№ 2441

И.Э. Гурьянова
Е.В. Левашкина

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей: краткий курс с примерами

Учебное пособие

№ 2441

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

И.Э. Гурьянова
Е.В. Левашкина

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей: краткий курс с примерами

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

Москва 2016

УДК 519.2
Г95

Рецензент
д-р техн. наук, проф. *Б.С. Мастрюков*

Гурьянова И.Э.

Г95 Теория вероятностей и математическая статистика : теория вероятностей : краткий курс с примерами : учеб. пособие / И.Э. Гурьянова, Е.В. Левашкина. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 106 с.

ISBN 978-5-87623-915-0

Учебное пособие охватывает разделы дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», входящие в учебные программы для студентов вузов, обучающихся по техническим и экономическим специальностям. Пособие содержит основные теоретические сведения по теории вероятностей и предназначено для закрепления теоретических знаний по этому курсу. В нем рассматриваются элементы комбинаторики, основные понятия и теоремы теории вероятностей, законы распределения случайных величин, закон больших чисел. В конце каждого раздела теоретический материал иллюстрируется примерами.

Предназначено для студентов второго курса всех институтов НИТУ «МИСиС», учебный план которых содержит курс теории вероятностей; также может быть использовано при самостоятельной работе и в ходе подготовки к экзаменам. Пособие может быть полезно преподавателям вузов, а также лицам, изучающим теорию вероятностей самостоятельно.

УДК 519.2

ISBN 978-5-87623-915-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

Предварительно рассмотрим необходимую в комбинаторике функцию – факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Свойство факториала: $(n+1)! = n!(n+1)$. При этом считается, что 0! = 1.

При больших значениях *n* справедлива формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \; (n \to \infty)$$

или

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Полуфакториалы:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n;$$
$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Свойства полуфакториалов:

$$(2n)!!(2n-1)!! = (2n)!;$$
$$(2n)!! = 2^n !!n!;$$
$$(2n+1)!! = (2n-1)!!(2n+1);$$
$$(2n+2)!! = (2n)!!(2n+2).$$

Комбинаторика – раздел математики, изучающий методы решения задач, связанных с выбором и расположением элементов конечного множества, в частности комбинаторных задач на подсчет числа различных комбинаций.

Будем рассматривать последовательности данной длины $n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящие из некоторых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (не обязательно различных).

Правило произведения (принцип логического умножения). *Если элемент x_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент x_2 может быть выбран n_2 способами и т.д., после каждого (k – 1) выбора элемент x_k может быть выбран n_k*

способами, то выбор всех элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Пример

В группе 30 человек. Нужно выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. 30 · 29 · 28 = 24 360.

Правило суммы (принцип логического сложения). *Если элемент x_1 может быть выбран n_1 способами, элемент x_2 другими n_2 способами, x_3 – отличными от первых двух n_3 способами и т.д., $x_k - n_k$ способами, отличными от первых (k – 1), то выбор одного из элементов – или x_1, или x_2, или x_k может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.*

Пример

В ящике 300 деталей. Из них 150 деталей первого сорта, 120 – второго, а остальные – третьего сорта. Сколькими способами можно извлечь из ящика одну деталь первого или второго сорта?

Решение. $n_1 = 150$, $n_2 = 120$; $n_1 + n_2 = 150 + 120 = 270$.

Пусть дано множество из *n* различных элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из *m* элементов, $0 \le m \le n$.

Если комбинации из *n* элементов по *m* отличаются только составом элементов (т.е. представляют собою просто подмножества), то их называют ***сочетаниями*** из *n* элементов по *m*.

Число сочетаний из *n* элементов по *m* равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Свойства сочетаний

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$, ибо $0! = 1$.

2. $C_n^m = C_n^{n-m}$ – свойство симметрии.

3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ – рекуррентное соотношение.

4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ – следствие бинома Ньютона.

5. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Свойство 5 означает, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, т.е.

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots .$$

Если комбинации из n элементов по m отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем и другим), то такие комбинации называются ***размещениями*** из n элементов по m. Таким образом, размещения – это упорядоченные подмножества из n элементов по m.

Число размещений равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1),$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют ***перестановками*** из n элементов.

Число перестановок

$$P_n = n!.$$

Если в сочетаниях (размещениях) из n элементов по m некоторые из элементов (или все) могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания (размещения) называются ***сочетаниями (размещениями) с повторениями из n элементов по m***.

Замечание. В этом случае m может быть больше n.

Число сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m .$$

Число размещений с повторениями

$$\tilde{A}_n^m = n^m .$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 сорта пирожных?

Решение. $m > n$; $\widetilde{C}_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$.

Пример

Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, при условии, что цифры могут повторяться?

Решение. $\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Если в множестве из n элементов есть n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида, …, n_k элементов k-го вида, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то такие перестановки из этих n элементов называются ***перестановками с повторениями***.

Число перестановок с повторениями

$$P_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Пример

Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зеленые и 4 красные лампочки?

Решение. $P_6\left(2,4\right) = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В группе 22 студента, из них 5 отличников. Сколькими способами можно сформировать делегацию из 5 студентов, в числе которых двое отличников?

Ответ: 6800.

2. Сколькими способами можно выбрать 5 чисел из 36 в карточке «Спортлото», чтобы 3 числа были счастливыми?

Ответ: 4650.

3. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, если использовать красный, синий, белый цвета?

Ответ: 6.

4. Сколькими способами можно составить список из 9 студентов?

Ответ: 362 880.

5. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Ответ: 40 320.

6. Сколькими способами можно рассадить 5 гостей за круглым столом?

Ответ: 120.

7. Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по 8 различным конвертам, если в каждый конверт кладется только 1 письмо?

Ответ: 40 320.

8. Сколькими способами могут разместиться на скамейке 10 человек?

Ответ: 3 628 800.

9. Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зеленые и 4 красные лампочки?

Ответ: 15.

10. Сколько всего существует семизначных чисел, у каждого из которых цифра 6 встречается три раза, а цифра 5 – четыре раза?

Ответ: 35.

11. Сколькими способами можно переставить буквы в слове: а) математика; б) абракадабра; в) какао, чтобы получались всевозможные различные наборы букв?

Ответ: а) 151 200; б) 83 160; в) 30.

12. Сколько различных шестизначных чисел можно написать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Ответ: 20.

13. Сколькими способами можно выбрать 4 человек на 4 различные должности из 9 кандидатов на эти должности?

Ответ: 3024.

14. В группе 25 студентов. Они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

Ответ: 600.

15. Из скольких различных элементов можно составить 210 размещений по 2 элемента в каждом?

Ответ: 15.

16. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Ответ: 303 600.

17. Собрание, на котором присутствуют 20 человек, избирает в президиум 2 человек, один из которых должен быть председателем, а другой – секретарем. Каким числом способов это можно сделать?

Ответ: 380.

18. Профком учреждения, состоящий из 9 человек, на своем заседании должен избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть?

Ответ: 504.