№ 623

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра физики

ФИЗИКА

Механика
Молекулярная физика
Термодинамика

Учебное пособие
для самостоятельной работы по решению задач
для студентов инженерных специальностей

Под редакцией проф. Г.М. Ашмарина

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института
в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 531/534+539.19+536(075)
Ф 503

Физика: Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: Учеб. пособие для самостоятельной работы по решению задач /Под. ред. Г.М. Ашмарина. М.: МИСиС, 2001. 185 с.

Авторы: Т.М. Ахметчина (гл. 2), Н.Г. Богомолова (гл. 9–11), В.И. Бузанов (гл. 5–8), В.А. Докучаева (гл. 1, 4), И.Г. Поволоцкая (гл. 3), О.А Ушакова (гл. 12, 3 и 13).

Ответственный редактор В.А. Докучаева

В учебном пособии приведены краткие теоретические сведения по механике, молекулярной физике и термодинамике. Содержится подробная методика решения задач по указанным разделам физики, начиная с самых простых и заканчивая более сложными.

Предназначено для дополнительной самостоятельной работы студентов I курса инженерных специальностей.

АХМЕТЧИНА Татьяна Михайловна

БОГОМОЛОВА Надежда Григорьевна

БУЗАНОВ Василий Иванович

ДОКУЧАЕВА Валерия Агафангеловна

ПОВОЛОЦКАЯ Инна Григорьевна

УШАКОВА Ольга Анатольевна

ФИЗИКА

Механика
Молекулярная физика
Термодинамика

Учебное пособие
для самостоятельной работы по решению задач
для студентов инженерных специальностей

Рецензент доц. Ю.С. Старк

Техническое редактирование Л.В. Иванковой

Подписано в печать	Объем 185 стр.	Тираж 2100 экз.
Заказ 449/877	Цена “С”	

Московский государственный институт стали и сплавов.
119991, Москва, Ленинский пр-т, 4.
Отпечатано в типографии издательства «Учеба» МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по освоению методики решения задач по разделам: механика, молекулярная физика и термодинамика курса «Физика», изучаемого в институте студентами инженерных специальностей.

В начале каждого раздела даны основные теоретические положения, необходимые для решения задач по данной теме.

Решение каждой задачи дается с подробными объяснениями, предназначенными для студентов, имеющих проблемы в школьной подготовке по физике. В каждом разделе даны задачи разной степени сложности, начиная от самых простых и заканчивая более сложными. Формулы в задачах пронумерованы цифрой со звездочкой в отличие от формул в теоретической части.

Работа над данным пособием должна помочь студенту освоить методику решения задач и подготовить его к экзамену по курсу физики.

Порядок решения задач:

1. Внимательно изучить текст задачи.
2. Написать «Дано» и выписать все величины, данные в тексте задачи.
3. Перевести значения этих величин в единицы СИ.
4. Сделать рисунок, на который вынести все «данные» по условию задачи, а также четко обозначить векторные величины, используя законы физики, указанные в разделе.
5. Решить задачу в общем виде, т. е. вывести формулу, выражающую искомую величину.
6. В эту формулу подставить числа и сделать расчет.
7. Записать ответ: численное значение и размерность искомой величины.

I. МЕХАНИКА

Механика изучает относительное движение – перемещение тел друг относительно друга. Она делится на кинематику и динамику.

Кинематика изучает перемещение тел во времени и пространстве, не интересуясь причинами его возникновения.

Тело, относительно которого происходит перемещение, и связанная с ним система координат (например, декартова система *XYZ*) образуют систему отсчета. Относительно такой системы отсчета тело может двигаться поступательно, вращаться или совершать поступательно-вращательное движение.

Поступательным называется такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. По виду траектории (кривой, по которой перемещается тело относительно системы отсчета) различают прямолинейное и криволинейное движение. Начнем с движения материальной точки-тела, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Прямолинейное движение

Если тело движется по прямой линии, то движение называется прямолинейным (например, движение паровоза по рельсам).

Это движение характеризуется тремя параметрами кинематики:

вектором перемещения $\vec{r}$, м;

мгновенной скоростью $\vec{v}$, м/с;

ускорением $\vec{a}$, м/с^2.

Вектором перемещения $\vec{r}$ называется вектор, проведенный из начальной точки траектории движения в конечную. Рассматривают также путь S – расстояние, пройденное телом. Например, если материальная точка движется из пункта A в пункт C через пункт B (рис. 1), то вектор перемещения $\vec{r} = \vec{r}_{AC}$, а модуль вектора $|\vec{r}_{AC}| = AC$, в то время как пройденный телом путь $S = ABC$. Видим, что $|\vec{r}_{AC}| \neq S$. Отрезок $AC < (AB + BC)$. Поэтому можно сравнивать только элементарные значения модуля вектора перемещения и пути:

$$|d\vec{r}| = dS. \tag{1}$$

Рис. 1

Вектор перемещения важен тем, что указывает направление движения, а путь – это только расстояние, при этом неизвестно, в какую сторону двигалось тело.

Мгновенная скорость $\vec{v}$ вводится так:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ или } |\vec{v}| = \frac{dS}{dt}. \tag{2}$$

Мгновенная скорость равна производной от вектора перемещения по времени. Средняя же по величине скорость по интервалу времени Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{3}$$

т. е. весь путь ΔS, пройденный за время Δt, деленный на это время Δt.

Мгновенное ускорение $\vec{a}$ вводится так:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{4}$$

т. е. мгновенное ускорение равно производной от вектора скорости по времени или второй производной от вектора перемещения по времени.

Среднее же значение ускорения по интервалу времени Δt:

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{5}$$

т. е. полное изменение скорости Δv за время Δt, деленное на время Δt.

Решение задач по кинематике связано с рассмотрением указанных выше трех параметров кинематики. Иногда задают функцию $S(t)$ – зависимость пути от времени движения, а найти нужно $v(t)$ и $a(t)$ (прямая задача кинематики), а иногда задают функцию $a(t)$ – зависимость ускорения от времени движения тела, а найти нужно $v(t)$, $S(t)$ (это обратная задача кинематики). Рассмотрим решение типичных задач по кинематике.

Задача 1.1

Тело движется прямолинейно. Зависимость пути S от времени t дается уравнением $S = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$, где $\alpha = 3$ м/с, $\beta = 2$ м/с^2, $\gamma = 1$ м/с^3. Определить зависимость скорости v и ускорения a от времени t. Чему равно ускорение через 3 с после начала движения?

Дано:

$S = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$

$\alpha = 3$ м/с

$\beta = 2$м/с^2

$\gamma = 1$ м/с^3

$t = 3$ с

$\upsilon(t) - ?$

$a(t) - ?$

$a_t - ?$

Решение

1. По определению скорость $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ или $\upsilon = \frac{ds}{dt}$, берем производную $\frac{dS}{dt} = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2$, тогда $\upsilon(t) = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2$.

2. По определению ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ или $|\vec{a}| = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}$, берем производную от скорости, т. е. $a(t) = 2\beta + 6\gamma t$.

3. $a = 2\beta + 6\gamma t$ при $t = 3$ с. Подставим числовые значения:
$a_{t=3} = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 18 = 22$ м/с^2.

Ответ: $a_t = 22$ м/с^2.

Задача 1.2

Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением $a = 5$ м/с^2. Найти зависимость скорости и пройденного пути от времени. Чему равна скорость через 10 мин после начала движения?

Дано:

$a = 5$ м/с^2

$t = 10$ мин$=600$ с

$\upsilon(t) - ?$

$S(t) - ?$

$\upsilon - ?$

Решение

1. По определению ускорение $a = \frac{d\upsilon}{dt}$, тогда $d\upsilon = adt$; берем интеграл

$$\upsilon = \int adt = at + C \qquad (1^*)$$

Постоянную интегрирования C найдем из начальных условий. При $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, $C = \upsilon_0$. Подставив C в (1^*), получим

$$\upsilon = \upsilon_0 + at, \qquad (2^*)$$

т. е. $\upsilon \Rightarrow \upsilon(t)$.

2. По определению скорость $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ или $|\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$, тогда $dS = \upsilon dt$, интегрируем

$S = \int \upsilon dt = \int (\upsilon_0 + at)dt = \int \upsilon_0 dt + \int atdt = \upsilon_0 t + a\frac{t^2}{2} + C$. Пусть при $t = 0$, $S = S_0$ – начальный путь. Тогда $S_0 = C$ и

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

т. е. $S \Rightarrow S(t)$.

3. Ищем значение скорости через $t = 600$ с из (2*) $v = v_0 + at$. Если начальная скорость не задана, очевидно, она равна нулю, т. е. $v_0 = 0$. $v = at$; $v = 5 \cdot 600 = 3000$ (м/с) = 3 км/с.

Ответ: $v = 3$ км/с.

Задача 1.3

Байдарка из точки A направляется со скоростью $v = 3$ м/с перпендикулярно реке к другому берегу (рис. 2), расстояние до которого $L = 300$ м. Течение воды со скоростью $U = 4$ м/с относит ее на расстояние $\ell = 400$ м вниз по реке. Найти результирующую скорость движения байдарки относительно берега $\vec{v}_0$ и время, затраченное на переправу через реку.

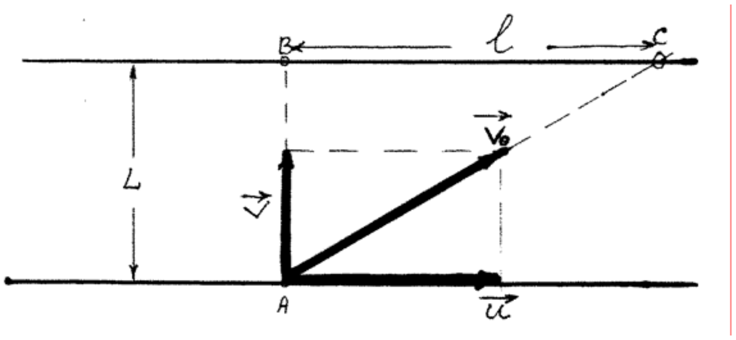

Рис. 2

Дано:
$v = 3$ м/с
$U = 4$ м/с
$L = 300$ м
$\ell = 400$ м

v_0 – ?
t – ?

Решение

1. Результирующая скорость движения равна векторной сумме скоростей $\vec{v}$ и $\vec{U}$ и находится по правилу параллелограммов. В данном случае $\vec{v} \perp \vec{U}$, поэтому величину результирующей скорости найдем по теореме Пифагора. $\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{U}$, а $|\vec{v}_0| = \sqrt{v^2 + U^2}$. Подставим значения скоростей $v_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ м/с.

2. Время движения (равномерного) байдарки $t = \frac{L}{v}$ или $t = \frac{\ell}{U}$ или $t = \frac{AC}{v_0}$. $t = \frac{300}{3} = 100$ с.

Ответ: $v_0 = 5$ м/с; $t = 100$ с.

Задача 1.4

Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на Землю спустя время $t = 5$ с. Какова начальная скорость υ_0 тела и на какую максимальную высоту оно поднялось?

Дано:

$t = 5$ с

$g = 9{,}8$ м/с^2

υ_0 – ?

h_{max} – ?

Решение

Гравитационное поле Земли сообщает свободно падающему телу ускорение $g = 9{,}8$ м/с^2 = const. Значит, движение тела вниз будет равноускоренным. При движении вверх вектор ускорения направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и движение будет равнозамедленным. В этом случае скорость и путь (высота) зависят от времени (рис. 3) и вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \upsilon = \upsilon_0 \pm gt, & (1^*) \\ h = \upsilon_0 t \pm g\dfrac{t^2}{2}. & (2^*) \end{cases}$$

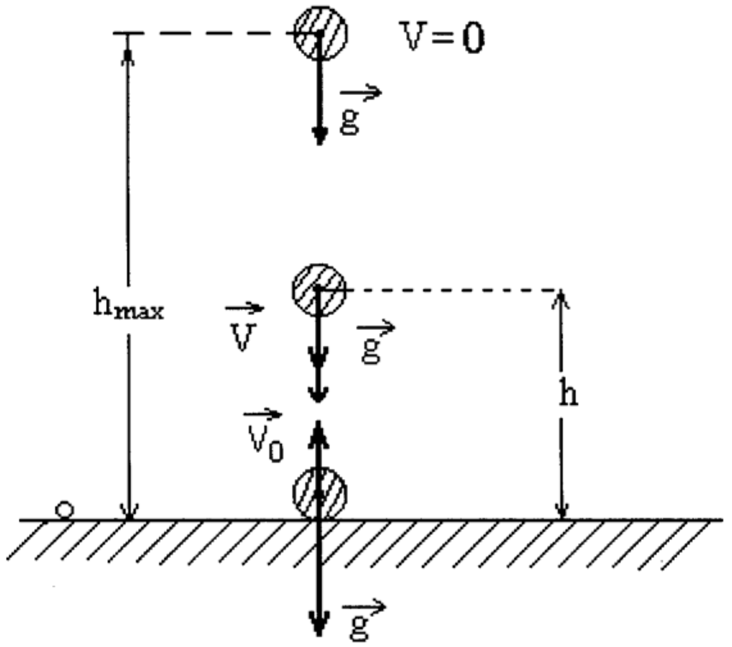

Рис. 3

Знак минус перед ускорением g означает, что $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{g}$ направлены в противоположные стороны. Итак, поднимаясь вверх, тело движется равнозамедленно, останавливается ($\upsilon = 0$) и падает вниз равноускоренно. В момент остановки высота будет максимальной $h_{\max}$. Из формул (1^*) и (2^*) $0 = \upsilon_0 - gt_{\text{под}} \Rightarrow \upsilon_0 = gt_{\text{под}}$. Учитываем, что время подъема равно времени падания $t_{под} = t_{пад} = 2{,}5$ с; $h_{max} = \upsilon_0 t_{под} - \dfrac{g t_{под}^2}{2} = g t_{пад}^2 - \dfrac{g t_{под}^2}{2} = \dfrac{g t_{пад}^2}{2}$. Отсюда $\upsilon_0 = 9{,}8 \cdot 2{,}5 = 24{,}5$ м/с; $h_{max} = \dfrac{9{,}8 \cdot 2{,}5^2}{2} 30{,}63$ м.

Ответ: $\upsilon_0 = 24{,}5$ м/с; $h_{max} = 30{,}63$ м.

Задача 1.5

Тело *1* движется равноускоренно с начальной скоростью $\upsilon_{01} = 2$ м/с и ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2. Через время $\Delta t = 10$ с после начала движения тела *1* из этой же точки начинает двигаться равноускоренно тело *2* с начальной скоростью $\upsilon_{02} = 12$ м/с и тем же ускорением a. Найти время, за которое тело *2* догонит тело *1*.

Дано:
$\upsilon_{01} = 2$ м/с
$\upsilon_{02} = 12$ м/с
$a = 0{,}1$ м/с^2
$\Delta t = 10$ с
t – ?

Решение

Тела *1* и *2* двигаются равноускоренно с одним ускорением и проходят одинаковый путь S, но второе тело вышло на 10 с позднее, чем первое. Если время движения тела *1* обозначить t, то время движения тела *2* будет меньше $(t - 10)$. Запишем формулу для пути равноускоренного движения тела *1* и тела *2*:

$$\begin{cases} S = \upsilon_{01} t + \dfrac{a t^2}{2}, \\ S = \upsilon_{02} t(t - 10) + \dfrac{a(t-10)^2}{2}. \end{cases}$$

Для упрощения решения подставим коэффициенты:

$$S = 2t + \frac{0{,}1}{2} t^2 = 12(t - 10) + \frac{0{,}1}{2}(t - 10)^2.$$

Отсюда

$$2t + 0{,}05t^2 = 12t - 120 + 0{,}05\left(t^2 - 20t + 100\right),$$

$$2t + 0{,}05t^2 = 12t - 120 + 0{,}05t^2 - t + 5;\ 9t = 115;\ t = 12{,}8 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 12{,}8$ с.

1.2. Криволинейное движение

Если траектория движения тела (материальной точки) – кривая линия, то движение называется *криволинейным*. В этом случае рассматриваются те же параметры кинематики, что и при прямолинейном движении:

вектор перемещения $\vec{r}$ – это вектор, проведенный из начальной точки *1* в конечную точку *2* движения тела (рис. 4). Путь S – расстояние, пройденное телом, в нашем случае – дуга. Ясно, что $S > |\vec{r}|$, но $dS = dr$ (вблизи точки *1*);

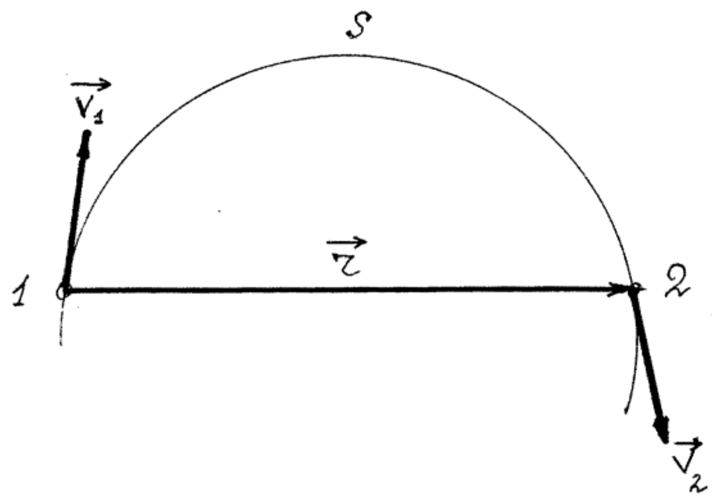

Рис. 4

вектор скорости определяется как производная вектора перемещения по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{6}$$

Средняя в интервале Δt скорость движения точки

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{7}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения;

ускорения:

– <u>тангенциальное</u> $\vec{a}_\tau$ характеризует изменение скорости по величине.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \tag{8}$$

направлено, как и скорость, по касательной к траектории движения;

– <u>нормальное</u> $\vec{a}_n$ характеризует изменение скорости по направлению.

$$|\vec{a}_n| = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{9}$$

(R – радиус кривизны траектории), направлено a_n по радиусу кривизны к центру кривизны, поэтому называется центростремительным ускорением;

– полное ускорение при криволинейном движении равно векторной сумме $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. По величине же полное ускорение ищем по теореме Пифагора, так как $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$ (рис. 5).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \tag{10}$$

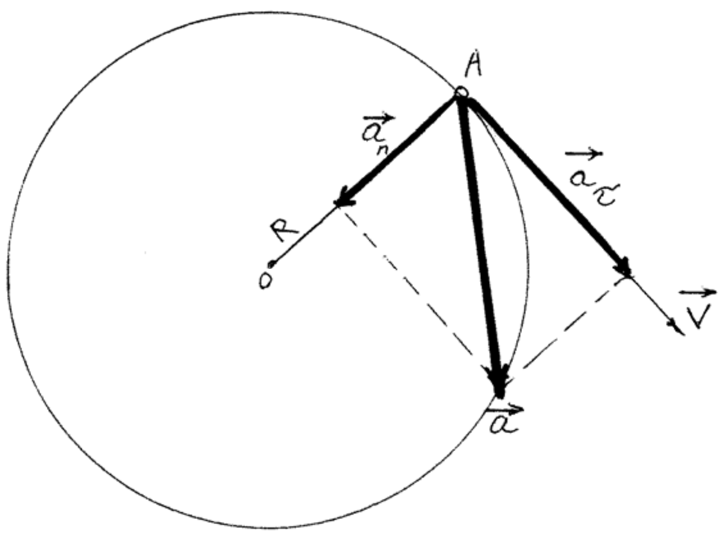

Рис. 5

Задача 1.6

Материальная точка движется по окружности радиусом R с постоянным ускорением $a_\tau = 5\cdot 10^{-3}$ м/с^2. Найти радиус кривизны траектории через $t = 10$ с после начала движения, если в это время нормальное ускорение в 2 раза больше тангенциального?

Дано:

$a_\tau = 5\cdot 10^{-3}$ м/с^2

$a_n = 2a_\tau$

$t = 10$ с

R – ?

Решение

По определению нормальное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ (например, в точке A, см. рис. 5); найдем скорость. Учитывая, что ускорение по определению равно $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$,

запишем $d\upsilon = a_\tau dt$, а $\upsilon = \int\limits_0^t a_\tau dt$, $\upsilon = a_\tau \int\limits_0^t dt = a_\tau t$, тогда $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \dfrac{a_\tau^2 t^2}{R}$, но

$a_n = 2a_\tau$ (дано); получим равенство: $\dfrac{a_\tau^2 t^2}{R} = 2a_\tau$,

$$R = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{2} = 0{,}25\,\text{м}.$$

Ответ: $R = 0{,}25$ м.

Задача 1.7

Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью υ_0. Найти уравнение траектории тела, т. е. зависимость $y(x)$. Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:
α
υ_0

$y(x)$ – ?

Решение

Рассмотрим сложное движение тела (рис. 6) как два движения: относительно оси X (внешние силы не действуют) и относительно оси Y (действует сила тяготения).

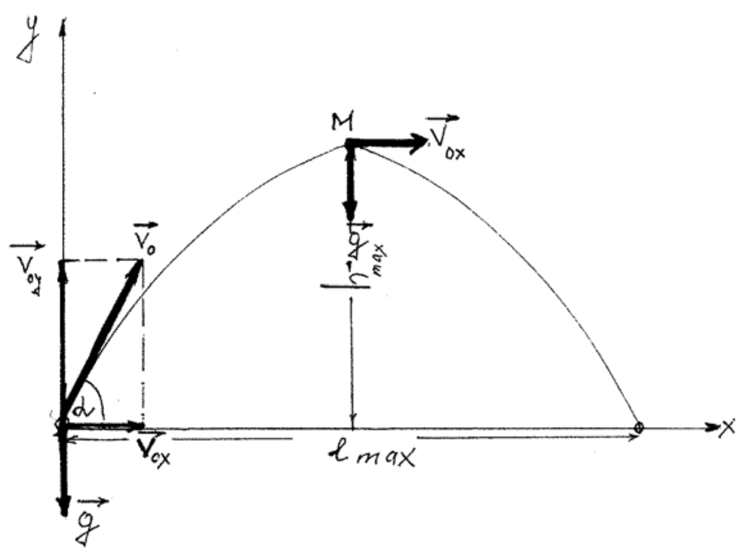

Рис. 6

Спроектируем вектор начальной скорости на оси X, $У$. Начальная скорость по оси X равна $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha$, а по оси Y $\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha$. В горизонтальном направлении силы не действуют. В любой момент времени скорость $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\cdot\alpha = \text{const}$ – движение равномерное; по оси $У$ – движение равнозамедленное: $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha - gt$, так как действует сила тяжести. Ускорение силы тяжести (в любой точке траектории) равно g. Пройденные пути: по оси X – равномерное движение $x = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$; по оси у: $y = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Чтобы найти $y(x)$, исключим t из последних уравнений: $t = \dfrac{x}{\upsilon_0 \cdot \cos\alpha}$ подставим в y: $y = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \dfrac{x}{\upsilon_0 \cdot \cos\alpha} - \dfrac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$;

$$y = \underset{\underset{C_1}{/\!/}}{\text{tg}\,\alpha}\cdot x - \underset{\underset{C_2}{/\!/}}{\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}}\cdot x^2,$$ иначе $y = C_1x - C_2x^2$, где C_1 и C_2 – const. Тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе.

Ответ: $y(x) = tg\alpha\cdot x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$.

Задача 1.8

Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 7). Найти начальную скорость v_0 и угол α, если известно, что максимальная высота подъема $h_{max} = 3{,}0$ м и радиус кривизны траектории в высшей точке траектории $R = 5$ м.

Дано:
$h_{max} = 3{,}0$ м
$R = 5$ м
v_0 – ?
α – ?

Решение

Вектор скорости в любой точке траектории направлен по касательной к ней. Высота подъема – это путь по оси Y, он равен $y = v_0\cdot\sin\alpha\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$. $y = h_{max}$, если тело при движении вверх останавливается, т. е. $v_y = 0$,

$v_y = v_0\cdot\sin\alpha - gt = 0$, это произойдет через время $t = \dfrac{v_0\cdot\sin\alpha}{g}$. Подставив это в формулу для y, получим

$$h_{max} = \frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{g} - \frac{gv_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g}.$$

В этом равенстве два неизвестных: v_0 и α. Поэтому рассмотрим R. Радиус кривизны траектории в точке M (см. рис. 7) найдем из формулы нормального ускорения $\dfrac{v_x^2}{R} = a_n = g$ ($\vec{g}$ – это полное ускорение в любой точке траектории, но в точке M $a_\tau = 0$), а скорость $v_x = v_0\cos\alpha$, следовательно,

$$g = a_n = \frac{v_x^2}{R} \quad\rightarrow\quad R = \frac{v_x^2}{g} = v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{g}.$$

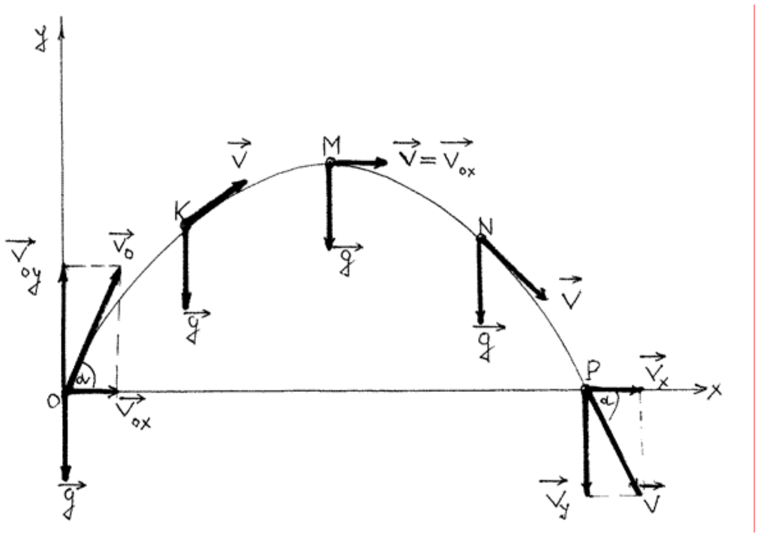

Рис. 7

Итак, имеем два уравнения и два неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} h_{\max} &= \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \\ R &= \frac{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}{g}. \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{h_{\max}}{R} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\alpha,\;\; \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{R}};\;\; \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{5}} = \sqrt{1{,}2};\; \alpha = 47°50' \cong 48°.$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2gh_{\max}}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 3}{\sin^2 48^\circ}} = 10{,}44 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\alpha = 48°$; $\upsilon_0 = 10{,}44$ м/с.

Задача 1.9

Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис. 8). Найти нормальное ускорение тела через 5 с после начала движения.

Дано:
$\upsilon_0 = 200$ м/с
$\alpha = 30°$
$t = 5$ с
$a_n - ?$

Решение

Определим через $t = 5$ с, будет тело на подъеме или на спуске. Рассчитаем время подъема: $t_{\text{под}} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$ (так как тело останавливается, то $\upsilon_y = 0$, т. е. $\upsilon_{0y} - g t_{\text{под}} = 0$). Отсюда $t_{\text{под}} = \dfrac{200\sin 30^\circ}{9{,}8} \cong 10$ с. Через $t = 5$ с тело будет еще подниматься. Пусть оно попадает в точку M траектории (см. рис. 8).

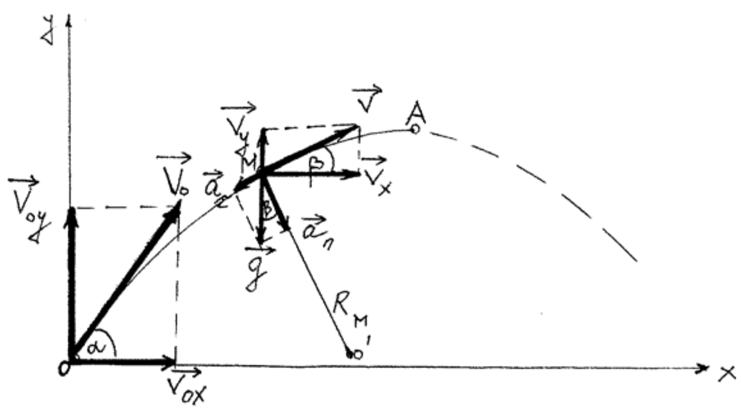

Рис. 8

Скорость всегда направлена по касательной к траектории, а радиус кривизны всегда перпендикулярен к касательной. В рассматриваемом случае полное ускорение тела в любой точке траектории равно $\vec{g}$ (ускорению свободного падения). Нормальное же ускорение направлено по радиусу кривизны. Найдем его, спроектировав полное ускорение на радиус $a_n = g\cos\beta$, т. е. a_n равно проекции полного ускорения $\vec{g}$ на радиус кривизны, умноженной на орт по R (центростремительное ускорение). Ищем угол β из Δ скоростей. В момент времени t: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$. Углы β между ускорениями $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ и β между скоростями $\vec{\upsilon}_y$ и $\vec{\upsilon}_x$ равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\upsilon_{0y} - gt}{\upsilon_{0x}} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$. Подставим данные значения: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{200\sin 30^\circ - 9{,}8\cdot 5}{200\cos 30^\circ} = 0{,}289$, отсюда $\beta = 16{,}7^\circ$. $a_n = g\cos\beta$, $a_n = 9{,}8\ \cos 16{,}7^\circ = 9{,}4$ м/с^2.

Ответ: $a_n = 9{,}4$ м/с^2.

Задача 1.10

Два тела брошены из одной точки поля тяжести Земли с горизонтальными, но направленными в противоположные стороны скоростями: $\upsilon_1 = 6{,}0$ м/с и $\upsilon_2 = 8$ м/с (рис. 9). Найти расстояние между телами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

Дано:

$\upsilon_{x1} = 6{,}0$ м/с

$\upsilon_{x2} = 8{,}0$ м/с

$\vec{\upsilon}_1 \perp \vec{\upsilon}_2$

ℓ – ?

Решение

Предположим, что $\vec{\upsilon}_1 \perp \vec{\upsilon}_2$ в тот момент, когда первое тело находится в точке A, а второе – в точке B. Вектор скорости $\vec{\upsilon}_1$ и вектор скорости $\vec{\upsilon}_2$ раскладываем на горизонтальную и вертикальную составляющие.

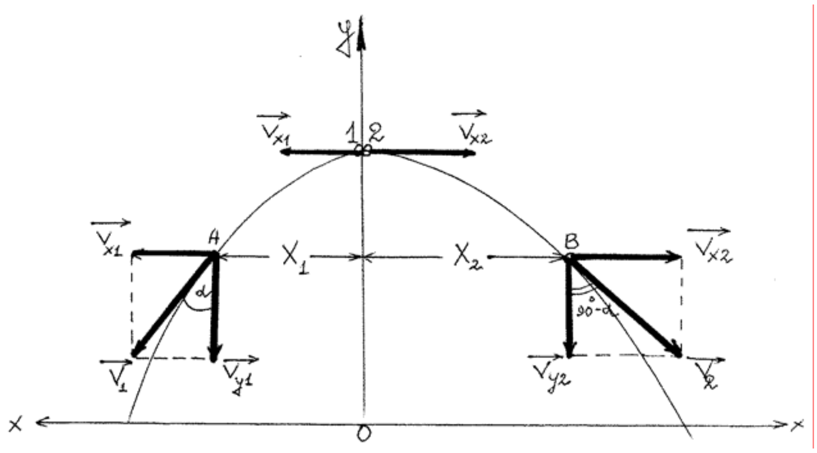

Рис. 9

Горизонтальные составляющие скоростей не меняются при движении тела (так как в этом направлении никакие силы не действуют), т. е. $\upsilon_{x1} = \text{const}, \upsilon_{x2} = \text{const}$. В вертикальном направлении (по оси *У*) оба тела падают равноускоренно без начальной скорости, т. е. $\upsilon_{y1} = \upsilon_{y2} = gt$, где g – ускорение свободного падения. Введем угол α (см. рис. 9). Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\upsilon_{x1}}{\upsilon_{y1}} = \dfrac{\upsilon_{x1}}{gt}$; с другой стороны, так как $\vec{\upsilon}_1 \perp \vec{\upsilon}_2$, $\operatorname{tg}(90-\alpha) = \dfrac{\upsilon_{x2}}{\upsilon_{y2}} = \dfrac{\upsilon_{x2}}{gt}$. Следовательно, время движения

$$t = \frac{\upsilon_{x1}}{g\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\upsilon_{x2}}{g\operatorname{tg}(90-\alpha)}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}(90-\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, получим $\dfrac{\upsilon_{x1}}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \upsilon_{x2} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\upsilon_{x1}}{\upsilon_{x2}}$, а $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{\upsilon_{x1}}{\upsilon_{x2}}}$. Тогда время движения *t* можно выразить только через скорости; $t = \dfrac{\upsilon_{x1}}{g\sqrt{\dfrac{\upsilon_{x1}}{\upsilon_{x2}}}} = \dfrac{\upsilon_{x2}}{g} \cdot \sqrt{\dfrac{\upsilon_{x1}}{\upsilon_{x2}}} = \dfrac{\sqrt{\upsilon_{x1} \cdot \upsilon_{x2}}}{g}$. Осталось найти расстояние между телами ℓ: $\ell = (\upsilon_{x1} + \upsilon_{x2}) \cdot \dfrac{\sqrt{\upsilon_{x1} \cdot \upsilon_{x2}}}{g}$. Подставим числа: $\ell = (6+8) \cdot \dfrac{\sqrt{6 \cdot 8}}{9{,}8} = 14 \cdot \dfrac{\sqrt{48}}{9{,}8} = 9{,}9$ м.

Ответ: $\ell = 9{,}9$ м.