№ 219

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Аналитическая геометрия

Учебное пособие

№ 219

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»**

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Аналитическая геометрия

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 514.12
П40

Р е ц е н з е н т
канд. техн. наук, доц. *Л.А. Шамаро*

Плужникова, Е. Л.

П40 Аналитическая геометрия : учеб. пособие / Е. Л. Плужникова, Б. Г. Разумейко. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 177 с.
ISBN 978-5-87623-382-0

В пособии приведены основные формулы и понятия аналитической геометрии, разобрано большое количество типовых задач различных уровней сложности. Также в пособии содержатся условия домашнего задания по курсу «Аналитическая геометрииия». Количество вариантов обеспечивает индивидуальное задание каждому студенту. Наличие в пособии типовых вариантов контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса, позволит студенту подготовиться к экзаменационной сессии.

Для студентов всех специальностей.

УДК 514.12

ISBN 978-5-87623-382-0

© Е.Л. Плужникова,
Б.Г. Разумейко, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Векторы

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление (рис. 1.1). О любом отрезке $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет собой вектор $\vec{a}$ и получен приложением вектора $\vec{a}$ к точке A.

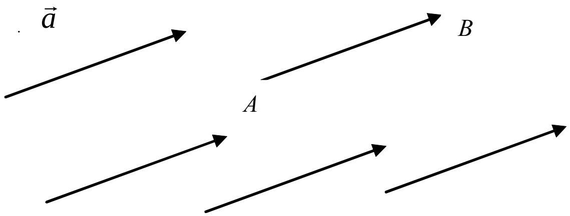

Рис. 1.1

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$. К векторам будем относить и так называемый *нулевой вектор*, у которого начало и конец совпадают.

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой (*сонаправленными*, если их направления совпадают; *противоположно направленными*, если их направления противоположны). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*. Два (ненулевых) вектора называются *равными*, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные длины.

Действия с векторами

1. Сумма векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые приложены к одной точке. *Суммой* векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (рис. 1.2), идущий по диагонали параллелограмма из их общего начала (правило параллелограмма):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

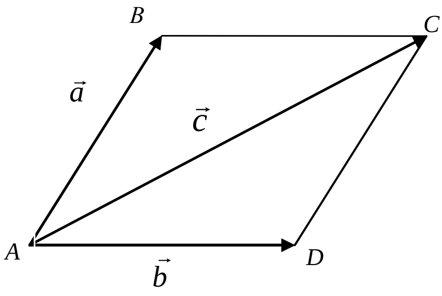

Рис. 1.2

Замечания

1. Сложить два вектора также можно по правилу треугольника. Если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$, то сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго. Результат при этом не изменится, так как если $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \text{ (см. рис. 1.2).}$$

2. Чтобы построить сумму векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, нужно к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить вектор $\vec{a}_2$, затем к концу вектора $\vec{a}_2$ приложить вектор $\vec{a}_3$ и т.д., пока не дойдем до вектора $\vec{a}_n$. Тогда суммой векторов $\vec{a}_1+\vec{a}_2+ \ ...+\vec{a}_n$ будет вектор, соединяющий начало первого вектора $\vec{a}_1$ с концом последнего $\vec{a}_n$ (рис. 1.3):

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+ \ ...+\vec{a}_n=\overrightarrow{A_1A}_{n+1}$$

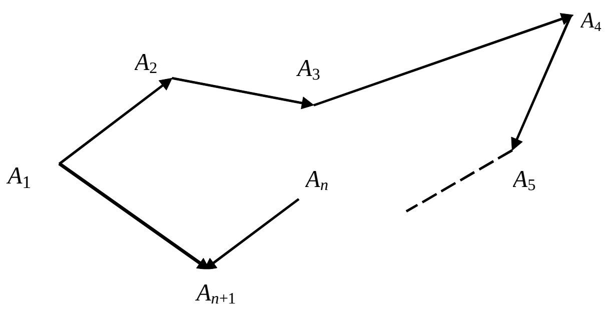

Рис. 1.3

2. Разность векторов

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одной точке, то *разность* этих векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ – это вектор, соединяющий конец второго вектора с концом первого (рис. 1.4):

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

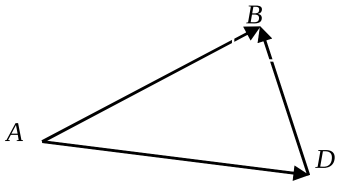

Рис. 1.4

Замечание. Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных из общей точки *A*, построить параллелограмм *ABCD* (см. рис. 1.2), то вектор $\overrightarrow{AC}$, совпадающий с одной диагональю параллелограмма, равен сумме $\vec{a} + \vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{DB}$, совпадающий с другой диагональю – разности $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, такой что

1) $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ (сонаправлены), если $\alpha > 0$;

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ (противоположно направлены), если $\alpha < 0$;

$\vec{b} = 0$, если $\alpha = 0$.

Свойства линейных операций

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения);

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ассоциативность сложения);

3) $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ – нулевой элемент);

4) $\forall\, \vec{a}\ \exists(-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ($-\vec{a}$ – противоположный элемент);

5) $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} : (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность умножения);

6) $\forall\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность умножения);

7) $\forall\alpha\in \boldsymbol{R}: \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

1.2. Проекция вектора на вектор

Пусть в пространстве даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Опустим из конца и начала вектора $\vec{a}$ перпендикуляры на вектор $\vec{b}$. Обозначим основания этих перпендикуляров буквами A и B.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, определяемое по формуле

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

Замечание: $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\pm|AB|$.

Если вектор $\vec{a}$ образует острый угол с вектором $\vec{b}$, то проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ положительна, если же этот угол тупой, то проекция отрицательна, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то проекция равна 0.

Свойства проекций

1. Равные векторы имеют равные проекции.

2. Проекция суммы нескольких векторов на один и тот же вектор равна сумме их проекций:

$$\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}_1+\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}_2+\ldots+\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}_n.$$

3. При умножении вектора на число его проекция на данную ось умножается на это число:

$$\text{пр}_{\vec{b}}(\alpha\vec{a})=\alpha\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

1.3. Базис и координаты вектора

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор. *Базисом на плоскости* называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов. *Базисом в пространстве* геометрических векторов называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис называется *прямоугольным*, если базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Зафиксируем в пространстве точку O и приложим к ней три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины. По направлению этих векторов направим оси OX, OY и OZ, которые называются координатными осями. Первая – ось абсцисс, вторая – ось ординат, третья – ось аппликат. Векторы прямоугольного базиса принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Совокупность точки и прямоугольного базиса $B=\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат (рис. 1.5), а точка M – произвольная точка пространства. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. Проведем через точку M плоскости, перпендикулярные координатным осям. Любой вектор можно единственным образом разложить по базису $B=\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$.

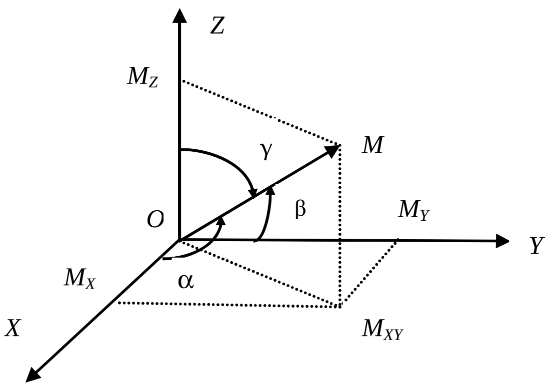

Рис. 1.5

Пусть x – проекция вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ на ось OX, y – проекция вектора $\vec{a}$ на ось OY, z – проекция вектора $\vec{a}$ на ось OZ. Тогда разложение вектора $\vec{a}$ по базису $B=\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

где (x, y, z) – координаты вектора $\vec{a}$.

Пусть α – угол между вектором $\vec{a}$ и осью OX; β – угол между вектором $\vec{a}$ и осью OY; γ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью OZ. Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ и могут быть вычислены по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Очевидно, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для нахождения длины вектора $\vec{a}$ используется формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в пространстве заданы две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находим, вычитая из координат точки B соответствующие координаты точки A:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, тогда координаты вектора $\vec{c}$, являющегося суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим, складывая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Аналогично, координаты вектора $\vec{d}$, являющегося разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим по формуле

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Координаты вектора $\vec{q}$, являющегося произведением вектора $\vec{a}$ на число α, находим, умножая все координаты вектора $\vec{a}$ на число α:

$$\alpha\vec{a} = \vec{q} = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1).$$

Условие коллинеарности векторов: два вектора коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Два вектора совпадают, если равны их соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Пример 1.1

Найти координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, если известно, что его длина равна 36 и он образует тупой угол с осью *OX*.

Решение

Так как вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, то координаты вектора $\vec{a}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a} = (-2\alpha,\ 2\alpha,\ -\alpha).$$

Так как по условию задачи длина вектора равна 36, то

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{9\alpha^2} = 36 \Rightarrow \alpha^2 = 144 \Rightarrow \alpha = \pm 12.$$

Вектор $\vec{a}$ образует тупой угол с осью *OX*, а значит, его первая координата должна быть отрицательной. Следовательно, $\alpha = 12$.

Итак, получили: $\vec{a} = \left(-24,\ 24,\ -12\right)$.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, точка C лежит на отрезке AB, так что $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \lambda$; т.е. точка C делит отрезок AB в отношении λ. Требуется найти координаты точки C.

Очевидно, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{AC} = \left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right),$$
$$\overrightarrow{CB} = \left(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\right).$$

Тогда

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=(\lambda(x_2-x), \lambda(y_2-y), \lambda(z_2-z)).$$

Из равенства векторов следует равенство соответствующих координат:

$$\begin{cases} x-x_1=\lambda x_2-\lambda x, \\ y-y_1=\lambda y_2-\lambda y, \\ z-z_1=\lambda z_2-\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\lambda x=x_1+\lambda x_2, \\ y+\lambda y=y_1+\lambda y_2, \\ z+\lambda z=z_1+\lambda z_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Замечание. Если точка C является серединой отрезка AB ($\lambda = 1$), то ее координаты вычисляются по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

1.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Заметив, что выражение $|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ равно проекции вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, а выражение $|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ равно проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, получим следующую формулу для вычисления скалярного произведения:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Рассмотрим физическую задачу, решение которой приводится к скалярному произведению векторов. Пусть материальная точка M движется по прямой от точки A до точки B. Путь, проходимый при этом, равен S. Допустим, что на точку M действует постоянная по величине и направлению сила $\vec{F}$ под углом φ к направлению перемещения. Тогда работа

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi = (\vec{F}, \vec{S}).$$

Таким образом, работа постоянной силы на прямолинейном участке равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$ (условие перпендикулярности векторов);

2) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

3) $(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}), \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$;

4) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

5) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

6) Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, то $(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, если тупой, то $(\vec{a}, \vec{b}) < 0$.

Выражение скалярного произведения векторов через координаты сомножителей

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ соответственно, то скалярное произведение находится по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0, \text{ т.е. } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пример 1.2

Дано: $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 5$; $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \dfrac{\pi}{3}$.

Найти:

1) длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$;

2) проекцию вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$ на вектор $3\vec{b} - 5\vec{a}$;

3) длину диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $4\vec{a} + \vec{b}$ и $3\vec{a} - 5\vec{b}$.

Решение

1. Для нахождения длины вектора воспользуемся формулой

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} .$$

Тогда

$$\left|\vec{a} + 4\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + 4\vec{b},\ \vec{a} + 4\vec{b}\right)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{По свойствам скалярного произведения:} \\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) \\ (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{(\vec{a},\vec{a}) + \left(4\vec{b},\vec{a}\right) + \left(\vec{a},4\vec{b}\right) + \left(4\vec{b},4\vec{b}\right)} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 8\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 16\left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 8\cdot 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3} + 16\cdot 5^2} = \sqrt{4 + 80\cdot\frac{1}{2} + 400} = \sqrt{4+40+400} = \sqrt{444}.$$

Итак, $\left|\vec{a} + 4\vec{b}\right| = 2\sqrt{111}.$

2. Для нахождения проекции воспользуемся формулой

$$\text{пр}_{\vec{f}}\,\vec{d} = \left|\vec{d}\right|\cdot\cos(\widehat{\vec{f},\vec{d}}) ,$$

где $\cos(\widehat{\vec{f},\vec{d}}) = \dfrac{(\vec{f},\vec{d})}{\left|\vec{f}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|}$.

Тогда

$$\text{пр}_{\vec{f}}\,\vec{d} = \left|\vec{d}\right|\cdot\frac{(\vec{f},\vec{d})}{\left|\vec{f}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|} = \frac{(\vec{f},\vec{d})}{\left|\vec{f}\right|}.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_{3\vec{b}-5\vec{a}}\left(\vec{a}+4\vec{b}\right)=\frac{(\vec{a}+4\vec{b},\ 3\vec{b}-5\vec{a})}{\left|3\vec{b}-5\vec{a}\right|}=\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуемся свойствами}\\ \text{скалярного произведения}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{(\vec{a},3\vec{b})-(\vec{a},5\vec{a})+(4\vec{b},3\vec{b})-(4\vec{b},5\vec{a})}{\sqrt{\left(3\vec{b}-5\vec{a},3\vec{b}-5\vec{a}\right)}}=\frac{3(\vec{a},\vec{b})-5(\vec{a},\vec{a})+12(\vec{b},\vec{b})-20(\vec{b},\vec{a})}{\sqrt{9\left(\vec{b},\vec{b}\right)-30\left(\vec{a},\vec{b}\right)+25\left(\vec{a},\vec{a}\right)}}=$$

$$=\frac{-17\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)-5\left|\vec{a}\right|^2+12\left|\vec{b}\right|^2}{\sqrt{9\left|\vec{b}\right|^2-30\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)+25\left|\vec{a}\right|^2}}=\frac{-17\cdot 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3}-5\cdot 2^2+12\cdot 5^2}{\sqrt{9\cdot 25-30\cdot 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3}+25\cdot 4}}=$$

$$=\frac{-170\cdot\frac{1}{2}-20+300}{\sqrt{225-300\cdot\frac{1}{2}+100}}=\frac{-85+280}{\sqrt{175}}=\frac{195}{5\sqrt{7}}=\frac{39}{\sqrt{7}}.$$

Получаем: $\text{пр}_{3\vec{b}\text{-}5\vec{a}}\left(\vec{a}+4\vec{b}\right)=\dfrac{39}{\sqrt{7}}.$

3. Найдем длины диагоналей параллелограмма, построенного по векторам $4\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}-5\vec{b}$, где $\left|\vec{a}\right|=2$; $|\vec{b}|=5$; $\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}=\dfrac{\pi}{3}$.

Пусть $\overrightarrow{AB}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{a}-5\vec{b}$ (рис. 1.6).

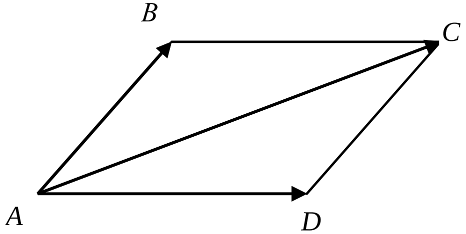

Рис. 1.6

Тогда

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=4\vec{a}+\vec{b}+3\vec{a}-5\vec{b}=7\vec{a}-4\vec{b};$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=3\vec{a}-5\vec{b}-4\vec{a}-\vec{b}=-\vec{a}-6\vec{b}.$$

Найдем длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|7\vec{a} - 4\vec{b}\right| = \sqrt{\left(7\vec{a} - 4\vec{b}, 7\vec{a} - 4\vec{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{49(\vec{a},\vec{a}) - 56\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 16\left(\vec{b},\vec{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{49\left|\vec{a}\right|^2 - 56\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) + 16\left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{49 \cdot 4 - 56 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 25} =$$

$$= \sqrt{196 - 280 + 400} = \sqrt{316}.$$

Найдем длину вектора $\overrightarrow{BC}$:

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|-\vec{a} - 6\vec{b}\right| = \sqrt{\left(-\vec{a} - 6\vec{b}, -\vec{a} - 6\vec{b}\right)} = \sqrt{36\left(\vec{b},\vec{b}\right) + 12\left(\vec{a},\vec{b}\right) + (\vec{a}, \vec{a})} =$$

$$= \sqrt{36\left|\vec{b}\right|^2 + 12\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) + \left|\vec{a}\right|^2} = \sqrt{36 \cdot 25 + 12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 4} =$$

$$= \sqrt{900 + 60 + 4} = \sqrt{964}.$$

Следовательно, длины диагоналей параллелограмма

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{316}; \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{964}.$$

Пример 1.3

Дано: $\vec{a} = (-3,1,4)$; $\vec{b} = (2,3,-5)$; $\vec{c} = (1, 9, -5)$.

Найти:

1) координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$;

2) длину вектора $\vec{d}$, направляющие косинусы вектора $\vec{d}$, координаты орта $\vec{d}_0$ вектора $\vec{d}$, проекцию вектора $\vec{d}$ на базисные орты ($\text{пр}_{\vec{i}}\vec{d}, \text{пр}_{\vec{j}}\vec{d}, \text{пр}_{\vec{k}}\vec{d}$);

3) скалярное произведение $\left(3\vec{a} + \vec{c}, 3\vec{d} - 5\vec{b}\right)$;

4) косинус угла между векторами $3\vec{a} + \vec{c}$ и $3\vec{d} - 5\vec{b}$;

5) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{d}$ – проекцию вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$.

Решение

1. Вектор $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, где $\vec{a} = (-3,1,4)$; $\vec{b} = (2,3,-5)$.

Найдем координаты векторов $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$:

$$2\vec{a} = (-6,\ 2,\ 8);\ 3\vec{b} = (6,\ 9, -15).$$

Тогда координаты вектора $\vec{d}$:

$$\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (-6+6,\ 2+9,\ 8-15) = (0,\ 11,\ -7).$$

Следовательно, вектор $\vec{d} = \left(0,\ 11, -7\right)$.

2. Найдем длину вектора $\vec{d}$ по формуле

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,$$

где $\vec{d} = (x,\ y,\ z)$.

Тогда

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{0 + 11^2 + (-7)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{d}$ по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{d}\right|};\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{d}\right|};\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{d}\right|}.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{170}} = 0;\ \cos\beta = \frac{11}{\sqrt{170}};\ \cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{170}}.$$

Найдем проекции вектора $\vec{d}$ на базисные векторы по формулам

$$\text{пр}_{\bar{i}}\vec{d} = x;\ \text{пр}_{\bar{j}}\vec{d} = y;\ \text{пр}_{\bar{k}}\vec{d} = z.$$

Тогда

$$\text{пр}_{\bar{i}}\vec{d} = 0;\ \text{пр}_{\bar{j}}\vec{d} = 11;\ \text{пр}_{\bar{k}}\vec{d} = -7.$$

Найдем координаты орта $\vec{d}_0$ вектора $\vec{d}$ по формуле

$$\vec{d}_0 = \frac{1}{\left|\vec{d}\right|}\vec{d}.$$