МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Электростальский политехнический
институт (филиал)

Б. Е. ГОПЕНГАУЗ

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Курс лекций

МОСКВА 2001

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Электростальский политехнический
институт (филиал)

Кафедра высшей математики и информатики

Б. Е. ГОПЕНГАУЗ

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Курс лекций
для студентов специальности 1106

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 512.942
Г66

Г66 *Б.Е. Гопенгауз.* Основы тензорного анализа – М: МИСиС, 2001. – 165с.

Рассмотрены следующие вопросы курса «Основы тензорного анализа».

1. Тензорное исчисление и некоторые его приложения;
2. Теория поля (векторный анализ), в том числе в криволинейных координатах;
3. Тензорное поле и его дифференцирование.

Подробно изложен программный материал по приведенным выше разделам курса, предложены решения типовых задач, а также упражнения для самостоятельного решения с ответами.

Предназначено для студентов специальности 1106.

ОГЛАВЛЕНИЕ

П Р Е Д И С Л О В И Е

Настоящее пособие посвящено изложению важного для практического применения теоретического материала. Применение тензорного исчисления полезно во всех случаях, когда используется координатный метод для математического изучения геометрических или физических объектов. *Основная идея тензорного исчисления* – выделение тех свойств изучаемых объектов, которые не зависят от выбора системы координат.

Тензорное исчисление (тензорный анализ) имеет многочисленные применения в геометрии, механике, физике, теории упругости, кристаллографии, механике сплошной среды и других науках. В настоящем пособии эти приложения тензорного анализа не рассматриваются подробно именно в связи с тем, что они будут изучаться в прикладных дисциплинах (например, в курсе "Механика сплошной среды").

Тензорное исчисление использует аппарат линейной алгебры, некоторые понятия которой кратко напоминаются в подразделе 1.1. Настоящий курс лекций можно рассматривать как продолжение пособия автора по линейной алгебре [10].

По тензорному анализу имеется довольно обширная литература (некоторые наименования приведены в списке литературы). К сожалению, эта литература в настоящее время мало доступна студентам. Настоящий курс лекций призван заполнить образовавшийся пробел. Наличие упражнений в конце каждого подраздела позволяет использовать его также и в качестве задачника по данному важному курсу.

1. ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. Преобразование базисов и координат

1.1.1. **Линейное пространство.** Напомним некоторые понятия, подробно изученные в "Курсе лекций" [10, с. 40-41]. При этом для удобства дальнейшего изложения некоторые обозначения будут изменены.

Множество L называется *линейным (векторным) пространством*, если для всех элементов этого множества (*векторов)* определены операции *сложения* и *умножения на число* (действительное; в этом случае L – линейное пространство над полем действительных чисел). При этом введённые операции должны подчиняться *аксиомам линейного пространства* [10, с.43].

Векторы $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k$ называются *линейно независимыми*, если из соотношения

$$\lambda_1 \vec{\boldsymbol{x}}_1 + \lambda_2 \vec{\boldsymbol{x}}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{\boldsymbol{x}}_x = \vec{0}$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$; в противном случае хотя бы один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Размерностью линейного пространства называется максимально возможное количество линейно независимых векторов пространства. Линейное пространство размерности n назовём *n-мерным пространством* и обозначим L_n. *Базисом пространства* L_n называется совокупность n линейно независимых векторов этого пространства. Базис, состоящий из векторов $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$, будем обозначать $\vec{\mathbf{e}}_i$, подразумевая, что индекс i изменяется от 1 до n.

Координатами вектора $\vec{\boldsymbol{x}}$ в базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ называются коэффициенты разложения $\vec{\boldsymbol{x}}$ по базису:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = x^1 \vec{\boldsymbol{e}}_1 + x^2 \vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + x^n \vec{\boldsymbol{e}}_n \qquad (1.1)$$

Координаты вектора в отличие от предыдущего пособия автора [10, с. 43] теперь будут нумероваться индексами вверху (смысл таких обозначений станет понятен в дальнейшем).

Используем *соглашение о суммировании (правило Эйнштейна)*: если в сумме индекс суммирования встречается как среди нижних индексов, так и среди верхних, знак суммы можно опустить.

Тогда формула (1.1) примет вид:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{\boldsymbol{e}}_i = x^i \vec{\boldsymbol{e}}_i . \tag{1.2}$$

Примем ещё одно соглашение: элементы матрицы будем обозначать буквой с двумя индексами, из которых верхний означает номер строки, а нижний – номер столбца. Например элемент матрицы $\mathbf{C}$, равной произведению квадратных матриц $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)$ и $\mathbf{B} = \left(b^i_j\right)$ порядка n, запишем в виде:

$$c^i_j = \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j = a^i_k b^k_j . \tag{1.3}$$

Индексы i и j пробегают все значения от 1 до n. Индекс суммирования k называется *немым индексом* и не входит в результат.

Сопоставим каждому вектору $\vec{\boldsymbol{x}}$ матрицу – столбец из координат вектора, а базису $\vec{\mathbf{e}}_i$ – столбец, состоящий из базисных векторов:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}; \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Далее единичную матрицу будем обозначать $\mathbf{I}$, а не $\mathbf{E}$, как ранее.

1.1.2. Преобразование базисов. Перейдём от "старого" базиса $\vec{\mathbf{e}}_i$ к "новому" базису $\vec{\mathbf{e}}'_i$ с помощью соотношения:

$$\vec{\mathbf{e}}'_i = p^j_i \vec{\mathbf{e}}_j , \tag{1.5}$$

которое показывает, что в *матрице перехода* $\mathbf{P}=\left(p_j^i\right)$ *от базиса* $\vec{\mathbf{e}}_i$ *к базису* $\vec{\mathbf{e}}'_i$ координаты нового базисного вектора $\vec{\mathbf{e}}'_i$ по старому базису образуют i-й столбец. В дальнейшем штрихами будут обозначаться координаты геометрических объектов в новом базисе. Например,

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}; \; \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}'_1 \\ \vec{\mathbf{e}}'_2 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{e}}'_n \end{pmatrix}; \; \vec{\boldsymbol{x}} = x'^i \vec{\boldsymbol{e}}'_i . \qquad (1.6)$$

Запишем переход к новому базису в матричной форме:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \mathbf{E} , \qquad (1.7)$$

где символом $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ обозначена *транспонированная* матрица. Решая матричное уравнение (1.7) (метод решения представлен в пособии [10, с. 22]), получим формулы обратного перехода от базиса $\vec{\mathbf{e}}'_i$ к базису $\vec{\mathbf{e}}_i$ в матричной форме

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{E}' . \qquad (1.8)$$

Применяя известное свойство операции транспонирования матриц

$$\left(\mathbf{AB}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} ,$$

к соотношению

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I} \qquad (1.9)$$

получаем

$$(\mathbf{P}^{-1})^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \text{, откуда следует, что } \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} .$$

Учитывая это, (1.8) перепишем в виде:

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{E}' . \qquad (1.10)$$

Обозначим $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q} = \left(q_j^i\right)$. Из равенства (1.10) получаем формулы перехода от нового базиса к старому в координатной форме

$$\vec{\mathbf{e}}_i = q_i^j \vec{\mathbf{e}}'_j . \qquad (1.11)$$

Из соотношений (1.10) и (1.11) видно, что матрица $\mathbf{Q}$ играет роль матрицы перехода от базиса $\vec{\mathbf{e}}'_i$ к базису $\vec{\mathbf{e}}_i$. Использование этого факта упрощает вывод многих последующих формул.

Из соотношения (1.9) следует полезная формула

$$p_k^i q_j^k = \delta_j^i , \qquad (1.12)$$

где δ_j^i – *символ Кронекера*, определяемый равенствами:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, \text{ если} i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases}$$

Приведём несколько примеров применения символа Кронекера δ_j^i.

1. Если $u^1, u^2, \cdots, u^n$ – независимые переменные, то

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_j^i .$$

2. При использовании соглашения о суммировании по i $\delta_i^i = n$

3. Использование δ_j^i в операциях *подстановки* (замена одного индекса другим):

$$a_i \delta_k^i = a_k ; \; a^j \delta_j^k = a^k ; \; a_{jk} \delta_i^k = a_{ji} ; \; a^{jk} \delta_k^i = a^{ji} .$$

В тензорном исчислении используются также некоторые модификации символа Кронекера.

По определению, $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i$. Аналогично символу Кронекера δ_j^i вводится *обобщённый символ Кронекера:*

– если верхние индексы различны и нижние индексы получаются из верхних с помощью чётного количества *транспозиций* (перестановок соседних индексов), то по определению

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_p}^{i_1 i_2 \cdots i_p} = 1 ;$$

– если верхние индексы различны и нижние индексы получаются из верхних с помощью нечётного количества *транспозиций*, то

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = -1,$$

в остальных случаях

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = 0$$

П р и м е р 1.1. Вычислим все значения δ^{ik}_{jl} в случае $n = 2$. В силу определения обобщенного символа Кронекера, приведённого выше, получаем:

$$\begin{aligned}
&\delta^{11}_{11} = \delta^{11}_{12} = \delta^{11}_{21} = 0, \quad \delta^{22}_{22} = \delta^{22}_{12} = \delta^{22}_{21} = 0,\\
&\delta^{12}_{11} = \delta^{21}_{11} = \delta^{22}_{11} = 0, \quad \delta^{12}_{22} = \delta^{21}_{22} = \delta^{11}_{22} = 0,\\
&\delta^{12}_{12} = \delta^{21}_{21} = 1, \qquad\quad \delta^{12}_{21} = \delta^{21}_{12} = -1
\end{aligned}$$

1.1.3. Преобразование координат вектора. При переходе от нового базиса к старому координаты вектора преобразуются по закону, который может быть записан в матричной форме [10, с.11]

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}', \tag{1.13}$$

откуда следует его координатная форма

$$x^i = p^i_j x'^j. \tag{1.14}$$

Для обратного перехода от старого базиса к новому получаем соответствующие формулы:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X};\ x'^i = q^i_j x^j. \qquad (1.15).$$

1.1.4. Преобразование матрицы линейного преобразования. *Линейное преобразование (линейный оператор) А* представляет собой векторную функцию $\vec{\boldsymbol{y}}$ векторного аргумента $\vec{\boldsymbol{x}}$

$$A{:}\, \vec{\boldsymbol{y}} = A(\vec{\boldsymbol{x}}) \text{ или } \vec{\boldsymbol{y}} = A\vec{\boldsymbol{x}}, \tag{1.16}$$

обладающую свойством линейности:

$$A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A(\vec{x}_1)+A(\vec{x}_2),\ A(c\vec{x})=cA(\vec{x}), \tag{1.17}$$

где с – скаляр.

Пусть $\mathbf{A}=\left(a_j^i\right)$ – *матрица линейного преобразования* *A.* Тогда, как известно, линейное преобразование может быть представлено в виде матричного соотношения

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AX}, \tag{1.18}$$

или в координатной форме

$$y^i=a_j^i x^j. \tag{1.20}$$

В новом базисе $\vec{\mathbf{e}}'_i$ линейному преобразованию **A** соответствует новая матрица $\mathbf{A}'=\left(a'^i_j\right)$. Как известно [см. 10, с.68],

$$\mathbf{A}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP},$$

откуда следует формула преобразования элементов матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису:

$$a'^i_j=q_k^i a_m^k p_j^m. \tag{1.21}$$

1.1.5. Линейная функция и линейная форма. Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента $\varphi=f(\vec{x})$, линейную по этому аргументу:

$$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y});\ f(c\vec{x})=cf(\vec{x}) \tag{1.22}$$

Разложим вектор $\vec{x}$ по базису $\vec{\mathbf{e}}_i$: $\vec{x}=x^i\vec{\mathbf{e}}_i$. В силу линейности функции $f(\vec{x})$

$$f(\vec{x})=f\left(x^i\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\right)=x^i f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i})=a_i x^i, \tag{1.23}$$

где $a_i=f(\vec{\mathbf{e}}_i)$. Выражение в правой части (1.23) представляет собой линейный многочлен относительно координат вектора $\vec{x}$ и называется *линейной формой.* Таким образом, линейной функции $f(\vec{x})$ ставится в соответствие последовательность a_i коэффициентов соответствующей линейной формы, зависящая от выбора базиса.

В новом базисе $\vec{\mathbf{e}}'_i$ имеем:

$$f(\vec{x}) = f\left(x'^i \vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}}\right) = x'^i f\left(\vec{\mathbf{e}}'_i\right) = a'_i x'^i ,$$

где

$$a'_i = f\left(\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}}\right) = f\left(p_i^j \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}\right) = p_i^j f\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}\right) = p_i^j a_j ,$$

т.е. при переходе к новому базису коэффициенты a_i линейной формы преобразуются по следующему закону:

$$a'_i = p_i^j a_j . \tag{1.24}$$

Упражнения

1. Вывести формулу (1.11) из формулы (1.5), используя соотношение (1.12).

2. Вычислить все значения $\delta^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3}$ для $n = 3$.

3. Задан старый базис: $\vec{e}_1 = (1, 2), \vec{e}_2 = (2, 3)$ и матрица перехода к новому базису $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти новый базис $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$.

Решение

Столбцы матрицы $\mathbf{P}$ представляют собой координаты новых базисных векторов относительно старого базиса. Поэтому

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = (1, 1); \ \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (3, 5).$$

4. Задан старый базис $\vec{e}_1 = (1, 2), \vec{e}_2 = (2, 3)$ и новый базис $\vec{e}'_1 = (4, 7), \vec{e}'_2 = (1, 1)$. Найти матрицу перехода $\mathbf{P}$.

Решение

Элементы матрицы $\mathbf{P}$ образуют систему:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = p_1^1 \vec{e}_1 + p_1^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = p_2^1 \vec{e}_1 + p_2^2 \vec{e}_2 . \end{cases}$$

Подставляя координаты базисных векторов и решая полученные системы, находим

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу перехода можно найти иначе, из матричного соотношения (1.7), откуда следует, что

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}'\mathbf{E}^{-1}.$$

5. Заданы старый базис $\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1, 1, 1), \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (2, 0, 3), \vec{\boldsymbol{e}}_3 = (1, 2, 0)$ и новый базис $\vec{\boldsymbol{e}}_1' = (3, 1, 4), \vec{\boldsymbol{e}}_2' = (2, 3, 1), \vec{\boldsymbol{e}}_3' = (3, 2, 3)$. Найти матрицу перехода $\mathbf{P}$.

6. В старом базисе (см. выше, упражнение 4) задана матрица линейного преобразования

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{A}'$ линейного преобразования в новом базисе.

7. В старом базисе (см. выше, упражнение 5) задана матрица линейного преобразования

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $\mathbf{A}'$ линейного преобразования в новом базисе.

1.2. Понятие тензора

1.2.1. Определение тензора. В предыдущем параграфе были изучены некоторые объекты (векторы, линейные преобразования, линейные формы), которые в каждом базисе характеризуются определённым набором чисел, зависящим от выбранного базиса. Обобщая рассмотренные примеры, приходим к основному понятию – понятию *тензора.*

О п р е д е л е н и е. *Тензором* называется геометрический объект, который может быть определён независимо от базиса, но в каждом базисе характеризуется упорядоченным набором чисел – *компонент*. При переходе к другому базису новые компоненты являются линейными однородными многочленами старых компонент. *Основная идея тензорного исчисления* состоит в том, чтобы рассматривать один и тот же объект в разных базисах (и изучать, как изменяются его характеристики при изменении базиса).

Компоненты тензора упорядочивают, нумеруя их несколькими индексами, которые могут быть верхними или нижними. Например, a_i, b^i_j, c_{ij} и т. д. Для тензора в базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ используем обозначения $\{a_i\}, \{b^i_j\}, \{c_{ij}\}, \ldots$, а в базисе $\vec{\mathbf{e}}'_i$ – соответственно $\{a'_i\}, \{b'^i_j\}, \{c'_{ij}\}, \ldots$. Нижние индексы называются *ковариантными*[1], верхние – *контравариантными*[2]. По нижним индексам тензор преобразуется подобно тому, как преобразуются векторы базиса $\vec{\mathbf{e}}_i$ при переходе к новому базису $\vec{\mathbf{e}}'_i$ (см. (1.5)), т. е. с помощью матрицы перехода $\mathbf{P}$, а по верхним – подобно тому, как преобразуются координаты вектора $\vec{\boldsymbol{x}}$, т.е. с помощью матрицы $\mathbf{P}^{-1}$ (см.(1.15)). Тензор $A = \left\{a^{i_1 i_2 \ldots i_q}_{j_1 j_2 \ldots j_p}\right\}$ называется *тензором типа* (p, q), *валентности (ранга)* $p+q$. В пространстве L_n каждый индекс изменяется от 1 до n; поэтому тензор валентности $p+q$ имеет n^{p+q} компонент.

Пример 1.2. Тензор $\{a^i_j\}$ является тензором типа (1, 1). При переходе к новому базису его компоненты преобразуются по формуле $a'^i_j = q^i_k p^l_j a^k_l$. Индексы k и l являются *немыми*.

Пример 1.3. Тензор $\{a^{i_1 i_2}_j\}$ является тензором типа (1, 2). Закон изменения его компонент следующий:

$$a'^{i_1 i_2}_j = q^{i_1}_k q^{i_2}_m p^l_j a^{km}_l .$$

1.2.2. Примеры тензоров. 1. С к а л я р, т.е. величину, имеющую во всех базисах одно и то же значение, можно рассматривать как тензор валентности 0. Тензор, все компоненты которого равны 0 (в любой системе координат), называется *нуль-тензором* (нуль-тензор может быть любого типа).

[1] Ковариантный – согласованно изменяющийся.
[2] Контравариантный – противоположно изменяющийся.

2. Рассмотрим в некотором базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ набор величин $\{\delta^i_j\}$. Символ Кронекера не зависит от базиса, т.е. является *инвариантом*. Из свойств величины δ^i_j следует, что $p^m_j \delta^k_m = p^k_j$, т.е. из всех слагаемых суммы отлично от нуля только то слагаемое, для которого индекс суммирования $m = k$. Поэтому для базиса $\vec{\mathbf{e}}'_i$ имеет место соотношение

$$\delta'^i_j = \delta^i_j = q^i_k p^k_j = q^i_k p^m_j \delta^k_m;$$

из которого видно, что величины δ^i_j образуют тензор типа (1,1). При этом компоненты этого тензора составляют единичную матрицу $\mathbf{I}$.

3. В е к т о р $\vec{\boldsymbol{x}} = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ образует *контравариантный тензор* типа (0,1), что следует из формулы (1.15) преобразования координат вектора при переходе к новому базису:

$$x'^i = q^i_j x^j.$$

4. Л и н е й н о е п р е о б р а з о в а н и е A пространства L_n является тензором типа (1,1), так как матрица $\left(a^i_j\right)$ линейного преобразования при переходе к новому базису изменяется согласно соотношению (1.21):

$$a'^i_j = q^i_k a^k_m p^m_j.$$

Отметим, что *тождественному преобразованию*, переводящему каждый вектор пространства L_n в себя, соответствует тензор с единичной матрицей $\mathbf{I}$, рассмотренный в примере 2 настоящего пункта.

5. Л и н е й н а я ф у н к ц и я $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ характеризуется в базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ набором коэффициентов $a_i = f(\vec{\mathbf{e}}_i)$. Как было показано в подразделе 1.1, при переходе к базису $\vec{\mathbf{e}}'_i$ выполняется соотношение

$$a'_i = p^j_i a_i.$$

Это означает, что $\{a_i\}$ является тензором типа (1,0), т.е. *ковариантным тензором*.

6. Б и л и н е й н а я ф у н к ц и я – функция $f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$, *линейная по каждому аргументу*. Разложим векторы $\vec{\boldsymbol{x}}$ и $\vec{\boldsymbol{y}}$ по базису $\vec{\mathbf{e}}_i$: $\vec{\boldsymbol{x}} = x^i\vec{\mathbf{e}}_i$, $\vec{\boldsymbol{y}} = y^j\vec{\mathbf{e}}_j$. В силу определения билинейной функции,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(x^i\vec{\mathbf{e}}_i, y^j\vec{\boldsymbol{e}}_j\right) = x^i y^j f\left(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j\right) = a_{ij}x^i y^j, \qquad (1.25)$$

где $a_{ij} = f\left(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j\right)$. Таким образом, в базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ билинейная функция $f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$ описывается *билинейной формой* $a_{ij}x^i y^j$ (однородным многочленом второй степени от координат векторов $\vec{\boldsymbol{x}}$ и $\vec{\boldsymbol{y}}$).

В новом базисе $\vec{\mathbf{e}}'_i$

$$f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}) = a'_{ij}x'^i y'^j,$$

где
$$a'_{ij} = f\left(\vec{\mathbf{e}}'_i, \vec{\mathbf{e}}'_j\right) = f\left(p_i^k\vec{\mathbf{e}}_k, p_j^m\vec{\mathbf{e}}_m\right) = p_i^k p_j^m a_{km}, \qquad (1.26)$$

откуда следует, что коэффициенты билинейной формы являются компонентами тензора типа (2,0).

7. Аналогично можно рассмотреть т р и л и н е й н у ю ф у н к ц и ю $f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}})$, линейную по каждому аргументу, и соответствующую ей в базисе $\vec{\mathbf{e}}_i$ *трилинейную форму* $a_{ijk}x^i y^j z^k$, а также п о л и л и н е й н у ю ф у н к ц и ю $f(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, ..., \vec{\boldsymbol{x}}_m)$ и соответствующую ей *полилинейную форму* $a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$.

1.2.3. Запись компонент тензора. Для упорядочения компонент тензора принято нумеровать по порядку сначала верхние, затем нижние индексы,

У двухвалентного тензора первым индексом является номер строки, вторым – номер столбца. Например, компоненты тензоров $\{a_{ik}\}$ или $\{a_k^i\}$ в виде матрицы записывают так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Если валентность тензора больше двух, его компоненты образуют *пространственную матрицу*. Например, если валентность