№ 447

И.Е. Гопенгауз

Высшая математика

Функциональный анализ

Учебное пособие

№ 447

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

И.Е. Гопенгауз

Высшая математика

Функциональный анализ

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 517.98(075.8)
Г66

Р е ц е н з е н т
канд. физ.-мат. наук, доц. *Б.Е. Гопенгауз*

Гопенгауз И.Е.

Г66 Высшая математика: Функциональный анализ: Учеб. пособие. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2011. – 109 с.

Пособие облегчит студенту поиск подходов к решению задач. С этой целью приводятся полные решения или указания к решению ряда задач. Решения, указания и ответы помещены сразу после условия соответствующей задачи. Кроме того, пособие призвано помочь студенту в подготовке к контрольным работам, индивидуальным домашним заданиям, а также к экзаменационной работе по предмету.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 230401.

УДК 517.98(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Функциональный анализ изучает в обобщенном виде методы, используемые в геометрии, линейной алгебре, математическом анализе, дифференциальных уравнениях, численном анализе и т.д. Теоремы функционального анализа позволяют прояснить многие вопросы и получить новые результаты в различных областях математики. Это показывает важность изучения функционального анализа и объясняет сложности, которые возникают при его освоении из-за абстрактного характера данной дисциплины. Понятна необходимость самостоятельной работы для овладения теоретическими положениями функционального анализа и особенно – для решения задач.

По тематике данное пособие повторяет наш же «Курс лекций» (пособие № 1657), именуемый далее просто «Курс», несколько выходя за его рамки. Тем не менее мы сочли необходимым каждый параграф начинать с изложения основных определений и формулировки некоторых теорем.

В составлении некоторых задач принимала участие доцент Т.Н. Фоменко.

1. Норма, преднорма, фактор-норма, предел, непрерывность

Линейным нормированным пространством (ЛНП) называется линейное пространство X над полем скаляров $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) вместе с определенной на этом пространстве числовой функцией $\|\cdot\|$, называемой *нормой* и подчиняющейся следующим условиям (аксиомам нормы):

1а. $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in X$;

1б. $\|x\| = 0$ только для нулевого элемента пространства X;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого $x \in X$ и любого скаляра λ;

3. $\|x_1+x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$ для любых x_1 и $x_2 \in X$.

Преднормой (или полунормой) называется числовая функция $p(x)$, определенная на линейном пространстве X, если она подчинена условиям 1a, 2 и 3. ***Ядро*** преднормы – это множество тех $x \in X$, для которых $p(x)=0$. ЛНП X называется ***строго нормированным***, если норма в этом пространстве подчиняется еще одной аксиоме:

4. $\|x_1+x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ для ненулевых векторов x_1 и x_2 только в том случае, если эти векторы сонаправлены, т.е. $x_2 = \lambda x_1$, где $\lambda > 0$.

Расстоянием между точками $x_1, x_2 \in X$ называется величина $\|x-y\|$. ***Расстоянием между множествами*** E_1, $E_2 \subset X$ называется величина $\operatorname{dist}(E_1, E_2) = \inf\limits_{x_1 \in E_1,\, x_2 \in E_2} \|x_1 - x_2\|$.

Сферой в ЛНП X называется множество $S_r(a) = \{x \in X \mid \|x-a\| = r\}$ (здесь a − центр сферы, число $r>0$ − ее радиус). **Открытым шаром** или шаровой окрестностью точки a называется множество $B_r(a) = \{x \in X \mid \|x-a\| < r\}$, ***замкнутым шаром*** с центром в точке a − множество $\overline{B_r(a)} = B_r(a) \cup S_r(a)$.

Множество $E \subset X$ называется ***ограниченным***, если оно содержится в некотором шаре. Множество E называется ***открытым***, если любую свою точку a содержит вместе с некоторой ее шаровой окрестностью $B_r(a)$. Точка a называется ***предельной точкой*** множества E, если любая окрестность $B_r(a)$ пересекается с множеством $E\{\alpha\}$. Множество называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки.

Выпуклой комбинацией точек x_1, $x_2 \in X$ называется линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ с коэффициентами α_1, $\alpha_2 \ge 0$, для которых $\alpha_1+\alpha_2=1$. Множество $E\subset X$ называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками содержит все их выпуклые комбинации. ***Отрезок*** $[x_1,x_2]$ − это множество всех выпуклых комбинаций его концов x_1, x_2.

Последовательность $\{x_n\}\subset X$ ***сходится*** к элементу $a\in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|=0$.

Пусть X, Y − ЛНП и пусть $f: X\to Y$. Отображение f ***непрерывно*** в точке $x_0\in X$, если из условия $\|x-x_0\|_X\to 0$ следует $\|f(x)-f(x_0)\|_Y\to 0$. Отображение f называется ***равномерно непрерывным***, если любому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $x_1,\,x_2\in X$, для которых $\|x_1-x_2\|_X<\delta$, будет $\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y<\varepsilon$.

Пусть L − подпространство линейного пространства. ***Классом смежности*** элемента x по модулю L называется множество $\{x\}=x+L$. Пространство распадается на непересекающиеся классы смежности. Множество классов смежности образует ***фактор-пространство*** с естественным определением линейных операций: $\{x\}+\{y\}=\{x+y\}$ и $\lambda\{x\}=\{\lambda x\}$.

1.1. Доказать, что норма является равномерно непрерывной функцией на всем линейном нормированном пространстве (ЛНП).
Решение. Пусть ε – произвольное положительное число, $\delta=\varepsilon$ и $\|\Delta x\|<\delta$. Тогда будет $\big|\,\|x+\Delta x\|-\|x\|\,\big|\le\|(x+\Delta x)-x\|=$ $=\|\Delta x\|<\delta=\varepsilon$.

1.2. Пусть X – ЛНП и пусть x − ненулевой элемент X. Положим $f(x)=\dfrac{x}{\|x\|}$. Доказать непрерывность $f(\cdot)$ при любом $x\neq 0$.

1.3. Доказать, что в ЛНП операция умножения вектора на скаляр непрерывна по совокупности переменных.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+\|x\|+|\lambda|}\right\}$ и пусть $\|\Delta x\| < \delta$, $\|\Delta\lambda\| < \delta$. Тогда будет $\|(\lambda+\Delta\lambda)(x+\Delta x)-\lambda x\| = \|\Delta\lambda \cdot x + \lambda \cdot \Delta x + \Delta\lambda \cdot \Delta x\| <$ $< \delta \cdot (\|x\|+|\lambda|+1) = \varepsilon$.

1.4. Доказать, что в ЛНП операция сложения векторов равномерно непрерывна по совокупности переменных.

1.5. Если шары $B_r(a)$ и $B_R(b)$ имеют непустое пересечение, то $\|a-b\| < R+r$.

1.6. Если пересечение $\overline{B_r}(a) \cap \overline{B_R}(b)$ пусто, то $\|a-b\| > R+r$.

Решение.

1. Так как $b \in B_R(b)$, то $b \notin \overline{B_r}(a) \Rightarrow \|b-a\| > r$.

2. Если $c = a + \dfrac{b-a}{\|b-a\|} \cdot r \in \overline{B_r}(a)$, то $c \notin B_R(b)$, следовательно, $\|c-b\| > R$, но $\|c-b\| = \left\|(a-b) - \dfrac{a-b}{\|a-b\|} r\right\| = \big|\, \|a-b\| - r \big| = \|a-b\| - r$.

Поэтому $\|a-b\| > R+r$.

1.7. Если $\overline{B_r}(a) \subset B_R(b)$, то $r < R$ и $\|a-b\| < R-r$.

1.8. Пусть X – линейное пространство, $p(\cdot)$ − неотрицательная положительно однородная функция и $B = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$. Доказать, что:

а) если B – выпуклое множество, то для функции $p(\cdot)$ выполняется неравенство треугольника;

б) если для функции $p(\cdot)$ выполняется неравенство треугольника, то B является выпуклым подмножеством X.

Доказательство утверждения а). При любом $x \in X$ и любом $\varepsilon > 0$ $x_\varepsilon = \dfrac{x}{p(x)+\varepsilon} \in B$. Для любых $x, y \in X$ $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} =$ $= \dfrac{x_\varepsilon\left(p(x)+\varepsilon\right)+y_\varepsilon\left(p(y)+\varepsilon\right)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in B$, т.е. $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем $p(x+y) \le p(x)+p(y)$.

Утверждение пункта б) доказать самостоятельно.

1.9. Если три точки прямолинейного отрезка лежат на сфере $S_1(0)$, то весь этот отрезок принадлежит сфере.

Решение. Рассмотрим прямолинейный отрезок $[e_1, e_2]$ и точку $e \in \left(e_1, e_2\right)$. Тогда $e = \alpha e_1 + \beta e_2$, где α, β >>0, α + β = 1. Пусть еще $e_1, e, e_2 \in S_1(0)$, т. е. $\|e_1\| = \|e\| = \|e_2\| = 1$. Докажем, что $\left(e_1, e\right) \subset S_1(0)$.

Итак, пусть $f \in \left(e_1, e\right)$. Так как $f = se_1 + te$, где $s, t > 0$ и $s + t = 1$, то $\|f\| = \|se_1 + te\| \le s\|e_1\| + t\|e\| = s + t = 1$.

Предположим, что $\|f\| < 1$, и постараемся получить противоречие. Представим для этого e в виде $e = uf + ve_2$, где $u, v > 0$, $u + v = 1$.

Мы имеем: $\begin{cases} e = \alpha e_1 + \beta e_2 \\ f = se_1 + te \end{cases}$. Отсюда следует, что $e = \dfrac{\alpha f + s\beta e_2}{s + \alpha t}$, т.е. $u = \dfrac{\alpha}{s+\alpha t}$, $v = \dfrac{s\beta}{s+\alpha t}$.

Ясно, что $u, v > 0$ и $\alpha + s\beta = \alpha + s(1-\alpha) = s + \alpha t$, т.е. $u + v = 1$. С другой стороны, $1 = \|e\| \le u\|f\| + v\|e_2\| < u + v$. Полученное противоречие показывает, что $\|f\| = 1$.

Таким образом, $\forall f \in \left(e_1, e\right)$, $f \in S_1(0)$, т.е. $\left(e_1, e\right) \subset S_1(0)$. Точно так же доказывается, что $\left(e, e_2\right) \subset S_1(0)$.

1.10. Для того чтобы ЛНП X было строго нормированным, необходимо и достаточно, чтобы шар $\overline{B_1}(0)$ был строго выпуклым, т. е., чтобы сфера $S_1(0)$ не содержала прямолинейных отрезков.

Доказательство достаточности условия. Пусть $S_1(0)$ не содержит прямолинейных отрезков. Докажем, что X – строго нормированное. Предположим противное, т.е. предположим, что существуют несонаправленные x_1, x_2, для которых $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Тогда для векторов $e_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|}$, чисел $\alpha_k = \dfrac{\|x_k\|}{\|x_1\| + \|x_2\|}$, $k = 1, 2$ и вектора $e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{\|x_1\| + \|x_2\|}$ будет $e_1, e, e_2 \in S_1(0)$. Противоречие сразу следует из утверждения задачи 1.8.

Необходимость условия доказать самостоятельно.

1.11. Доказать, что в ЛНП элемент x является предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда во множестве E найдется последовательность $\{x_n\}$, состоящая из элементов $x_n \neq x$, и такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

1.12. Пусть X и Y – ЛНП. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к элементу x, будет $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

1.13. Пусть X и Y – ЛНП, $f : X \to Y$ − непрерывное отображение. Доказать, что множество $E_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ замкнуто.

Решение. Пусть x − предельная точка множества E_y. Существует последовательность $\{x_n\} \subset E_y,\ x_n \neq x,\ \forall n$, такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Так как $f(x_n) = y,\ \forall n$ и f непрерывна в точке x, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ и, следовательно, $x \in E_y$.

1.14. X и Y − ЛНП, $f: X \to Y$ − непрерывное отображение, $a > 0$. Доказать, что $F_a = \{x \in X \mid \|f(x)\| \leq a\}$ − замкнутое, а $G_a = \{x \in X \mid \|f(x)\| < a\}$ – открытое множество.

1.15. Доказать, что $B_r(a)$ – открытое множество, а $\overline{B_r}(a)$ − замкнутое множество.

1.16. Доказать, что дополнение открытого множества замкнуто, а дополнение замкнутого множество открыто.

1.17. Доказать, что объединение любого семейства открытых множеств, а также пересечение конечного набора открытых множеств − открытое множество.

Решение. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ − семейство открытых множеств и пусть $x \in G = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. Существует $\alpha \in A$ такое, что $x \in G_\alpha$, а так как G_α − открытое множество, то существует шар $B_\rho(x)$, являющийся подмножеством G_α и, тем более, подмножеством G. Следовательно, x − внутренняя точка множества G.

Пусть теперь $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ и $x \in G$. В таком случае x принадлежит всем G_k, причем каждому из них вместе с некоторым шаром $B_{r_k}(x)$. Положим $r = \min_{k\leq n} r_k$. Ясно, что $r > 0$ и $B_r(x) \subset G_k,\ k = 1, 2, ..., n$. Поэтому $B_r(x) \subset G$ и x является внутренней точкой множества G.