№ 1545

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра инновационного проектирования

В.М. Клемперт

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
для практических занятий
студентов специальности 3514

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 519.82
К48

К48 *Клемперт В.М.* Теория систем и системный анализ: Учебное пособие для практических занятий. – М.: МИСиС, 2001. –100 с.

Учебное пособие для практических занятий по курсу «Теория систем и системный анализ» состоит из двух разделов. В первом разделе последовательно рассмотрены основные положения линейного программирования; геометрический и аналитический методы решения основной задачи линейного программирования, методы решения специальных задач линейного программирования: транспортной задачи, задачи выбора, многоиндексных транспортных задач. Второй раздел содержит элементы теории, используемые для решения задач динамического программирования и примеры решения характерных задач: распределение ресурсов, определение оптимальных траекторий; решение задач целочисленного, линейного и нелинейного программирования.

КЛЕМПЕРТ Виктор Моисеевич

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
для практических занятий студентов специальности 3514

Рецензент доц. А.П. Смирнов

Редактор Т.А. Кравченко

	Объем 100 стр.	Тираж 40 экз.
Заказ 902	Цена "С"	Регистрационный № 292

Московский государственный институт стали и сплавов,
119991, Москва, Ленинский пр-т, 4
Отпечатано в типографии издательства «Учеба» МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы, позволяющие решать задачи оптимизации, называются методами математического программирования (математического планирования). К ним относятся линейное программирование, динамическое программирование и т. д.

Линейное программирование дает возможность оптимизации использования имеющихся ресурсов при разработке методов управления техникой, при проектировании новых и реконструкции существующих объектов.

Решение задач оптимизации в общем виде сводится к поиску среди множества допустимых решений такого, при котором критерий оптимальности принимает максимальное или минимальное значение в зависимости от типа выбранного критерия. Например, если в качестве критерия выбрана производительность агрегата, то оптимальное решение будет соответствовать максимальному значению критерия; если же в качестве критерия выбрана себестоимость или бездействие оборудования, то оптимальное решение будет соответствовать минимальному значению критерия.

В качестве критерия оптимальности могут быть приняты производительность агрегата, затраты на транспорт, себестоимость выпускаемой продукции, расход материалов и т. д.

Применение линейного программирования для решения практических задач – процесс творческий. Непосредственному решению задачи должен предшествовать анализ содержания задачи, позволяющий выявить ее особенности.

Следует отметить, что термин «линейное программирование» нельзя признать удачным, поскольку под словом «программирование» обычно понимают теорию и практику составления программ для электронных вычислительных машин. Однако этот термин уже установился и является общепринятым в научной литературе. Под «программированием» в данном случае понимаются методы решения экстремальных задач, а эпитет «линейное» подчеркивает линейность исследуемой функции и характер ограничений, наложенных на ее переменные.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Основная задача линейного программирования

1.1.1. Общие положения

Общепринято переменные величины обозначать буквами x_1, x_2, x_n. Уравнение относительно переменных x_1, x_2, ... x_n называется линейным, если его можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\ ,$$

где a_1, a_2, ... a_n – произвольные действительные числа.

Набор значений переменных $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, ... $x_n = \lambda_n$ удовлетворяет заданному уравнению, если в результате подстановки этих значений переменных в данное уравнение оно превращается в арифметическое тождество.

Предположим, что задана система m линейных уравнений относительно n переменных x_1, x_2, ... x_n. В общем случае такую систему можно записать в следующем виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$......................$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m.$$

Коэффициенты a_{ij} при переменных в системе образуют m строк и n столбцов и называются матрицей системы. Если матрицу пополнить столбцом свободных членов, то получим новую матрицу. Эта матрица содержит, очевидно, m строк и $n + 1$ столбцов и называется *расширенной матрицей системы*.

Приведенная выше система называется *совместной*, если она имеет, по крайней мере, одно решение. В ином случае система называется *несовместной*. Совместная система может обладать единственным решением, но может иметь более одного решения. Если в совместной системе число уравнений равно числу переменных, то матрица такой системы называется квадратной, а сама система имеет единственное решение.

Между тем, в задачах линейного программирования встречаются как раз такие совместные системы, в которых число n переменных больше числа m уравнений системы. В таком случае система имеет бесчисленное множество решений. Для получения единственного решения избыточному числу $(n - m)$ переменных системы придают произвольные значения и тогда эти переменные называют *свободными*. Переменные, соответствующие числу m строк матрицы, называют *базисными*.

Основная задача линейного программирования (ОЗЛП) формулируется следующим образом.

Требуется найти максимум (или минимум) линейной функции n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$

$$L = L\ (x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

при следующих ограничениях, наложенных на переменные
$x_1, x_2, ..., x_n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m;$$

$$x_1 > = 0,\ x_n > =0,$$

где $b_1 ... b_n$ – свободные члены, представляющие собой ограничения, наложенные на решение задачи.

Введем некоторые определения.

Линейную функцию – критерий качества выбранных переменных – принято называть ***линейной формой*** задачи, а множество наборов переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям – *областью определения задачи* линейного программирования или областью определения ее линейной формы.

Систему равенств и неравенств, порождающую область определения задачи, называют ***системой условий*** задачи.

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \quad a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \quad a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m-1,l} \; a_{m-l,2} \quad a_{m-l,n} \\ a_{m1} \; a_{m2} \quad a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленную из коэффициентов системы условий, называют ***матрицей условий*** задачи.

Система условий задачи содержит как равенства, так и неравенства, причем требования неотрицательности переменных выделяют в отдельную систему ограничений. Такую систему условий называют задачей со ***смешанными условиями***.

Каждый столбец A_j матрицы условий называют ***вектором условий*** задачи.

Вектор, составленный из свободных членов условий, называют ***вектором ограничений*** рассматриваемой задачи.

В векторной форме условия задачи имеют следующий вид:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n <= B.$$

Набор переменных , удовлетворяющий системе условий задачи, называется ***планом*** рассматриваемой задачи. Числа называются ***компонентами*** или составляющими этого плана.

Каждый план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ задачи определяет конкретное значение ее линейной формы: когда речь идет о задачах, связанных с максимизацией линейной формы, чем больше это значение, тем лучше данный план.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, определяющий максимально возможное значение линейной формы задачи, называется ***оптимальным планом*** или решением задачи. В этом случае выполняется неравенство

$$L(X^*) >= L(X)$$

для любого плана X задачи.

Естественно, что для задач минимизации линейной формы условие оптимальности принимает следующий вид:

$$L(X^*) <= L(X)$$

для любого плана X задачи.

В зависимости от вида системы условий решение ОЗЛП приводит к одному из следующих случаев.

Случай 1. Условия противоречивы и не существует набора чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющего всем условиям задачи, т. е. задача не имеет ни одного плана.

Случай 2. Условия непротиворечивы, а область, определяемая ими, неограниченна. Противоречивые условия задачи или неограниченность области определения линейной формы квалифицируются как неразрешимость задачи линейного программирования.

Случай 3. Система условий совместна и область, определяемая ею, ограничена. В этой ситуации задача линейного программирования имеет решение, т. е. оптимальный план.

Запись линейной формы и, главным образом, системы условий в разных задачах заметно различается. В одних случаях искомые переменные зависят от одного индекса, в других случаях – от двух. В одних задачах условия имеют вид равенств, в других – условия являются неравенствами. Ряд задач имеет смешанные условия: часть условий – линейные уравнения, часть – линейные неравенства. Разнообразие записи условий задач требовало бы разработки специальных методов решения различных классов задач и затрудняло бы исследование общих закономерностей линейного программирования. Поэтому естественно стремление свести любую задачу линейного программирования к наиболее простой и удобной для исследования форме. Таким форматом записи ОЗЛП является ***каноническая форма***; в этом случае задача формулируется следующим образом: найти максимум (минимум) линейной формы

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

при системе условий

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m;$$

$$x_1 >= 0, x_n >= 0.$$

Система условий может быть представлена и в векторном виде:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B,$$

где A_j и B – вектор условий и вектор ограничений задачи, соответственно.