№ 211

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Интегральное исчисление

Учебное пособие

№ 211

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»**

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Интегральное исчисление

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 517
П40

Р е ц е н з е н т
канд. техн. наук, доц. *Л.А. Шамаро*

Плужникова, Е.Л.

П40 Математический анализ : интегральное исчисление : учеб. пособие / Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 247 с.

ISBN 978-5-87623-394-3

В пособии приведены основные формулы и понятия интегрального исчисления (первообразная, определенный и неопределенный интеграл, несобственные интегралы, кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы), разобраны типовые задачи различных уровней сложности по этим темам. В пособии содержатся домашние задания по данному курсу. Наличие типовых вариантов контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса, позволит студенту подготовиться к экзаменационной сессии.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517

ISBN 978-5-87623-394-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занимаясь дифференцированием функций, мы по данной функции находили ее производную. Сейчас перейдем к обратной задаче: найти функцию, зная ее производную.

1.1. Первообразная

Функция $F(x)$ является *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве E, если $F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in E$.

В качестве множества E можно рассматривать конечный или бесконечный интервал (a,b), отрезок $[a,b]$, а также конечный или бесконечный полуинтервал.

Например, для функции $f(x) = x$ первообразной является функция $F(x) = x^2/2$, так как $(x^2/2)' = x$. Нетрудно заметить, что функция $F_1(x) = x^2/2 + 1$ также является первообразной функции $f(x) = x$.

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то для любой константы c функция $F(x) + c$ также является первообразной для функции $f(x)$, так как $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in E$. Таким образом, если функция $F(x)$ есть первообразная для некоторой функции $f(x)$, то любая первообразная для этой функции имеет вид $F(x) + c$, где c – некоторая константа.

Свойства первообразной

1. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а функция $G(x)$ первообразной для функции $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$.

2. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $\alpha F(x)$ является первообразной для функции $\alpha f(x)$.

3. Пусть определены функции $f(y(t))$, $y'(t)$ и $F(y(t))$. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $F(y(t))$ является первообразной для функции $f(y(t))\, y'(t)$.

1.2. Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором множестве E называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначают символом

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом, если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

где c = const.

Знак $\int$ называется *знаком интеграла*, функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а переменная x − *переменной интегрирования*. Подынтегральное выражение можно записать в виде

$$f(x)dx = dF(x).$$

Нахождение функции по ее производной называется *интегрированием функции*. Интегрирование – действие обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить, продифференцировав функцию $F(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c.$

2. $\int dF(x) = F(x) + c.$

3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx,\ c \neq 0.$

4. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$ и функция $u = \varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + c$.

6. $\int dx = x + c.$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$

2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq -1).$

3. $\int e^x dx = e^x + c.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c.$

5. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c \ (a \neq 0).$

6. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + c \ (a \neq 0).$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \ (a \neq 0).$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c \ (a \neq 0).$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

10. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + c.$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + c.$

15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c.$

16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c.$

17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c.$

18. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c.$

Нахождение первообразной или вычисление неопределенного интеграла в основном состоит в преобразовании подынтегрального выражения так, чтобы получить интегралы из этой таблицы.

Пример 1.2.1

Вычислить неопределенный интеграл $\int (3x^2 + 4x + 5)dx$.

Решение

Разобьем интеграл на сумму трех интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int (3x^2 + 4x + 5)dx = 3\int x^2 dx + 4\int x dx + 5\int dx = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 5x + c =$$

$$= x^3 + 2x^2 + 5x + c.$$

Пример 1.2.2

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{4 - x^3}{\sqrt{x}} dx.$

Решение

Разобьем интеграл на разность двух интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int \frac{4 - x^3}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (4x^{-\frac{1}{2}} - x^{3-\frac{1}{2}}) dx =$$

$$= 4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \int x^{\frac{5}{2}} dx = 8\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c = 8\sqrt{x} - \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c.$$

Пример 1.2.3

Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение

Понизим степень по формуле

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},$$

а затем разобьем интеграл на разность двух интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+c.$$

Пример 1.2.4

Вычислить неопределенный интеграл $\int(5x+4^x)dx$.

Решение

Разобьем интеграл на сумму двух интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int(5x+4^x)dx=5\int xdx+\int 4^x dx=5\frac{x^2}{2}+\frac{4^x}{\ln 4}+c.$$

Пример 1.2.5

Вычислить неопределенный интеграл $\int\left(2\sqrt[5]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x}\right)dx.$

Решение

Разобьем интеграл на сумму трех интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int\left(2\sqrt[5]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x}\right)dx=2\int\sqrt[5]{x}dx+4\int x^{-\frac{2}{3}}dx+\int\frac{1}{x}dx=$$
$$=2\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}+4\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+\ln|x|+c=\frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}}+12x^{\frac{1}{3}}+\ln|x|+c.$$

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве E. Тогда справедливо равенство

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Если удалось найти дифференцируемые функции $t=\varphi(x)$ и $g(t)$, такие, что подынтегральное выражение удалось записать в виде $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx =$ $= g(t)dt$, и интеграл от выражения справа известен и равен $\int g(t)dt = G(t) + c$, то исходный интеграл $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx =$ $= G(\varphi(x)) + c$.

Функция $\varphi(x)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более простой для интегрирования вид. Основную трудность как раз и представляет преобразование подынтегрального выражения, так как не всегда бывает заранее известно к чему нужно прийти и какой должна быть функция $\varphi(x)$. Например, вычислим интеграл $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$.

Отметим, что производная от функции $\varphi(x) = \sin x$ равна $\varphi'(x) = \cos x$. Сделаем замену переменной $\sin x = t$, тогда $dt = \cos x\, dx$. Следовательно,

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int e^t\, dt = e^t + c = e^{\sin x} + c.$$

Не всегда удается сразу подобрать такую замену, чтобы в результате получился табличный интеграл. В более сложных случаях рекомендуется сначала выбрать ту подстановку, которая представляется удачной, и лишь после преобразования подынтегрального выражения смотреть, добились ли мы своей цели – упрощения интеграла. Может оказаться так, что получившийся интеграл еще не является табличным, но приводится к такому проще, чем исходный.

Например, интеграл $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$ заменой $\sin x = t$ приводится к следующему интегралу:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t^4}.$$

Сделаем еще одну подстановку: $u = t^2$. Тогда

$$\int \frac{2tdt}{1+t^4} = \begin{vmatrix} t^2 = u; \\ 2tdt = du \end{vmatrix} = \int \frac{du}{1+u^2}.$$

В результате получили табличный интеграл:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c = \operatorname{arctg} t^2 + c = \operatorname{arctg} \sin^2 x + c.$$

Разновидностью замены переменного является операция внесения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Пусть $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, то $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x)$.

Для того чтобы внести функцию под знак дифференциала, необходимо найти первообразную этой функции. Отметим некоторые часто применяемые преобразования дифференциалов:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b);$$

$$x^n dx = \frac{dx^{n+1}}{n+1}, \quad \left(xdx = \frac{1}{2}dx^2\right);$$

$$\sin x\,dx = -d(\cos x);$$

$$\cos x dx = d(\sin x);$$

$$\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right) = \frac{d\left(\log_a x\right)}{x\log_a e};$$

$$a^x dx = \frac{da^x}{\ln a}, \quad \left(e^x dx = de^x\right);$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right);$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right).$$

Например, вычислим интеграл $\int \frac{x^5dx}{x^6+9}$ с помощью внесения функции $\varphi(x) = x^5$ под знак дифференциала. Первообразная от функции $\varphi(x) = x^5$ равна $x^6/6$. Тогда:

$$\int\frac{x^5dx}{x^6+9} = \frac{1}{6}\int\frac{d(x^6+9);}{x^6+9} = \left|\begin{matrix} x^6+9=t; \\ d(x^6+9)=dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln|t|+c = \frac{1}{6}\ln\left|x^6+9\right|+c.$$

Иногда целесообразно при вычислении интеграла $\int f(x)dx$ произвести замену, выражая не функцию t через x, а наоборот, функцию x через t. Пусть $x = \varphi(t)$ – строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке функция. Тогда она имеет обратную функцию $t = g(x)$. Полагаем $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$.

Обозначим $u(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тогда

$$\int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + c.$$

Затем возвратимся к переменной x, выразив ее из уравнения $x = \varphi(t)$, т.е. найдем обратную функцию к функции $x = \varphi(t)$ и подставим ее вместо t в выражение найденного интеграла. Последнюю формулу называют *формулой интегрирования подстановкой*.

Например, вычислим интеграл $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$, сделав замену $x = \sin u$. Тогда $dx = \cos u\, du$. Подставив в интеграл x и dx, а затем, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\, du = \int\cos^2 u\, du = \int\frac{1+\cos 2u}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int\cos 2u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2u d(2u)}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + c.$$

Вернемся к переменной x. Мы делали замену $x = \sin u$. Выразим функцию u через переменную x с помощью обратной функции. Тогда $u = \arcsin x$. Заметим, что

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u = 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

Пример 1.3.1

Вычислить неопределенный интеграл $\int\cos 2x dx$.

Решение

$$\int\cos 2x dx = \left|\begin{matrix} 2x = t; \\ dt = 2dx; \\ dx = dt/2 \end{matrix}\right| = \int\cos t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin t + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c.$$

Пример 1.3.2

Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin x \cos x dx$.

Решение

Производная от функции $(\sin x)' = \cos x$. Следовательно, можно сделать замену $t = \sin x$:

$$\int \sin x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Пример 1.3.3

Вычислить неопределенный интеграл $\int \operatorname{ctg} 2x dx$.

Решение

$$\int \operatorname{ctg} 2x dx = \begin{vmatrix} 2x = t; \\ 2dx = dt; \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg} t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\sin t} dt =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin t = u; \\ \cos t \, dt = du \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|\sin 2x| + c.$$

Пример 1.3.4

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+2}}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+2}} = \begin{vmatrix} 4x+2 = t; \\ 4dx = dt; \\ dx = \dfrac{1}{4} dt \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{t} + c = \frac{1}{2} \sqrt{4x+2} + c.$$

Пример 1.3.5

Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 \sqrt[3]{2 - 5x^6} dx$.

Решение

Производная от функции $(2 - 5x^6)' = -30x^5$. Следовательно, можно сделать замену $t = 2 - 5x^6$:

$$\int x^5\sqrt[3]{2-5x^6}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=2-5x^6; \\ dt=-30x^5dx; \\ x^5dx=\dfrac{dt}{-30} \end{array}\right|=-\frac{1}{30}\int\sqrt[3]{t}\,dt=-\frac{1}{30}\int t^{\frac{1}{3}}dt=$$

$$=-\frac{1}{30}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=-\frac{3}{4\cdot 30}t^{\frac{4}{3}}+c=-\frac{1}{40}\sqrt[3]{(2-5x^6)^4}+c.$$

Пример 1.3.6

Вычислить неопределенный интеграл $\int x(1+3x)^9\,dx$.

Решение

В данном примере нет необходимости возводить в девятую степень. Воспользуемся заменой переменной $t = 1 + 3x$, а затем выразим переменную x из этой замены:

$$\int x(1+3x)^9\,dx=\left|\begin{array}{l} 1+3x=t; \\ 3dx=dt; \\ dx=\dfrac{dt}{3}; \\ x=\dfrac{t-1}{3} \end{array}\right|=\int\frac{t-1}{3}t^9\frac{dt}{3}=\frac{1}{9}\int(t-1)t^9dt=\frac{1}{9}\int(t^{10}-t^9)dt=$$

$$=\frac{1}{9}\int t^{10}dt-\frac{1}{9}\int t^9dt=\frac{1}{9}\frac{t^{11}}{11}-\frac{1}{9}\frac{t^{10}}{10}+c=\frac{1}{99}(1+3x)^{11}-\frac{1}{90}(1+3x)^{10}+c.$$

Пример 1.3.7

Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{3x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Решение

Разложим на разность двух интегралов и сделаем в каждом из получившихся интегралов замену переменных:

$$\int\frac{3x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=3\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx-\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

В первом интеграле производная от функции $(1-4x^2)'=-8x$. Следовательно, можно сделать замену $t=1-4x^2$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} 1-4x^2 = t; \\ dt = -8xdx; \\ xdx = -dt/8 \end{array} \right| = \int \frac{-dt/8}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{8}\int t^{-1/2}dt = -\frac{2}{8}\sqrt{t} + c =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + c.$$

Во втором интеграле производная от функции $\left(\arcsin 2x\right)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Следовательно, можно сделать замену $t = \arcsin 2x$:

$$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin 2x = t; \\ \dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + c = \frac{\arcsin^2 2x}{4} + c.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x - \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} - \frac{\arcsin^2 2x}{4} + c.$$

Пример 1.3.8

Вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+4e^{2x}}}dx$.

Решение

Производная от функции $(e^x)' = e^x$. Следовательно, можно сделать замену $e^x = t$:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+4e^{2x}}}dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t; \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1/4+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1/4+t^2}) + c = \frac{1}{2}\ln(e^x + \sqrt{1/4+e^{2x}}) + c.$$

Пример 1.3.9

Вычислить неопределенный интеграл $\int \left(2x-5\right)^8 dx$.

Решение

$$\int \left(2x-5\right)^8 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-5; \\ dt = 2dx; \\ dx = \dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int t^8 \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int t^8 dt = \frac{t^9}{18} + c = \frac{(2x-5)^9}{18} + c.$$

Пример 1.3.10

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(5-3x)^8}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{(5-3x)^8} = \left| \begin{array}{l} 5-3x=t; \\ -3dx=dt; \\ dx=-\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-8}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-8}dt = \frac{t^{-7}}{21}+c = \frac{1}{21(5-3x)^7}+c.$$

Пример 1.3.11

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}dx$.

Решение

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}dx = \int (x-3)^{-4/3}dx = \int (x-3)^{-4/3}d(x-3) =$$

$$= \frac{(x-3)^{-4/3+1}}{-4/3+1}+c = \frac{(x-3)^{-1/3}}{-1/3}+c = -\frac{3}{\sqrt[3]{x-3}}+c.$$

Пример 1.3.12

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}-5}dx$.

Решение

Производная от функции $(e^{-2x}-5)' = -2e^{-2x}$. Следовательно, можно сделать замену $t = e^{-2x}-5$:

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}-5}dx = \left| \begin{array}{l} e^{-2x}-5=t; \\ -2e^{-2x}dx=dt; \\ e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t|+c = -\frac{1}{2}\ln\left|e^{-2x}-5\right|+c.$$

Пример 1.3.13

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{8x^2 - 5\ln^6 x}{x} dx.$

Решение

Разобьем интеграл на разность двух интегралов. Первый интеграл – табличный. Во втором интеграле сделаем замену $t = \ln x$, так как производная от функции $(\ln x)' = 1/x$:

$$\int \frac{8x^2 - 5\ln^6 x}{x} dx = \int 8x dx - \int \frac{5\ln^6 x}{x} dx = \frac{8x^2}{2} - 5\int \frac{\ln^6 x}{x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln x = t; \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = 4x^2 - 5\int t^6 dt = 4x^2 - \frac{5}{7} t^7 + c = 4x^2 - \frac{5}{7} \ln^7 x + c.$$

Пример 1.3.14

Вычислить неопределенный интеграл $\int 6^{2x-5} dx.$

Решение

$$\int 6^{2x-5} dx = \left| \begin{array}{l} 2x - 5 = t; \\ 2dx = dt; \\ dx = \frac{1}{2} dt; \end{array} \right| = \int 6^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int 6^t dtx = \frac{1}{2} \frac{6^t}{\ln 6} + c = \frac{6^{2x-5}}{2\ln 6} + c.$$

Пример 1.3.15

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{\sin^2(x-3)} dx.$

Решение

Производная от функции $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ и $\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x$. Тогда $dx/\sin^2(x-3) = -d(\operatorname{ctg}(x-3))$. Внесем функцию $g(x) = 1/\sin^2(x-3)$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{\sin^2(x-3)} dx = \int \operatorname{tg}(x-3) \frac{dx}{\sin^2(x-3)} = \int \operatorname{tg}(x-3)\left(-d\left(\operatorname{ctg}\left(x-3\right)\right)\right) =$$

$$= -\int \frac{d\left(\operatorname{ctg}\left(x-3\right)\right)}{\operatorname{ctg}(x-3)} = \left| \operatorname{ctg}(x-3) = t \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln\left|\operatorname{ctg}(x-3)\right| + c.$$

Пример 1.3.16

Вычислить неопределенный интеграл $\int e^{5-4x^2}x\,dx$.

Решение

Производная от функции $(5-4x^2)' = -8x$. Следовательно, можно сделать замену $t = 5-4x^2$:

$$\int e^{5-4x^2}xdx = \left| \begin{array}{l} 5-4x^2 = t; \\ -8xdx = dt; \\ xdx = -\frac{1}{8}dt \end{array} \right| = \int e^t\left(-\frac{1}{8}\right)dt = -\frac{1}{8}\int e^t dt = -\frac{1}{8}e^t + c = -\frac{1}{8}e^{5-4x^2} + c.$$

Пример 1.3.17

Вычислить неопределенный интеграл $\int 6^x\sqrt{5\cdot 6^x - 2}\,dx$.

Решение

Производная от функции $(5 \cdot 6^x - 2)' = 5 \cdot 6^x \ln 6$. Сделаем замену $t = 5 \cdot 6^x - 2$:

$$\int 6^x\sqrt{5\cdot 6^x-2}dx = \left| \begin{array}{l} 5\cdot 6^x - 2 = t; \\ 5\cdot 6^x \ln 6 dx = dt; \\ 6^x dx = \frac{dt}{5\ln 6} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int\sqrt{t}\frac{dt}{\ln 6} = \frac{1}{5\ln 6}\int\sqrt{t}dt = \frac{1}{5\ln 6}\frac{t^{3/2}}{3/2} + c =$$

$$= \frac{2}{15\ln 6}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{15\ln 6}\sqrt{(5\cdot 6^x - 2)^3} + c.$$

Пример 1.3.18

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{4x - 5\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx$.

Решение

Разобьем интеграл на разность двух интегралов и сделаем в каждом из получившихся интегралов замену переменных:

$$\int\frac{4x-5\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx = 4\int\frac{x}{1+x^2}dx - 5\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx.$$

В первом интеграле сделаем замену $1 + x^2 = t$:

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x^2+1=t;\\ 2xdx=dt;\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c.$$

Во втором интеграле сделаем замену arctg $x = t$:

$$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{atctg}x=t;\\ \dfrac{dx}{1+x^2}=dt\end{array}\right|=\int tdt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+c.$$

Следовательно,

$$4\int\frac{x}{1+x^2}dx-5\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=2\ln\left|x^2+1\right|-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}^2x+c.$$

Пример 1.3.19

Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{\sin(\log_6(5x))}{x}dx.$

Решение

Производная от функции $(\log_6(5x))' = 5/(5x\ln 6)$. Следовательно, можно сделать замену $t = \log_6(5x)$:

$$\int\frac{\sin(\log_6(5x))}{x}dx=\left|\begin{array}{l}\log_6(5x)=t;\\ \dfrac{1}{x\ln 6}dx=dt;\\ \dfrac{dx}{x}=\ln 6dt\end{array}\right|=\ln 6\int\sin tdt=$$

$$=\ln 6(-\cos t)+c=-\ln 6\cos(\log_6(5x))+c\,.$$

1.4. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на множестве E, и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на E, тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на данном множестве, причем справедлива формула, которая называется *формулой интегрирования по частям*:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx\,.$$

Данное равенство можно записать короче:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Метод интегрирования по частям применяется в том случае, когда интеграл $\int v du$ вычисляется проще, чем интеграл $\int u dv$. Выбирать u и dv следует так, чтобы интегрирование дифференциала dv не представляло трудностей и чтобы замена u на du и dv на v в совокупности приводил к упрощению подынтегрального выражения.

Например, вычислим интеграл $\int x \ln x \, dx$:

$$\int x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \dfrac{dx}{x}; \\ dv = xdx; \; v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c .$$

Заметим, что попытка взять $u = x$, а $dv = \ln x dx$ неудачна, так как найти функцию v в этом случае возможно, только применив еще раз интегрирование по частям. В результате интеграл $\int v du$ будет еще сложнее, чем интеграл $\int u dv$.

Иногда для получения результата необходимо несколько раз применить интегрирование по частям. Например, для вычисления интеграла $\int x^2 e^x dx$ формулу интегрирования по частям необходимо применить два раза:

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \; du = 2xdx; \\ dv = e^x dx; \; v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Заметим, что попытка взять $u = e^x$, а $dv = x^2 \, dx$ неудачна, так как при этом получили бы более сложный, чем исходный интеграл

$$\int v du = \int e^x \frac{x^3}{3} dx .$$

При интегрировании по частям за функцию u необходимо обозначить тот множитель, который упрощается при дифференцировании. Например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена степени n на показательную или тригонометрическую функции, то в этом случае за u надо обозначить многочлен, так как производная понизит степень многочлена и, применив интегрирование по частям n раз, в конце концов, получим интеграл от показательной или тригонометрической функций, которые являются табличными. Если же под знаком интеграла стоит произведение многочлена на обратные тригонометрические функции или на логарифмическую функцию, то в этом случае за u необходимо обозначить эти функции. Тогда при нахождении первообразной от многочлена степень его повысится, но в результате дифференцирования обратных тригонометрических функций или логарифмической функции эти функции упростятся, соответственно упростится и искомый интеграл.

Итак, по частям берутся интегралы вида

$$\int P_n(x)e^{kx}dx;\ \int P_n(x)a^{kx}dx;\ \int P_n(x)\sin(kx)dx;\ \int P_n(x)\cos(kx)dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Обозначив $u = P_n(x)$, применим формулу интегрирования по частям n раз.

В интегралах вида

$$\int P_n(x)\ln^m(kx)dx;\ \int P_n(x)\log_a^m(kx)dx;\ \int P_n(x)\arcsin(kx)dx;$$

$$\int P_n(x)\arccos(kx)dx;\ \int P_n(x)\operatorname{arctg}(kx)dx;\ \int P_n(x)\operatorname{arcctg}(kx)dx,$$

обозначаем $dv = P_n(x)dx$ и применяем формулу интегрирования по частям.

В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл. Например, в интегралах вида

$$\int e^{ax}\cos(kx)dx;\ \int e^{ax}\sin(kx)dx;\ \int\sqrt{x^2\pm a}\,dx;\ \int\cos(\ln x)dx;\ \int\sin(\ln x)dx.$$

Например, для того чтобы вычислить интеграл $\int e^{2x}\cos x dx$ необходимо два раза проинтегрировать по частям. В результате в правой части мы получим выражение, содержащее первоначальный интеграл:

$$\int e^{2x}\cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\int \sin x \cdot e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x}\sin x - 2(e^{2x}(-\cos x) + 2\int \cos x \cdot e^{2x}dx) =$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x \cdot e^{2x}dx.$$

Получили уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного. Решим это уравнение:

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x \cdot e^{2x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x.$$

Следовательно,

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x) + c.$$

Пример 1.4.1

Вычислить неопределенный интеграл $\int (x-3)\cos 2x dx$.

Решение

Интегрируем по частям:

$$\int (x-3)\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x-3; & du = dx; \\ dv = \cos 2x dx; & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x-3)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x-3)\sin 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + c = \frac{1}{2}(x-3)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$$

Пример 1.4.2

Вычислить неопределенный интеграл $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение

Проинтегрируем по частям два раза:

$$\int \cos(\ln x)dx = \left| \begin{matrix} u = \cos(\ln x); \;\; du = -\sin(\ln x)\dfrac{1}{x}dx; \\ dv = dx; \;\; v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \sin(\ln x); \; du = \cos(\ln x)\dfrac{1}{x}dx; \\ dv = dx; \;\; v = x \end{matrix} \right| = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx.$$

В результате в правой части получили выражение, содержащее первоначальный интеграл, т.е. имеем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного. Решим это уравнение:

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx;$$

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x).$$

Следовательно,

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c.$$

Пример 1.4.3

Вычислить неопределенный интеграл $\int x\ln^2 xdx.$

Решение

Проинтегрируем по частям два раза:

$$\int x\ln^2 xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x; \;\; du = 2\ln x\dfrac{1}{x}dx; \\ dv = xdx; \;\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2\ln x\frac{1}{x}dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x;\ \ du=\frac{1}{x}dx; \\ dv=xdx;\ \ v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}(\ln^2 x-\ln x)+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2}{2}(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+c.$$

Пример 1.4.4

Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение

Интегрируем по частям:

$$\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}=\left|\begin{array}{l} u=x;\quad du=dx;\ \ dv=\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx; \\ v=\int\frac{\cos xdx}{\sin^3 x}=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+c\ .$$

Пример 1.4.5

Вычислить неопределенный интеграл $\int\operatorname{arctg} xdx$.

Решение

Интегрируем по частям:

$$\int\operatorname{arctg} xdx=\left|\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg} x;\ \ du=\frac{1}{x^2+1}dx; \\ dv=dx;\ \ v=x \end{array}\right|=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{x^2+1}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln|t|+c=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c\ .$$