№ 1713

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

РЯДЫ
И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2001

№1713

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

РЯДЫ
И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей

Под редакцией Б.Г. Разумейко

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 517.5+517.9
П40

Плужникова Е.Л., Разумейко Б.Г. Ряды и дифференциальные уравнения: Учеб.-метод. пособие. /Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 2001. – 181 с.

Содержит справочный материал по курсу «Ряды и дифференциальные уравнения», решение типовых задач по этому курсу, варианты домашнего задания, типовые варианты контрольных работ и варианты тестов, предназначенных для проверки усвоения пройденного материала.

Подробно разобраны методы решения типовых задач домашнего задания.

Предназначено для студентов всех специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В *первой части* пособия приведены справочный материал по теме «ряды» и методы решения дифференциальных уравнений, а также разобрано большое количество типовых задач по этим темам.

Вторая часть пособия содержит условие домашнего задания по курсу «ряды и дифференциальные уравнения». Также во второй части подробно рассмотрен пример решения домашнего задания. Большинство расчетов при выполнении домашнего задания требует применения микрокалькуляторов.

Ответы в решенных задачах выделены полужирным шрифтом.

Третья и четвертая части содержат типовые варианты контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса.

Отчет о выполнении домашнего задания должен содержать

1. Стандартный титульный лист.
2. Формулировку решаемой задачи.
3. Подробное решение со всеми промежуточными выкладками.

Некоторые стандартные обозначения, которые встречаются в работе:

$\Rightarrow$ – следует;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда;

$\forall$ – любой;

$\exists$ – существует;

$\subset$ – содержится;

$\in$ – принадлежит;

$\sim$ – понятия эквивалентны;

$=|\quad|=$ – комментарии к проводимым действиям;

[– знак совокупности.

1. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Ряды

1.1.1. Числовые ряды

Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n, \ldots$ – бесконечная числовая последовательность. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*, а числа a_1, a_2, a_3, … a_n, … – *членами ряда*.

Сумма первых n членов числового ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называется n-й *частичной суммой*.

Пусть даны две последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, и его сумма равна S, т. е.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Разность $R_n = S - S_n$ называют *остатком ряда*.

Основные свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то сходится и ряд $a_m + a_{m+1} + \ldots$, который получается из данного ряда отбрасыванием первых $(m - 1)$ членов. И наоборот, из сходимости ряда $a_m + a_{m+1} + \ldots$ следует сходимость ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. (Конечное число членов ряда не влияет на его сходимость).

2. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, и его сумма равна S, то сходится и ряд $Ca_1 + Ca_2 + \ldots + Ca_n + \ldots$ (где C – некоторая константа), причём его сумма равна $C \cdot S$.

3. Если ряды $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ сходятся, и их суммы равны S_1 и S_2, соответственно, то сходится и ряд $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$, причём его сумма равна $S_1 + S_2$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратное утверждение неверно, т. е. из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ сходимость ряда не следует. Применять этот признак надо следующим образом: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ $\Rightarrow$ ряд расходится, но если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

1.1.2. Знакоположительные числовые ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если все его члены больше нуля.

1. Критерий Коши.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall\ n > N(\varepsilon)$ и для $\forall\ m \geq 0$ $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

2. Первый признак сравнения.

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $0 \leq a_n \leq b_n$ начиная с некоторого номера, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, а из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего).

3. Второй признак сравнения.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный и отличный от 0 предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

4. Признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то:

– при $q < 1$ ряд сходится;
– при $q > 1$ ряд расходится;
– при $q = 1$ ничего о сходимости ряда сказать нельзя, требуется применение других признаков.

5. Признак Даламбера.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то:

– при $q < 1$ ряд сходится;
– при $q > 1$ ряд расходится;
– при $q = 1$ ничего о сходимости ряда сказать нельзя, требуется применение других признаков.

6. Интегральный признак.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $a_n = f(n)$ (где функция $f(x)$ положительная, монотонно убывающая и непрерывная при $x \geq a$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Напомним, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ (где $f(x)$ – непрерывная функция) сходится, если существует конечный $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = C$.

7. Признак Гаусса.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если отношение соседних членов может быть представлено как $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + 0\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то:

– при $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд сходится;
– при $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$ ряд расходится.

Пример 1.1.1. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ при $p > 1$ сходится, при $p \leq 1$ расходится.

Решение

Используем интегральный признак. Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{1-p}, & \text{если } 1-p<0, \\ \infty, & \text{если } 1-p>0. \end{cases}$$

Пусть $p = 1$, тогда

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Следовательно, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{при } p>1 \text{ сходится,} \\ \text{при } p \le 1 \text{ расходится.} \end{cases}$

Значит и **ряд** $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \textbf{при } \boldsymbol{p>1} \textbf{ сходится,} \\ \textbf{при } \boldsymbol{p \le 1} \textbf{ расходится.} \end{cases}$

Пример 1.1.2. Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$.

Решение

Используем признак Коши:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, **ряд** $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$ **сходится.**

2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n - n}$.

Используем второй признак сравнения. Сравним ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n - n}$ с рядом $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n - n} : \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \left|\begin{array}{l}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } 2^n\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = \left|\text{по правилу Лопиталя } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)'}{(2^n)'} = \right.$$

$$\left. = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \ln 2} = 0 \right| = 1.$$

Следовательно, $\frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n}$, т. е. ряды эквивалентны.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится (было показано в п. 1) $\Rightarrow$ по второму признаку сравнения и **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n-n}$ **сходится**.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}$.

Проверим необходимый признак сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ –}$$

необходимый признак сходимости ряда не выполнен, следовательно **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}$ **расходится**.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Используем второй признак сравнения. Так как при $n \to \infty$ величина $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ стремится к 0, то можно воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^{3/2}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Следовательно, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходятся и расходятся одновременно.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ – сходится (было показано в **примере 1.1.1**), так как $p = 3/2 > 1$.

Значит, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ **сходится**.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Используем второй признак сравнения. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-3}:\frac{1}{2^n}=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } 2^n\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{4}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходится по признаку Коши, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, **сходится** и эквивалентный ему **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ **сходится**.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}e>1,$$

следовательно, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **расходится**.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{10^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{n+1} = 0 < 1,$ следовательно, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{n!}$ **сходится**.

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n-1})}$.

Используем второй признак сравнения. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n-1})} : \dfrac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n} \cdot n}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n-1})} =|$ разделим числитель и знаменатель на $n^{\frac{4}{3}} | = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\left(5 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} = \dfrac{1}{10}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится (было показано в **примере 1.1.1**), значит, **расходится** и эквивалентный ему **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n-1})}$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

Используем первый признак сравнения.

$\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, так как $\ln n < n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится (было показано в **примере 1.1.1**), а значит, **расходится** и бóльший **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$.

Используем второй признак сравнения.

Сравниваем данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)} : \frac{1}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{(10n-1)\ln(10n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(10n-1)} = |\text{ по правилу Лопиталя }| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10-\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(\ln(10n-1))'} = \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{10}{10n-1}} = \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \frac{10n-1}{10n} =$$

$$= \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{10n}\right) = \frac{1}{10}.$$

Для исследования на сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ используем интегральный признак:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{\infty} \frac{d\ln x}{\ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ t_1 = \ln e = 1 \\ t_2 = \infty \end{array} \right| = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \ln|b| = \infty,$$

интеграл расходится, значит, и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ расходится.

Тогда **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$ тоже **расходится**.

12) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}$.

Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n \ln\ln n}$, используя второй признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n\ \ln\ln n}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln}{\ln(n+1)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\ln(n+1)}\ .$$

Найдем значение каждого из трех пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=1\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\left|\begin{array}{l}\text{по}\\ \text{правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(\ln(n+1))'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\ln(n+1)}=\left|\begin{array}{l}\text{по}\\ \text{правилу}\\ \text{Лотиталя}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)'}{(\ln\ln(n+1))'}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n+1}{n}=1\,.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\lim\dfrac{\ln}{\ln\left(n+1\right)}\cdot\lim\dfrac{\ln\ln n}{\ln\ln(n+1)}=1\cdot1\cdot1=1\,.$

Для исследования на сходимость ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ используем интегральный признак:

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int_3^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln x\ln\ln x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ t_1=\ln e\\ t_2=\infty\end{array}\right|=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t\ln t}=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{d\ln t}{\ln t}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\ln t=u\\ u\ \ =\ln\ln 3\\ u_2=\infty\end{array}\right|=\int_{\ln\ln 3}^{\infty}\frac{du}{u}=\ln|u|\Big|_{\ln\ln 3}^{\infty}=\lim_{b\to\infty}\ln|\,b\,|-\ln\ln\ln 3=\infty,$$ интеграл

расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ расходится. Тогда **ряд**

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}$ – тоже **расходится**.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n\left(-\frac{1}{n+1}\right)(-(n+1))}=$$

$=\left|\begin{array}{l}\text{используем второй}\\ \text{замечательный предел}\end{array}\right|=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$, следовательно, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ **сходится**.

14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

Используем первый признак сравнения:

$\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}>\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$, так как при $n\geq 1$ $\ln\sqrt{n^2+3n}>1$.

Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$.

Используем второй признак сравнения, сравним исходный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-n}}:\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$, следовательно $\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\sim\frac{1}{n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (см. **пример 1.1.1**), значит расходится эквивалентный ему ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$, тогда и **ряд** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$ **расходится**.

15) $\sum\frac{3\cdot5\cdot7...(2n+1)}{2\cdot5\cdot8...(3n-1)}$.

Используем признак Даламбера:

$$a_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)};$$

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n+1)(2(n+1)+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)(3(n+1)-1)}=a_n\cdot\frac{2n+3}{3n+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot(2n+3)}{(3n+2)\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}<1,$$

следовательно, **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7...\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8...\cdot(3n-1)}$ **сходится**.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Так как $\frac{1}{n^2}\to0$ при $n\to\infty$, то можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}\quad \text{при } n\to\infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (см. **пример 1.1.1**), значит, и **ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ **сходится**.

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3n}$.

Так как $\frac{2}{3n}\to 0$ при $n\to\infty$, то можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых:

$$\sin\frac{2}{3n}\sim\frac{2}{3n} \text{ при } n\to\infty.$$

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+5)}{3nn!}$. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1+5)}{3(n+1)(n+1)!}\cdot\frac{3nn!}{2(n+5)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+6)\cdot}{3(n+1)(n+1)!}\cdot\frac{3nn!}{2(n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+6)\cdot n}{(n+1)(n+1)\cdot(n+5)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n}{(n+1)(n+1)(n+5)}=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n^3\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}{\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(n+5)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{5}{n}\right)}=$$

$=\frac{0}{1}=0<1$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+5)}{3nn!}$ сходится, а значит, и **ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3n}$ **сходится**.

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$.

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot e\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cdot(-(n+1))}=$$