№ 879

В.А. Треногин
И.С. Недосекина

Методы математической физики

Практикум

№ 879

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

В.А. Треногин
И.С. Недосекина

Методы математической физики

Практикум

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2012

УДК 53:51
Т66

Р е ц е н з е н т
канд. физ.-мат. наук *С.И. Валянский*

Треногин, В.А.
Т66 Методы математической физики : практикум / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2012. – 196 с.
ISBN 978-5-87623-611-1

Практикум описывает методы решения нескольких важных задач математической физики. Излагаемый теоретический материал дополнен большим количеством задач, которые могут быть использованы при проведении практических занятий. Основная задача практикума – научить читателя на сравнительно небольшом материале осмысленно применять основные методы решения задач математической физики.

Предназначен для студентов физико-химических специальностей и специальности «Прикладная математика» технических вузов.

УДК 53:51

ISBN 978-5-87623-611-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум знакомит с методами решения нескольких важных задач математической физики. Математическая физика занимается изучением математических моделей, описывающих разнообразные физические явления в основном в форме тех или иных задач для дифференциальных уравнений (ДУ) с частными производными. При этом обычно оказывается, что одна и та же математическая задача описывает сразу несколько, казалось бы, далеких друг от друга явлений.

В данном практикуме рассмотрены несколько наиболее важных классических задач математической физики, опираясь на простейшие соображения математического и функционального анализа и линейной алгебры. Практикум составлен на основе семестрового курса лекций, которые на протяжении многих лет читаются авторами студентам МИСиС, обучающимися по ряду физико-химических специальностей и специальности «Прикладная математика».

Первая часть начинается с изложения метода Фурье в применении к решению задач математической физики в пространственно ограниченных областях, который трактуется не как традиционный метод разделения переменных, а как более простой, на наш взгляд, геометрический метод разложения параметров задачи по некоторому базису – ортогональной системе собственных функций вспомогательного дифференциального оператора. Полученный в качестве решения функциональный ряд назван формальным решением задачи. Определенное внимание уделяется и таким важным вопросам теории, как классическое решение, его единственность, принцип максимума и энергетические соображения. При построении базиса из собственных функций используются такие простейшие понятия функционального анализа, как симметричность и неотрицательность линейных операторов в пространстве со скалярным произведением, а также свойства собственных значений и собственных функций таких операторов. Этот подход не только позволяет лучше понять структуру решения, но и существенно сократить вычисления.

Вторая часть посвящена задачам в пространственно неограниченных областях, для построения решений которых использован метод интегрального преобразования Фурье. Здесь же рассматриваются и другие важные для современного инженера-исследователя методы, например, метод подобия.

Теоретический материал иллюстрируется большим количеством решенных задач. В конце соответствующих разделов приведены задачи для самостоятельной работы. Это позволяет использовать данный материал при проведении практических занятий.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ). ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ В ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЯХ

1.1. Постановка задачи

Начнем с описания следующей задачи. Рассмотрим (рис. 1.1) в полуполосе

$$Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < +\infty\}$$

следующее дифференциальное уравнение (ДУ), называемое *уравнением диффузии* (*теплопроводности*):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

где $a^2 > 0$ – известный числовой параметр; правая часть $f(x, t)$ – известная функция, определенная на Q; $u = u(x, t)$ – неизвестная функция; t играет роль времени; x – пространственная переменная.

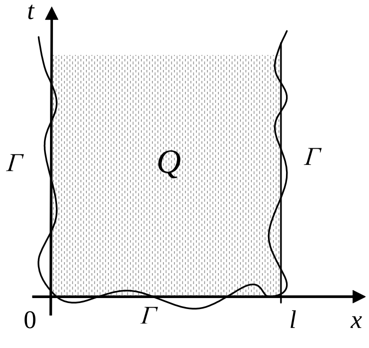

Рис. 1.1. Область определения функции $u\,(x, t)$

Дифференциальное уравнение (1.1) является уравнением с частными производными первого порядка по переменной t и второго порядка по x. По аналогии с обыкновенными ДУ, для устранения произвола в определении $u(x, t)$ следует задать дополнительные условия: одно по переменной t и два по x.

Дополнительное условие по переменной t (функция $\varphi(x)$ предполагается известной)

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,l] \tag{1.2}$$

называется начальным условием (оно задано на нижнем основании полуполосы Q).

Два дополнительных условия по переменной x

$$u(0,t)=\alpha_0(t), \;\; u(l,t)=\alpha_l(t), \quad t\in[0,+\infty) \tag{1.3}$$

называются граничными (или краевыми) условиями (они заданы на боковых сторонах полуполосы Q). Функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ также предполагаются известными.

Задача (1.1) – (1.3) называется смешанной задачей для ДУ диффузии (теплопроводности). В ней присутствуют и начальные, и граничные (краевые) условия. Иногда ее называют начально-краевой задачей.

Сформулируем, что мы будем понимать под решением задачи (1.1) – (1.3).

Обозначим через Γ границу области Q, тогда $\bar{Q}=Q\cup\Gamma$ – соответствующая замкнутая область. Существуют различные определения решения задачи (1.1) – (1.3). Ограничимся простейшим и наиболее употребляемым определением.

Определение 1.1. Функция $u(x, t)$, определенная в $\bar{Q}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (1.1) – (1.3), если:

1) $u(x, t)$ непрерывна в $\bar{Q}$ и удовлетворяет на ее границе Γ условиям (1.2) – (1.3);

2) частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q, а $u(x, t)$ удовлетворяет в Q уравнению (1.1).

Замечание 1.1. Если смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет классическое решение, то функция $f(x, t)$ непрерывна в Q, $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, а $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$ и, кроме того, выполнены условия согласования начального и граничных условий

$$\varphi(0)=\alpha_0(0), \;\; \varphi(l)=\alpha_l(0)\,. \tag{1.4}$$

1.2. Физическая интерпретация задачи

Смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет ряд полезных физических интерпретаций:

1. Является математической моделью явления распространения (иначе − диффузии) вещества (раствора, газа, расплавленного металла, нейтронов в металле и т.п.). Пусть задана трубка длины l (пустая или пористая). Коэффициент a^2 называется коэффициентом диффузии, он определяется физическими параметрами задачи. Внутри трубки могут существовать источники диффундирующего вещества. Функция $f(x, t)$ характеризует их плотность в сечении трубки с координатой x в момент времени t. В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ вещества в трубке (см. начальное условие (1.2)). На концах трубки вещество подается по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ (см. граничные условия (1.3)). Требуется определить концентрацию вещества $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t.

2. Дифференциальное уравнение (1.1) описывает также явление распространения тепла. Пусть задан стержень длины l. Боковая поверхность стержня предполагается теплоизолированной, т.е. тепло может проникать в стержень только через его концы. Коэффициент a^2 ($a > 0$) называется коэффициентом температуропроводности. Он определяется характеристиками материала стержня. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т.п.). Функция $f(x, t)$ характеризует плотность тепловых источников внутри стержня. В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ температуры в стержне. На концах стержня температура меняется по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$. Требуется определить температуру стержня $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t.

1.3. Построение решения задачи в простейших случаях

Отложим пока важный вопрос о том, существует ли решение задачи (1.1) – (1.3), единственно ли оно, и займемся формальным построением решения в простейших случаях.

Пример 1.1. Рассмотрим смешанную задачу для ДУ с нулевой правой частью и нулевыми граничными значениями (задача об остывании стержня, на концах которого поддерживается нулевая температура):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Найдем ее решение в виде

$$u(x,t) = A(t)\sin x,$$

где $A(t)$ – неизвестная пока функция.

Заметим, что граничные условия в этом случае автоматически выполняются, так как $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Остается подобрать функцию $A(t)$ так, чтобы искомое решение удовлетворяло ДУ и начальному условию. Сначала найдем производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A'(t)\sin x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A(t)\sin x.$$

Подставим их в ДУ и получим

$$\left[A'(t) + A(t)\right]\sin x = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых значениях x, то

$$A'(t) + A(t) = 0.$$

Воспользуемся начальным условием

$$u(x,0) = A(0)\sin x = \sin x,$$

откуда получим, что $A(0) = 1$.

Итак, неизвестная функция $A(t)$ может быть найдена как решение следующей задачи Коши для линейного ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} A'(t) + A(t) = 0, \\ A(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение этого ДУ имеет вид

$$A(t) = ce^{-t},$$

где c – произвольная постоянная.

Используя начальные условия, получим решение задачи Коши

$$A(t) = e^{-t}.$$

Таким образом, искомое формальное решение задачи (1.1) – (1.3) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x.$$

Проверить, что это решение является классическим решением рассматриваемой задачи!

Рассмотрим теперь задачу (1.1) – (1.3) при дополнительном существенном предположении, что граничные условия (1.3) однородные, т.е. $\alpha_0(t) = \alpha_l(t) = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l],$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \in [0,+\infty).$$

Оказывается, решение этой задачи можно формально построить в виде ряда Фурье по тригонометрической системе функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Обратим внимание, что все функции этой системы удовлетворяют рассматриваемым однородным краевым условиям. Важно также то обстоятельство, что данная система функций ортогональна на отрезке $[0, l]$ и является базисом в пространстве непрерывных на $[0, l]$ функций. Напомним, что всякая ортогональная система линейно независима.

Геометрическая идея метода Фурье состоит в следующем.

Разложим в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$ начальную функцию $\varphi(x)$ и правую часть уравнения $f(x, t)$, т.е. представим их в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $\varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x; \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Таким образом, здесь реализуется идея известного из курса аналитической геометрии метода разложения по базису.

Неизвестные пока коэффициенты $T_k(t)$ являются функциями от t и будут определены в процессе решения. Заметим, что функция $u(x, t)$ формально удовлетворяет краевым условиям, так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда ($\sin 0 = \sin k\pi = 0$).

Найдем формально входящие в уравнение производные от функции $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \;\; k = 1,\; 2, \dots .$

Подставляя соответствующие ряды в ДУ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(T_k' + a^2\lambda_k T_k)\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Воспользуемся начальным условием (1.2)

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая в выписанных рядах коэффициенты при $\sin\frac{k\pi x}{l}$, получим для определения $T_k(t)$ следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T_k' + a^2\lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k = 1,\; 2,\; \dots .$$

Решение каждой из этих задач можно записать в виде (проверить!)

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-s)} f_k(s)\mathrm{d}s.$$

Итак, построено формальное решение смешанной задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-s)} f_k(s)ds\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Вопрос о том, сходится ли ряд, представляющий функцию $u(x, t)$, а тем более ряды для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, будет рассмотрен далее (п. 4.3).

Заметим, что первая сумма в полученной формуле для $u(x, t)$ дает формальное решение задачи с нулевой правой частью, описывающей остывание стержня. Вторая сумма – формальное решение задачи с нулевой начальной функцией.

Пример 1.2. Решим смешанную задачу для неоднородного ДУ с нулевой начальной функцией и однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \ge 0.$$

В данном случае $l = \pi$ и решение задачи будем строить в виде разложения по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Сначала разложим по этому базису правую часть уравнения

$$f(x, t) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx,$$

где $f_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}(1 - (-1)^k).$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx.$$

Для определения $T_k(t)$ запишем следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T_k' + k^2 T_k = f_k, \\ T_k(0) = 0, \end{cases} \qquad k = 1,\ 2, \ldots .$$

Решая эти задачи, получим

$$T_k(t) = \frac{f_k}{k^2}(1 - e^{-k^2 t}).$$

Итак, формальное решение рассматриваемой задачи построено и имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k^3}(1-e^{-k^2t})\sin kx.$$

Заметим, что в полученном выражении слагаемые с четными номерами равны нулю. Поэтому окончательный ответ можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2l-1)^3}(1-e^{-(2l-1)^2t})\sin(2l-1)x.$$

Пример 1.3. Решим задачу для неоднородного ДУ с однородными граничными условиями и ненулевой начальной функцией

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;\\&u(x,0)=\sin 2x,\quad 0\le x\le\pi;\\&u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.\end{aligned}$$

Следуя методу Фурье, правую часть $f(x, t) = \sin x$ необходимо разложить по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Однако функция $\sin x$ сама является элементом этого базиса, т.е.

$$f(x,t)=\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin kx,$$

где $f_k=\begin{cases}1, & k=1,\\0, & k\ne 1.\end{cases}$

Аналогично начальная функция

$$\varphi(x)=\sin 2x=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin kx,$$

где $\varphi_k=\begin{cases}1, & k=2,\\0, & k\ne 2.\end{cases}$

В соответствии с методом Фурье решение ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin kx.$$

Поскольку в разложении правой части уравнения и начальной функции присутствуют лишь две базисные функции ($\sin x$ и $\sin 2x$), то и в решении останутся только слагаемые с этими функциями, т.е. решение можно найти в виде

$$u(x,t) = T_1(t)\sin x + T_2(t)\sin 2x.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и учитывая начальное условие, приходим к следующей паре задач Коши для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} T_1' + T_1 = 1, \\ T_1(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + 4T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что решением этих задач являются функции

$$T_1(t) = 1 - e^{-t}, \;\; T_2(t) = e^{-4t}.$$

Запишем окончательный ответ, представляющий классическое решение рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x,t) = (1 - e^{-t})\sin x + e^{-4t}\sin 2x.$$

1.4. Сведение смешанной задачи к случаю однородных граничных условий

Отметим, что описываемый нами вариант метода Фурье применим только к случаю смешанных задач с однородными граничными условиями. Если граничные условия (1.3) не являются однородными, то простой заменой неизвестной функции исходную задачу можно свести к задаче с однородными граничными условиями.

Пусть функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывно дифференцируемы на полуоси $[0, +\infty)$. Сделаем замену неизвестной функции, полагая

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + w(x,\, t),$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция; $w(x, t)$ – любая дважды дифференцируемая по x и один раз по t известная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.3).

Например,

$$w(x,\, t) = \alpha_0(t) + \frac{x}{l}\left[\alpha_l(t) - \alpha_0(t)\right],$$

тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha_0'(t)+\frac{x}{l}\left[\alpha_l'(t)-\alpha_0'(t)\right]$$

и для новой неизвестной функции $v(x, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F(x,t),$$

где $F(x,t)=f(x,t)-\alpha_0'(t)-\frac{x}{l}\left[\alpha_l'(t)-\alpha_0'(t)\right].$

Далее

$$u(x,0)=v(x,0)+\alpha_0(0)+\frac{x}{l}\left[\alpha_l(0)-\alpha_0(0)\right],$$

значит, для функции $v(x, t)$ имеем начальное условие

$$v(x,0)=\varphi(x)-\alpha_0(0)-\frac{x}{l}\left[\alpha_l(0)-\alpha_0(0)\right]\equiv\Phi(x).$$

Наконец, граничные условия для $v(x, t)$ приобретают вид

$$v(0,t)=v(l,t)=0.$$

Итак, для определения функции $v(x, t)$ получили смешанную задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0;\\
&v(x,0)=\Phi(x),\quad 0\le x\le l;\\
&v(0,t)=v(l,t)=0,\quad t\ge 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что если выполнено условие согласования (1.4), то аналогичное условие выполнено и для $v(x, t)$.