть так: $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа или $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа.

В числе 0,0005 сомнительной цифрой будет 5, поскольку истинное значение этого числа может лежать в интервале от 0,0004 до 0,0006, а может и в более широком интервале.

При действиях с приближенными числами не следует стремиться к высокой абсолютной точности расчета, обеспечиваемой возможностями современных вычислительных машин. Большое количество значащих цифр в числе еще не говорит о его точности.

Пример. Пусть нам известно, что при осевом растяжении стержня продольная сила равна 25 МН, а площадь поперечного сечения стержня – $0,17 \text{ м}^2$

Разделив силу на площадь, получим напряжение в сечении

$$\frac{25 \text{ МН}}{0,17 \text{ м}^2} = 147,0588 \text{ МПа.}$$

Казалось бы, напряжение вычислено с очень высокой степенью точности. Однако нагрузка задана приближенно и цифра 5 является сомнительной. В площади поперечного сечения сомнительна последняя цифра 7. Эти последние цифры могут быть ошибочными

на ± 1 Учтя эту ошибку мы получим следующие результаты

$$\frac{26 \text{ МН}}{0,16 \text{ м}^2} = 162,5 \text{ МПа.}$$

$$\frac{24 \text{ МН}}{0,18 \text{ м}^2} = 133,3 \text{ МПа}$$

Из этого примера видно, что в полученных результатах цифра в разряде *десятков* уже является сомнительной, приближенной Поэтому ответ может быть только с двумя значащими цифрами $1,5 \cdot 10^2$ МПа

Ниже приведены некоторые *правила записи чисел*, которых следует придерживаться при решении задач механики и в инженерных вычислениях вообще

1 При сложении (вычитании) приближенных чисел можно с большой вероятностью считать, что сумма (разность) имеет такое же число знаков после запятой, что и исходное число, имеющее наименьшее число этих знаков

Пример. $1,5423 + 0,29 + 2,137 = 3,97$

В этом примере число 1,5423 округлено до 1,54 отбрасыванием двух последних цифр, а число 2,137 – до 2,14 прибавлением единицы во втором разряде после запятой

2 При умножении (делении) можно с большой вероятностью считать, что результат имеет столько значащих цифр, сколько их имеет наименьшее по количеству значащих цифр исходное число

Пример. Умножим 1,974 на 0,6 Округлив множимое до одной значащей цифры, как во множителе, т е до 2, найдем, что произведение, в котором сохраняем одну значащую цифру, равно 1

Действительно, учитывая сомнительность цифры 6 множителя, можно получить результаты

$$1,974 \times 0,6 = 1,1844 \approx 1,$$

$$1,974 \times 0,5 = 0,9870 \approx 1,$$

$$1,974 \times 0,7 = 1,3818 \approx 1$$

Здесь результаты первой и второй строчек, второй и треть-

ей строчек различаются уже в целых единицах и поэтому нет смысла выписывать четыре знака после запятой

- 3 При возведении в квадрат (куб) в полученном результате следует сохранить столько же значащих цифр, сколько их имеет основание степени при возведении в четвертую степень – уменьшить число значащих цифр на единицу

Пример 1. $1,49^2 = 2,22$ тогда как при «точном» расчете – 2,2201

Пример 2. $0,5^3 = 0,125$ «Точный» результат 0,125 не имеет смысла при сомнительной цифре 5 в основании степени, ибо $0,6^3 = 0,216$, а $0,4^3 = 0,064$ и результаты различаются уже на уровне десятых долей

Если бы число было записано в форме $0,500^3$ (три значащих цифры), то результат 0,125 был бы правильным.

- 4 При извлечении квадратного (кубического) корня можно с большой вероятностью считать, что результат имеет не больше значащих цифр, чем подкоренное число

Пример. $\sqrt{0,0625} = 0,250$, $\sqrt[3]{1,177} = 1,21$

Таким образом, в расчетах, содержащих действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня нужно все данные приближенные числа округлить до одинакового числа значащих цифр и результат вычислений округлить до того же числа значащих цифр

Применяя указанные выше правила, следует иметь в виду, что последняя цифра результата в отдельных случаях может иметь погрешность в несколько единиц, но малые погрешности более вероятны, чем большие

Так, в первом рассмотренном нами примере, напряжение в поперечном сечении стержня оказалось равным $1,5 \cdot 10^2$ МПа. Пусть допускаемое напряжение равно 160 МПа. Как оценить прочность стержня?

Значение рассчитанного напряжения имеет две значащие цифры, следовательно, оно может находиться в интервале значений 140–160 МПа или, что менее вероятно, 130–170 МПа. Взяв более вероятное значение величины напряжения, можно считать, что прочность стержня обеспечена, так как $(140–160) \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа}$

1. АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

1.1. Краткие теоретические сведения

При нагружении стержня внешними нагрузками в его сечениях возникают внутренние силы и моменты, которые называются *внутренними силовыми факторами*. Деформация стержней и их разрушение обуславливаются не внешней перегрузкой, а внутренними силами и моментами. Анализ внутренних силовых факторов – это важнейший инструмент, позволяющий получить необходимую информацию о прочности и жесткости конструкций. Можно сказать, без которого не может быть решена ни одна задача о сопротивлении материалов приложенным нагрузкам.

Для выявления и вычисления внутренних силовых факторов применяется метод сечений, включающий в себя следующие этапы:

- мысленно рассекаем тело на две части;
- отбрасываем одну из этих частей;
- заменяем действие отброшенной части на оставшуюся неизвестными внутренними силами и моментами;
- составляем уравнения равновесия для оставшейся части тела и определяем неизвестные внутренние силы и моменты.

В самом общем случае в поперечном сечении стержня могут возникнуть шесть внутренних силовых факторов (внутренних усилий):

- | | |
|---------------|------------------------|
| N_z | – продольная сила; |
| Q_x и Q_y | – перерезывающие силы; |
| M_x и M_y | – изгибающие моменты; |
| $M_z = M_k$ | – крутящий момент. |

Проекция на какую-либо ось внутренних усилий в сечении, действующих со стороны отброшенной части стержня (например, правой) на оставшуюся (левую) равна и направлена противоположно проекции на эту ось всех внешних сил, приложенных к левой части.

Аналогично, момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении, действующих со стороны правой части стержня на

левую равен и направлен противоположно моменту всех внешних сил, приложенных к левой части стержня относительно этой оси

Введем *правило знаков* для внутренних силовых факторов в поперечном сечении бруса

- продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение (рис 11, а)
- крутящему моменту обычно не приписывают никакого знака,
- для балок, испытывающих плоский изгиб, перерезывающая сила Q положительна, если левая часть балки под действием внешних, приложенных к ней сил, стремится переместиться вверх относительно правой ее части (рис 11, б), а изгибающий момент M положителен, если радиус кривизны деформированной оси балки направлен вверх, в сторону положительного направления оси y (рис 11, в)

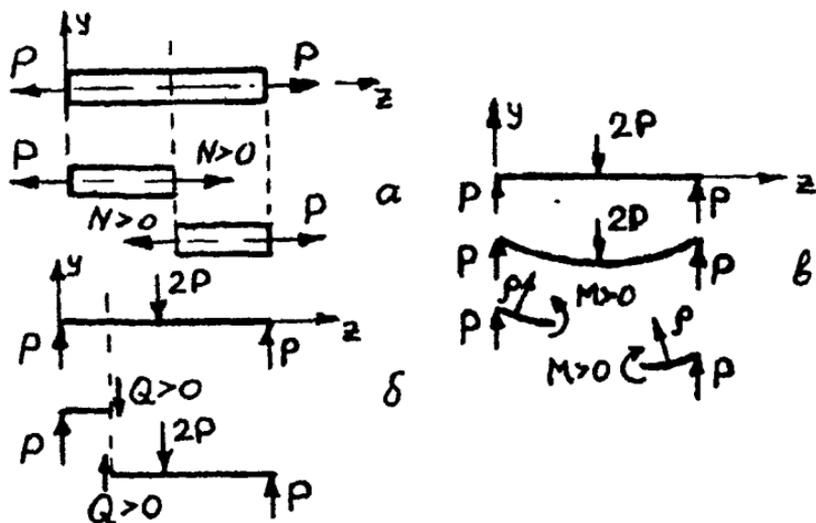


Рис 11 Схемы к определению знака

а - продольного усилия N , б - перерезывающей силы Q ;

в - изгибающего момента M (ρ - радиус кривизны изогнутой оси балки)

В результате анализа внутренних силовых факторов строятся эпюры внутренних силовых факторов, показывающие графически изменение усилий и моментов в сечении при перемещении сечения вдоль оси стержня. Вычисленные значения внутренних силовых факторов откладываются от базы – линии, параллельной оси стержня, в удобном для построения масштабе.

1.2. Построение эпюр

1.2.1. Эпюры продольных сил при растяжении и сжатии

Задача 1.1. Построить эпюру продольных сил для стержня, показанного на рис. 1.2. Дано $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 4$ кН, $a = 0,4$ м, $b = 0,3$ м, $c = 0,8$ м, $l = 2$ м.

Решение

Вычерчиваем расчетную схему в удобном масштабе с указанием численных значений размеров стержня и сил (рис. 1.2, а) и выбираем направление координатных осей. Обозначаем характерные участки по длине бруса между точками приложения сил I, II, III и IV. Далее, применяя метод сечений, определяем неизвестные продольные усилия в поперечных сечениях стержня.

Рассекаем стержень на IV участке ($z > 1,5$ м), и, чтобы не определять опорную реакцию, отбрасываем левую часть (вместе с неизвестной опорной реакцией), заменяем действие отброшенной части на оставшуюся положительной внутренней силой N_z^{IV} (рис. 1.2, б) и составляем уравнение равновесия части бруса в проекции на ось z : $-N_z^{IV} = 0$. Следовательно, на IV участке внутренние силы отсутствуют.

Аналогично поступаем с остальными участками стержня.

участок III (рис. 1.2, в) $-N_z^{III} + 3 = 0, \quad N_z^{III} = 3$ кН,
участок II (рис. 1.2, г) $-N_z^{II} - 4 + 3 = 0, \quad N_z^{II} = -1$ кН,

здесь знак (-) указывает, что направление внутренней силы было выбрано неправильно, т.е. она является сжимающей, а не растягивающей.

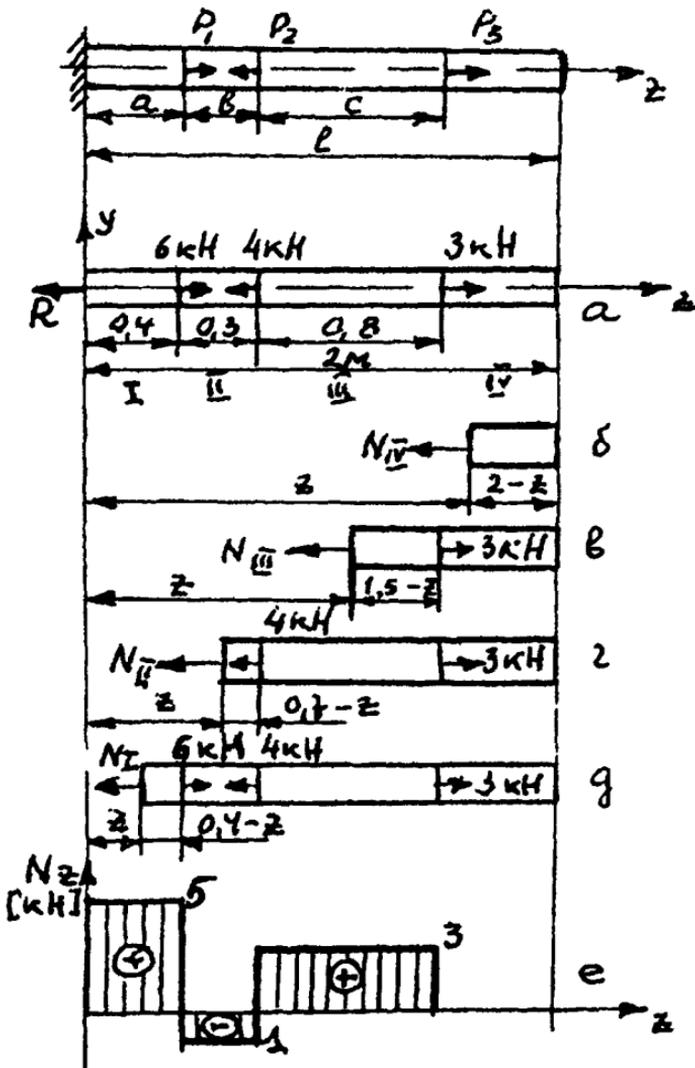


Рис 12 Схема нагружения стержня к задаче 11
 а – расчетная схема, б, в, г, д – участки стержня для определения
 продольного усилия, соответственно, на IV, III, II и I участках, e –
 эпюра продольного усилия

участок I (рис 1 2. д) $-N_z^I + 6 - 4 + 3 = 0, N_z^I = 5 \text{ кН}$

После определения внутренних сил по всей длине бруса строим эпюру силы N_z в удобном для построения масштабе с указанием численных значений и знака внутреннего продольного усилия (рис 1 2, е)

Внутреннее усилие на I участке бруса численно равно неизвестной опорной реакции в заделке. Действительно, отбрасывая опорное закрепление и заменяя его действие опорной реакцией R из уравнения равновесия, получим $R = 6 - 4 + 3 = 5 \text{ кН}$. Таким образом, для брусьев типа консоль (закрепленных жестко с одного конца) предварительное определение опорных реакций не обязательно.

Задача 1.2. Построить эпюру продольных сил для стержня с распределенной нагрузкой (рис 1 3)

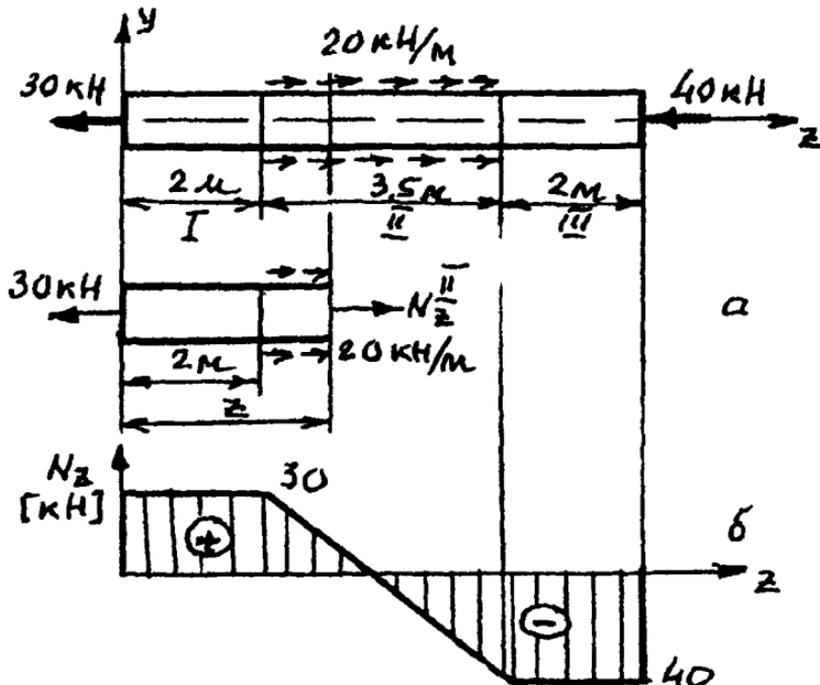


Рис 1 3 Расчетная схема стержня к задаче 1.2,
а – левая от сечения часть стержня для определения N_z^I , б – эпюры продольной силы

Решение

На I участке, отбрасывая правую от сечения часть стержня, определим, что растягивающая сила $N_z^I = 30$ кН.

На II участке появляется распределенная нагрузка. На рис 13, а представлена левая от сечения часть стержня длиной z . Левая часть растягивается силой 30 кН и сжимается распределенной нагрузкой 20 кН/м на участке длиной $(z - 2)$ м. Равнодействующая этой нагрузки равна $20(z - 2)$ кН.

Таким образом $N_z^{II} = 30 - 20(z - 2)$

На II участке N_z^{II} меняется по линейному закону и достаточно определить два его значения для построения эпюры:

$z = 2$ м, $N_z^{II} = 30$ кН,

$z = 5,5$ м, $N_z^{IV} = 30 - 20 \cdot 3,5 = -40$ кН

На третьем участке, очевидно, $N_z^{III} = -40$ кН

Рис 13, б представляет эпюру продольной силы по длине стержня

1.2.2. Эпюры крутящих моментов

Задача 1.3. На стержень круглого сечения действуют три скручивающих момента (рис 14). Построить эпюру крутящих моментов. Дано $M = 200$ Н · м, $a = 1$ м.

Решение

Вычерчиваем схему бруса в масштабе с указанием численных значений размеров и нагрузок (рис. 14, а). При решении этой задачи нет необходимости определять реакции опор, так как трением в подшипниках опор обычно пренебрегают и система внешних сил уравновешена (стержень покоится или равномерно вращается).

Крутящие моменты в поперечных сечениях стержня равны

участок I ($z \leq 0,5$ м)

$M_z^I = 0$ (рис 14, б),

участок II ($0,5 \text{ м} \leq z \leq 1,5$ м)

$M_z^{II} - 600 = 0$, $M_z^{II} = 600$ Н · м.

участок III ($1,5 \text{ м} \leq z \leq 3,5$ м)

$M_z^{III} + 1000 - 600 = 0$, $M_z^{IV} = -400$ Н · м (рис 14, в)

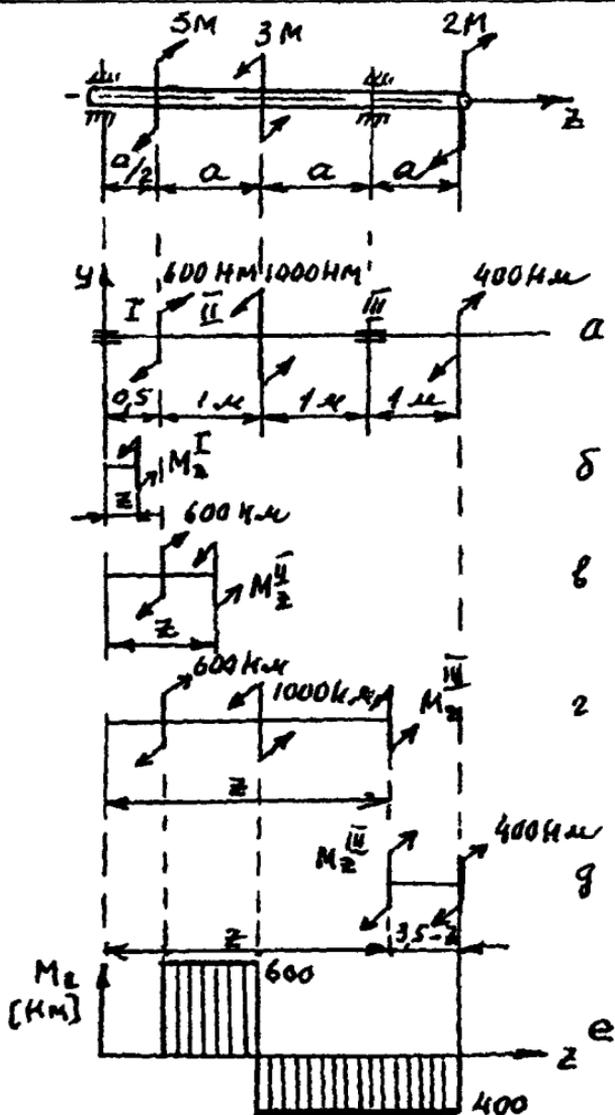


Рис 14 Схема нагружения стержня к задаче 13
 а - расчетная схема, б, в, г, д - участки стержня I, II, III для
 определения крутящего момента, е - эпюра крутящих моментов

Знак (-) указывает на то, что направление крутящего момента

M_z в сечении стержня выбрано неправильно (см рис 1 4. г)

Для определения крутящего момента в сечении на III участке можно рассмотреть правую часть стержня, отбросив левую В соответствии с третьим законом Ньютона. изменим направление M_z на противоположное (рис 1 4. д). $M_z^{III} + 400 = 0$. $M_z^{III} = -400$ Н м

Наконец, строим эпюру крутящих моментов M_z (рис 1 4. е)

1 2.3 Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов при плоском изгибе балок

При изгибе балок в поперечных сечениях возникают перерезывающие силы и изгибающие моменты Применяя метод сечений, действие отброшенной части на оставшуюся целесообразно представлять *положительными* внутренними силовыми факторами В этом случае знак перерезывающей силы и изгибающего момента естественно получается из решения уравнения равновесия (см рис 1 1, б, в)

Начало координат помещаем на левом конце балки, независимо от вида и расположения опорных закреплений, продольную ось z направляем вдоль оси балки направо

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов следует пользоваться дифференциальными зависимостями между изгибающим моментом M_x , поперечной силой Q_y и интенсивностью распределенной нагрузки q

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = q.$$

Из этих зависимостей вытекает несколько следствий, используемых при построении эпюр

– если $q = 0$, т е балка на соответствующем участке не несет распределенной нагрузки, то

$$\frac{dQ_y}{dz} = 0, \quad Q_y = const.$$

но при этом $dM_x/dz = const$, т е изгибающий момент является линейной функцией координаты z ,

- если на некотором участке балка несет равномерно распределенную нагрузку, то $q = const$ Тогда зависимость Q_y от z выразится уравнением первой степени (прямой линией), зависимость M_x от z - уравнением второй степени (параболой)
- если $Q_y = 0$, то $dM_x/dz = 0$, следовательно $M_x = const$, т.е. изгибающий момент по длине участка балки не меняется, при $M_x = const$ имеем чистый изгиб
- если $Q_y > 0$ на рассматриваемом участке, то M_x возрастает (слева направо), если $Q_y < 0$, то M_x убывает,
- $M_x = M_{экстр}$ в тех сечениях, где $Q_y = 0$ и меняет знак

Задача 1.4. Построить эпюры внутренних сил для консоли (балки, защемленной с одного конца), рис 1.5, а

Решение

При анализе внутренних силовых факторов в консолях не обязательно определение опорных реакций в защемлении. В этом случае, применяя метод сечения, отбрасываем ту часть балки, к которой приложены неизвестные опорные реакции (внешние силы). Внутренние силовые факторы, определяемые в защемлении, представляют собой опорные реакции.

Итак, анализ внутренних сил, начинаем с IV участка, двигаясь справа налево.

Участок IV (рис 1.5, б)

сумма проекций всех сил на ось y

$$Q_y + 4 = 0, Q_y = -4 \text{ кН};$$

сумма моментов относительно сечения z

$$M_x - 4(5 - z) = 0, \text{ откуда } M_x = 4(5 - z),$$

при $z = 5 \text{ м}$ $M_x = 0,$

при $z = 3,5 \text{ м}$ $M_x = 6 \text{ кН м},$

M_x линейно убывает от 6 кН м при $z = 3,5 \text{ м}$ и до нуля при $z = 5 \text{ м}$, при этом Q_y отрицательно

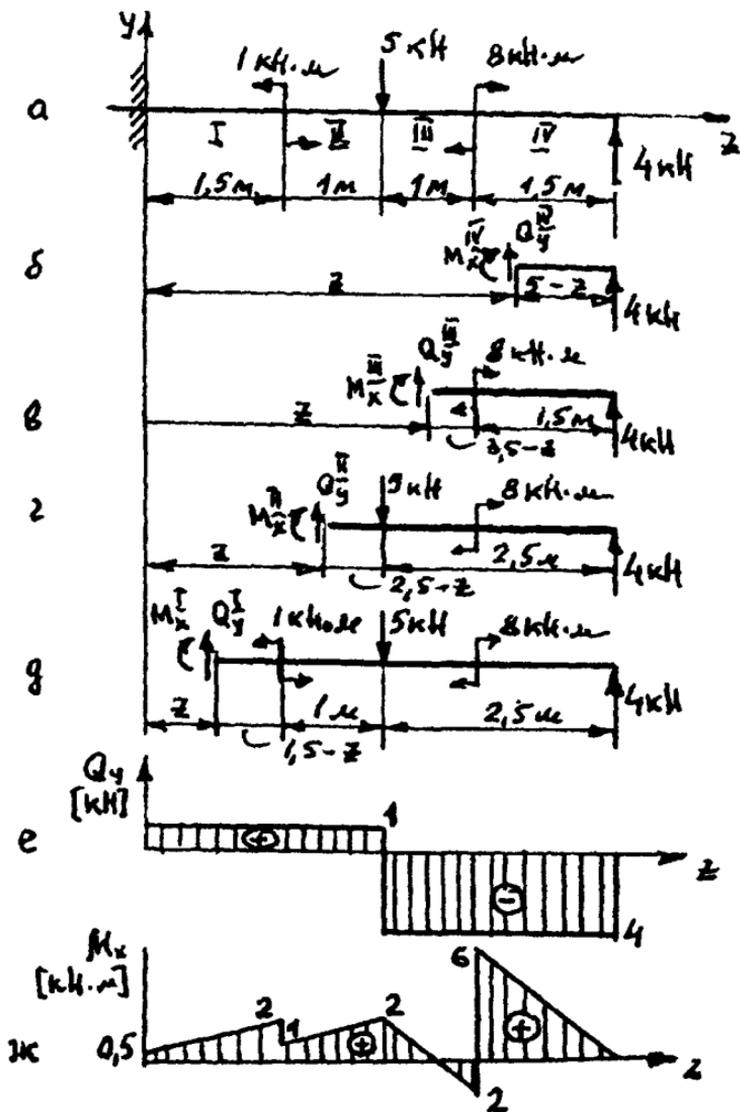


Рис 1 5 Схема к анализу внутренних сил при изгибе к задаче 1 4
 а – расчетная схема балки, б, в, г, д – участки IV, III, II, I балки для определения
 перерезывающей силы Q_y и изгибающего момента M_x , е, ж – эпюры Q_y и M_x