№ 1608

Ю.А. Рахштадт
Н.В. Чечеткина

Физика

Колебания и волны

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

№ 1608

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра физики

Ю.А. Рахштадт
Н.В. Чечеткина

Физика

Колебания и волны

Учебное пособие
для студентов специальностей 1102, 0709, 1209, 2202

Под редакцией проф. Г.М. Ашмарина

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института

Москва Издательство «УЧЕБА» 2003

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие соответствует программе учебного курса «Физика» факультета информатики и экономики. Оно призвано помочь студентам освоить теоретический курс, выработать навыки решения задач и подготовиться к экзаменам, коллоквиумам и контрольным работам. В пособие включены: краткие сведения по теории, примеры решения задач и домашние задания по разделу «Колебания и волны».

Студенты выполняют еженедельно один из вариантов (по указанию преподавателя) каждого домашнего задания. Задание состоит из нескольких задач. Решение каждой задачи должно содержать: графики, рисунки или векторные диаграммы; уравнения соответствующих физических законов; расчетные формулы в общем виде; численное решение; ответы в системе СИ с точностью до трех значащих цифр. Особое внимание студент должен обратить на формулы и уравнения, содержащие векторные величины.

Авторы благодарят: за запись и компьютерную обработку рукописи лекций студентов группы ММ-98-1 Д. Бочарова, Е. Кошкину, А. Кучеренко и группы МП-98 Н. Белякову и В. Кочетову, за компьютерную обработку рукописи примеров решений задач студентов группы ММ-98-1 С. Мельникова и группы МИ-98-2 Н. Алексееву, Ю. Беляйкину и Е. Зазолину, за помощь при проверке ответов к задачам настоящего пособия студентов группы ММ-99-1 Е. Борисову, К. Логинову, Е. Москвину и Н. Эккель.

Глава 11. Колебания

Колебательное движение (колебание) – это изменение состояния вещества или поля, характеризуемое повторяемостью во времени определенной физической величины ξ.

Виды колебаний

- Периодические (гармонические и негармонические) и непериодические.
- Собственные, затухающие, вынужденные, параметрические и автоколебания.
- Механические, электромагнитные и др.

Линейный гармонический осциллятор

Колебательная система, совершающая собственные колебания по гармоническому закону $\xi(t) = A\cos(\omega_0 + \varphi)$ *называется линейным гармоническим осциллятором (ЛГО).*

Примеры ЛГО

1. Пружинный маятник – материальная точка массой m, подвешенная на пружине жесткостью k.
2. Физический маятник – абсолютно твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.
3. Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити длиной ℓ.
4. Электрический колебательный контур – электрическая цепь, содержащая емкость C и индуктивность L.

Энергетика ЛГО

Движение в любой потенциальной яме $U = U(\xi)$ есть колебательное движение (рис. 11.1).

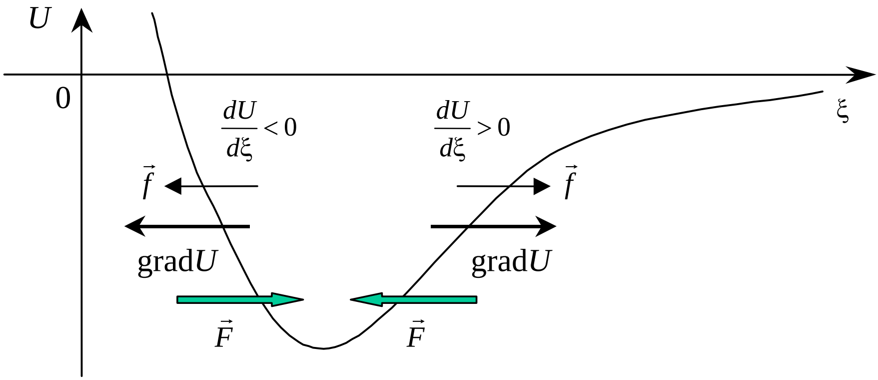

Рис. 11.1. Колебательное движение в потенциальной яме

Если на механическую систему (например, пружинный маятник), находящуюся в состоянии устойчивого равновесия, действует внешняя сила $\vec{f}$, то возникает градиент потенциальной энергии и, как следствие, – внутренняя сила $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U ,$$

которая возвращает систему в положение устойчивого равновесия. Таким образом, в системе возникают колебания.

Движение в любой потенциальной яме может быть аппроксимировано движением в параболической потенциальной яме, если рассматривать лишь малые отклонения (смещения) от положения равновесия.

Движение в параболической потенциальной яме ($U \sim \xi^2$) *приводит к гармоническим колебаниям.*

Пружинный маятник

Закон сохранения и превращения энергии колебаний пружинного маятника (рис. 11.2):

$$U_m = U + K = K_m,$$

где U_m и K_m – амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий, соответственно.

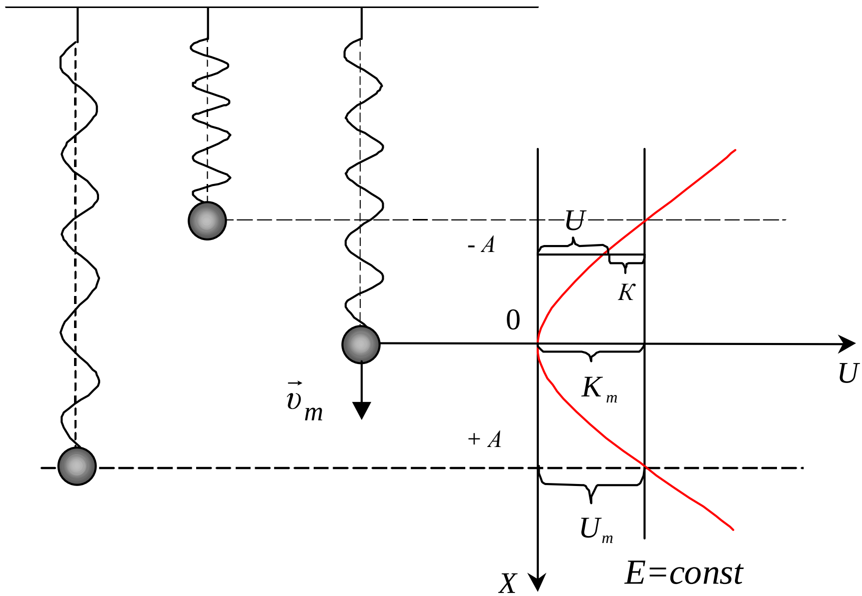

Рис. 11.2. Энергетика колебаний пружинного маятника

При малых отклонениях от положения равновесия изменением потенциальной энергии материальной точки в однородном поле тяготения можно пренебречь.

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\tilde{o}^2 = \frac{1}{2}m\tilde{o}_m^2,$$

где $\tilde{o} = \dfrac{dx}{dt}$. Отсюда

$$\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot dt,$$

откуда

$$\arcsin\frac{x}{A}+c=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\,.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ смещение $x_0 = A$, то $c=-\frac{\pi}{2}$ и решение интегрального уравнения имеет вид:

$$x(t)=A\cos\omega_0 t\,.$$

Амплитуда $A=|x_m|$ определяется начальным запасом энергии и не зависит от параметров колебательной системы.

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0=2\pi\nu_0=\frac{2\pi}{T_0}$ зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Период собственных колебаний: T_0.

Линейная частота: ν_0.

Фаза колебания: $\Phi = \omega_0 t$ определяет значение смещения x в данный момент времени.

Если в момент времени $t = 0$ смещение $|x_0| < A$, то фаза колебания

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi,$$

где φ – начальная фаза колебания.

Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника:

$$x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\varphi\right).$$

Физический маятник

Закон сохранения и превращения энергии колебаний физического маятника (рис. 11.3):

$$U_m = U + K = K_m.$$

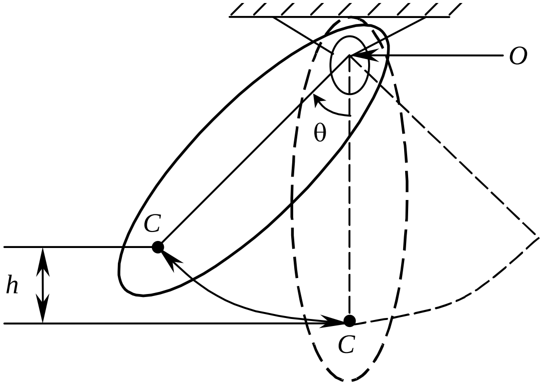

Рис. 11.3. Физический маятник: O – точка подвеса, C – центр инерции

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$mgh_m = mgh + \frac{1}{2}\Im\Omega^2 = \frac{1}{2}\Im\Omega_m^2,$$

где $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ – угловая скорость,

$\Im$ – момент инерции маятника относительно т. O,

h – высота, на которую поднимается центр инерции, определяется по формуле:

$$h = \ell_{\text{ф}}(1 - \cos\theta),$$

здесь $\ell_{ф} = OC$ – длина физического маятника.

При малых θ $\sin\theta \approx \theta$ (в радианах) и тогда

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \theta^2} = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Поэтому

$$h_m = \ell_{\text{ф}}\frac{\theta_m^2}{2} \text{ и } h = \ell_{\text{ф}}\frac{\theta^2}{2}.$$

Тогда закон сохранения и превращения энергии может быть записан в виде:

$$mg\ell_{\text{ф}} \frac{\theta_m^2}{2} = mg\ell_{\text{ф}} \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}\Im\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

После разделения переменных и интегрирования (по аналогии с выводом для пружинного маятника) получим уравнение гармонических колебаний физического маятника:

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{mg\ell_{\text{ф}}}{\Im}} \cdot t + \varphi\right),$$

где θ_m – амплитуда колебаний.

Собственная частота колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_{\text{ф}}}{\Im}} .$$

Математический маятник

Математический маятник – это частный случай физического маятника: размерами тела массой *m* пренебрегаем по сравнению с длиной подвеса ℓ (рис. 11.4).

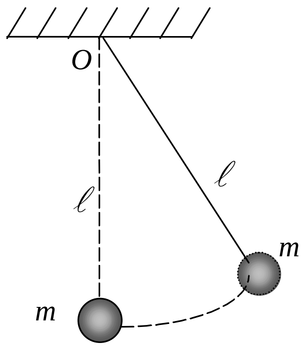

Рис. 11.4. Математический маятник

Так как момент инерции материальной точки относительно т. *O* равен:

$$\Im = m\ell^2 ,$$

то собственная частота колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\ .$$

Электрический колебательный контур (LC)

Закон сохранения и превращения энергии в электрическом колебательном контуре (рис. 11.5):

$$W_{Э}^{m} = W_{Э} + W_{М} = W_{М}^{m},$$

где $W_{Э}$ – энергия электрического поля в конденсаторе,
$W_{М}$ – энергия магнитного поля в соленоиде,
$W_{Э}^{m}$ и $W_{М}^{m}$ – их амплитудные значения.

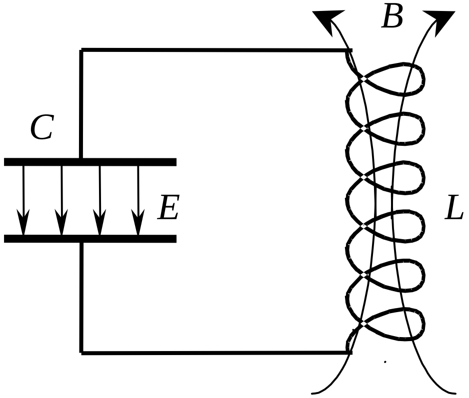

Рис. 11.5. Электрический колебательный контур:
L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$\frac{1}{2C}q_m^2 = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Li_m^2,$$

где q и q_m – мгновенное и амплитудное значения заряда на обкладках конденсатора,
$i = \dfrac{dq}{dt}$ и i_m – мгновенное и амплитудное значения тока в контуре.

После разделения переменных и интегрирования (по аналогии с выводом для пружинного маятника) получим уравнение гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре:

$$q = q_m \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t + \varphi \right).$$

Собственная частота колебаний в электрическом колебательном контуре:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Закон сохранения энергии можно записать иначе:

$$\frac{1}{2} q_m u_m = \frac{1}{2} qu + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} Li_m^2$$

или

$$\frac{1}{2} Cu_m^2 = \frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} Li_m^2,$$

где u и u_m – мгновенное и амплитудное значения напряжения между обкладками конденсатора.

Так как $u(t) = \dfrac{q(t)}{C}$ и $u_m = \dfrac{q_m}{C}$, то

$$u(t) = u_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Из закона сохранения энергии можно получить соотношение, связывающее амплитудные значения тока и напряжения:

$$i_m = u_m \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Динамика ЛГО

Пружинный маятник

Уравнение основного закона динамики поступательного движения материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a} .$$

Пружинный маятник в положении равновесия (рис. 11.6):

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0 \text{ или } mg - kx_0 = 0.$$

Отсюда

$$mg = kx_0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x_0} = \omega_0^2 .$$

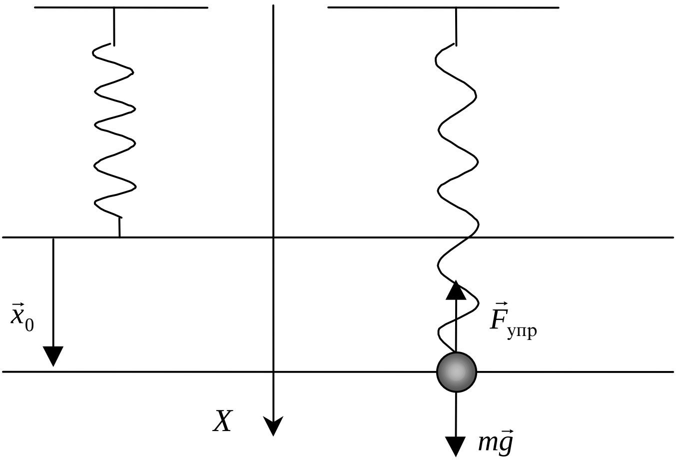

Рис. 11.6. Динамика пружинного маятника

При смещении маятника из положения равновесия возникает возвращающая упругая сила

$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x} .$$

Отсюда

$$-kx = m\ddot{x} .$$

Дифференциальное уравнение собственных колебаний пружинного маятника:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 .$$

Поскольку $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0$ – собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника, то дифференциальное уравнение собственных колебаний можно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Физический маятник

Уравнение основного закона динамики вращательного движения абсолютно твердого тела:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \left[\vec{\ell}_{\text{ф}}, m\vec{g}\right] = \Im\vec{\beta}\,.$$

Так как для физического маятника (рис. 11.7) $\vec{M} \parallel -\vec{\theta}$, то

$$-\ell_{\text{ф}} mg \sin\theta = \Im \frac{d^2\theta}{dt^2}\,.$$

При малых углах $\sin\theta \approx \theta$ (в радианах). Тогда:

$$-\ell_{\text{ф}} mg\theta = \Im \frac{d^2\theta}{dt^2}\,.$$

Дифференциальное уравнение собственных колебаний физического маятника:

$$\ddot{\theta} + \frac{\ell_{\text{ф}} mg}{\Im}\theta = 0\,.$$