№ 2454

В.А. Карасев
Г.Д. Лёвшина

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей

Практикум

№ 2454

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

В.А. Карасев
Г.Д. Лёвшина

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей

Практикум

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

Москва 2015

УДК 519.2
К21

Рецензент
канд. экон. наук, проф. *В.Ф. Михин*

Карасев, В.А.

К21 Теория вероятностей и математическая статистика : теория вероятностей : практикум / В.А. Карасев, Г.Д. Лёвшина. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2015. – 125 с.

ISBN 978-5-87623-901-3

Практикум предназначен для подготовки к занятиям, контрольным работам и к выполнению лабораторных работ (типовых расчетов) по первой части курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров решения типовых задач, дается подробное описание выполнения лабораторных работ (типовых расчетов), разбирается решение типовых вариантов контрольных работ. По каждому разделу даются задачи для самостоятельной работы с ответами. В заключение приводятся варианты контрольных работ с ответами.

Предназначен для студентов всех специальностей.

УДК 519.2

ISBN 978-5-87623-901-3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Практические занятия по теории вероятностей 6
1.1. Предмет теории вероятностей 6
1.2. Случайные события. Вероятность случайного события 7
1.3. Классическое определение вероятности 9
1.4. Геометрическое определение вероятности 12
1.5. Расчет вероятностей с помощью теорем сложения и умножения вероятностей 17
1.6. Независимость случайных событий 24
1.7. Формула полной вероятности и формулы Байеса 30
1.8. Дискретные случайные величины 36
1.9. Биномиальное распределение дискретной случайной величины 41
1.10. Числовые характеристики дискретных случайных величин 51
1.11. Системы случайных величин, их числовые характеристики 57
1.12. Непрерывные случайные величины, их числовые характеристики 62
1.12.1. Равномерное распределение непрерывной случайной величины 69
1.12.2. Нормальное распределение 70
1.13. Непрерывные двумерные случайные величины 77
1.14. Понятие о центральной предельной теореме. Интегральная теорема Лапласа 84
2. Задания для самостоятельной работы студентов 89
2.1. Типовой расчет «Дискретные случайные величины» 89
2.2. Типовой расчет «Непрерывные случайные величины» 95
2.3. Типовые варианты контрольных работ 100
2.4. Решение типовых вариантов контрольных работ 102
2.5. Варианты контрольных работ для самостоятельной работы 112
Ответы 119
Приложение. Значения функции интеграла вероятностей 124

ВВЕДЕНИЕ

Жизнь – без начала и конца.
Нас всех подстерегает случай.
А. Блок. Народ и поэт

Среди математических дисциплин, изучаемых студентами технических и экономических направлений, особое положение занимают теория вероятностей и математическая статистика. Именно теория вероятностей представляет собой теоретическую базу статистических дисциплин и ее методы используются при изучении массовых совокупностей наблюдаемых явлений, обработке результатов наблюдений и выявлении «статистических закономерностей».

Кроме того, следует отметить значимое методологическое значение теории вероятностей в познавательных процессах, в способах построения различных умозаключений на основании изучения результатов опыта или испытания в целях составления целостного представления об общей закономерности некоторого изучаемого процесса.

Изучение закономерностей, описывающих какие-то процессы и свойства, формирует научное мировоззрение познаваемости материального мира, что способствует овладению современным научным стилем мышления, столь необходимым выпускнику любого высшего учебного заведения.

Природные и другие процессы сложны и многообразны. На их изменения оказывает влияние множество различных факторов, носящих, как правило, случайный характер. Исследование задач, относящихся к массовым случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относятся к началу XVII в. Знаменитый физик Галилей исследует ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные явления. Затем создается теория страхования, основанная на анализе закономерностей таких массовых случайных явлений, как заболеваемость, смертность и т.д.

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII в. и связано с именами французских ученых Паскаля (1623–1662), Ферма (1601–1665) и Гюйгенса (1629–1695). Дальнейшим развитием теория вероятностей обязана Якову Бернулли (1654–1705), Муавру (1667–1754), Лапласу (1749–1827), Гауссу (1777–1855) и Пуассону (1781–1840).

В 20–30-х годах XIX в. в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей и математическая статистика были поставлены на прочную математическую основу и сделаны эффективными средствами познания. Среди ученых русской математической школы следует назвать в первую очередь П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922), А.М. Ляпунова (1857–1918).

Советская школа теории вероятностей и математической статистики занимает в мировой науке ведущее место. Основополагающие работы принадлежат А.Н. Колмогорову (1903–1989), А.Я. Хинчину (1894–1959), С.Н. Бернштейну (1880–1968), В.И. Романовскому (1879–1954), Н.В. Смирнову (1900–1966), Е.Е. Слуцкому (1880–1948), Б.В. Гнеденко (1912–1995), Ю.В. Linнику (1901–1972).

Развитие зарубежной теории вероятностей и математической статистики в настоящее время связано с именами английских ученых У. Госсета (Стьюдента) (1876–1937), Р. Фишера (1890–1962), Э. Пирсона (1857–1936), В. Феллера (1906–1970) и американских Ю. Неймана (1894–1936) и А. Вальда (1902–1950).

Данный практикум адресуется студентам всех специальностей НИТУ «МИСиС». Пособие подготовлено в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов. Рассматриваются следующие разделы курса: случайные события, дискретные и непрерывные случайные величины, закон больших чисел, числовые характеристики случайных величин.

Надеемся, что данный практикум будет способствовать воспитанию у студентов прикладной математической культуры, выработке навыков математического исследования прикладных вопросов, а именно, переводу реальной задачи на адекватный математический язык, выбору оптимального метода ее исследования и интерпретации результата исследования.

Для преодоления трудностей при решении задач по теории вероятностей следует решить достаточно много задач. Именно это поможет в понимании теоретико-вероятностных построений математической модели при анализе конкретной ситуации.

При решении задач рекомендуется обращать внимание не только на формальное выполнение расчетов и использование соответствующих формул, а прежде всего на логический анализ содержания задачи, пояснения к выполнению операций, использование условных обозначений, четкую формулировку промежуточных и окончательных результатов решения, используемых в задаче понятий и определений. Иногда бывает полезно проанализировать другие возможные подходы к решению задачи или различные вариации условий задачи.

1. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Предмет теории вероятностей

В практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых нельзя предсказать, результат которых, как говорят, зависит от случая. Например, то, что застрахованный объект (дом, домашнее имущество и т.п.) будет уничтожен в результате стихийного бедствия, – дело случая. Чем же тогда страховые органы руководствуются в своей работе и можно ли предсказывать что-либо о случайных явлениях? Оказывается, что если о будущем определенного застрахованного объекта сказать ничего нельзя, то о состоянии большого их числа можно почти наверняка сказать многое.

Случайное явление можно иногда охарактеризовать *частотой,* т.е. отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить. Примерами частот могут служить доля родившихся за год мальчиков в населенном пункте, удельный вес нестандартных деталей в партии и т.п.

Если частота случайного явления в сериях из большого числа испытаний почти постоянна, т.е. колеблется незначительно около некоторой постоянной величины, то будем говорить, что этому явлению присуща *устойчивость частот.* Например, рождаемость мальчиков обладает этим свойством.

Случайные явления или события с устойчивой частотой широко распространены в физике, технике, металлургии, машиностроении (теория допусков), экономике и других отраслях знаний.

Случайность события или явления не означает его беспричинности. Предметы, явления в природе органически связаны, зависят и обусловливают друг друга. Ни одно явление в природе не может быть понято, если взять его в изолированном виде, и, наоборот, любое явление может быть понято и обосновано, если оно рассматривается в неразрывной связи с окружающими явлениями.

Место падения снаряда при стрельбе из орудия является случайным, но это не означает, что оно не имеет причинного обоснования. Наоборот, траектория полета снаряда является результатом воздействия на снаряд очень большого числа факторов. Дело лишь в том, что каждый фактор количественно по-разному проявляется в различные моменты времени и точно указать действие каждого из них в определенный момент времени и суммарное действие их на траекторию данного снаряда мы не можем. В результате место падения снаряда становится случайным.

Итак, *теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются только случайные явления (события) с устойчивой частотой и выявляются закономерности при массовом их повторении.*

1.2. Случайные события. Вероятность случайного события

Для изучения физических явлений производят наблюдения или опыты. Их результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин. При повторении опытов мы обнаруживаем разброс их результатов. Например, повторяя измерения одной и той же величины одним и тем же прибором при сохранении определенных условий (температура, влажность и т.п.), мы получаем результаты, которые хоть немного, но все же отличаются друг от друга. Даже многократные измерения не дают возможности точно предсказать результат следующего измерения. В этом смысле говорят, что результат измерения есть величина случайная. Еще более наглядным примером случайной величины может служить номер выигрышного билета в лотерее. Можно привести много других примеров случайных величин. Все же и в мире случайностей обнаруживаются определенные закономерности. Математический аппарат для изучения таких закономерностей дает теория вероятностей. В данном пособии мы познакомимся с теми разделами теории вероятностей, которые относятся к случайным величинам и их статистическим применениям.

Для простоты будем пользоваться одним термином *испытание* для таких понятий, как опыт (эксперимент), наблюдение, измерение и т.п. Будем считать, что испытание можно повторять неограниченное число раз. С испытанием будем связывать одну или несколько случайных величин или же будем просто выделять отдельные возможные исходы испытания в качестве случайных событий.

Событием называется эксперимент с двумя возможными исходами («да» или «нет»). *Случайным* называется такое событие, результат которого нельзя предсказать до проведения эксперимента. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... и т.д.

Пусть при n испытаниях событие A появилось m раз. Отношение m/n называется *частотой (относительной частотой)* события A и обозначается $\omega(A) = m/n$.

Опыт показывает, что при многократном повторении испытаний частота $\omega(A)$ случайного события обладает устойчивостью. То есть в различных сериях испытаний относительная частота случайного события A принимает близкие значения: если при большом числе n испытаний относительная частота $\omega(A)$ была равна, например 0,2, то и в любой другой серии из достаточного большого числа n' испытаний относительная частота $\omega(A)$ будет близка к числу 0,2. Например, при многократном бросании правильного игрального кубика относительная частота выпадения каждого числа очков от 1 до 6 всегда близка к числу 1/6. Отмеченное свойство относительных частот называется *статистической устойчивостью*. Таким образом, относительные частоты случайного события A в различных сериях испытаний группируются около определенного неслучайного числа; это число называется *вероятностью случайного события A* и обозначается символом $P(A)$. Оно выражает объективную возможность появления события. Чем больше вероятность события, тем более возможным оказывается его появление.

Подчеркнем, что статистическая устойчивость относительной частоты события A и, следовательно, наличие определенной его вероятности $P(A)$ является основным, определяющим свойством случайного события. События, не обладающие этим свойством, в теории вероятностей не рассматриваются.

Событие называется *достоверным,* если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется *невозможным,* если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара – достоверное событие; появление белого шара – невозможное событие.

Если событие достоверно, то оно произойдет при каждом испытании ($m = n$). Поэтому частота достоверного события всегда равна единице. Наоборот, если событие невозможно, то оно ни при одном испытании не осуществится ($m = 0$). Следовательно, частота невозможного события в любой серии испытаний равна нулю. Поэтому *вероятность достоверного события равна единице*, а *вероятность невозможного события равна нулю*.

Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то его частота $\omega(A) = m/n$ при большом числе испытаний будет мало отличаться от некоторого числа p (где $0 < p < 1$) – *вероятности события A*.

Два события называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. В противоположном случае события называются *совместными*.

Пример. Студент приобрел билет лотереи. Тогда событие A, состоящее в том, что его билет выиграет, и событие B, состоящее в том, что его билет не выиграет, являются несовместными. Для лица, имеющего два билета лотереи, события A и B, заключающиеся в том, что он выиграет соответственно по первому и второму билетам, являются совместными, так как наступление события A (он выиграл по первому билету) не исключает возможность наступления события B (выиграть по второму билету).

Несовместность более чем двух событий означает их *попарную несовместность*.

Два события, одно из которых обязательно должно произойти, но наступление одного исключает возможность наступления другого, называются *противоположными*. Событие, противоположное событию A, будем обозначать символом $\overline{A}$.

Пример. События «изделие удовлетворяет стандарту» и «изделие не удовлетворяет стандарту» – противоположные.

1.3. Классическое определение вероятности

Как было сказано выше, при большом числе n испытаний частота $\omega(A) = m/n$ появления события A обладает устойчивостью и дает приближенное значение вероятности события A, т.е. $P(A) \approx \omega(A)$. Это обстоятельство позволяет находить приближенно вероятность события опытным путем. Практически такой способ нахождения вероятности события не всегда удобен. В ряде случаев вероятность события удается определить до опыта с помощью понятия равновероятности событий (или равновозможности).

Два события называются *равновероятными* (или *равновозможными*), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Равновозможность исходов устанавливается либо из соображений симметрии, как при подбрасывании монеты (мы считаем, что герб и решка равновозможны), при бросании игрального кубика (выпадения любого числа очков от 1 до 6 равновозможны), либо из условия тщательного предварительного «перемешивания» исходов, как при розыгрыше лотереи, игре в карты, домино и т.п.

Событие B называется *благоприятствующим* событию A, если наступление события B влечет за собой наступление события A.

Так, если A – появление четного числа очков при бросании игрального кубика, то появление цифры 4 представляет собой событие, благоприятствующее событию A.

Пусть события $E_1, E_2, ..., E_N$ в данном опыте равновозможны, попарно несовместны, в результате любого опыта одно из них обязательно должно произойти. Будем называть их *исходами* испытания. Предположим, что событию A благоприятствуют M исходов испытания. Тогда вероятностью события A в данном опыте называют отношение M/N. Итак, мы приходим к следующему определению.

Вероятностью $P(A)$ события в данном опыте называется отношение числа M исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу N равновозможных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Пример. Пусть испытание состоит в подбрасывании двух монет: 5 и 10 руб. Тогда множество исходов будет содержать четыре события: {ГГ, ГР, РГ, РР}, где Г – герб, Р – решка; первая буква относится к монете 5 руб., вторая – к монете 10 руб., $N = 4$. Пусть событие A = {ГГ} (выпадение двух гербов), тогда $M_A = 1$; B = {ГР, РГ} (выпадение ровно одного герба), в этом случае $M_B = 2$, C = {ГГ, РГ, ГР} (выпадение хотя бы одного герба), здесь $M_C = 3$. Тогда по формуле (1.1) вероятности событий равны:

$$P(A) = 1/4,\ P(B) = 2/4 = 1/2,\ P(C) = 3/4.$$

Задача 1.1. 13 человек рассаживаются за круглым столом случайным образом. Найти вероятность того, что Иванов и Петров окажутся рядом.

Решение

Пусть Иванов сел на произвольное место за столом. Для Петрова осталось 13 – 1 = 12 мест, $N = 12$, около Иванова есть только два соседних места, слева и справа, т.е. $M = 2$, поэтому

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Задача 1.2. Брошены два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

Решение

Число возможных исходов при бросании двух игральных кубиков равно $N = 6 \cdot 6 = 36$. Выпишем благоприятные исходы: (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1). Значит $M = 6$ и $P(A) = 6/36 = 1/6$.

Задача 1.3. Случайно открывают книгу, в которой 185 страниц. Найти вероятность того, что номер страницы оканчивается на цифру «2».

Решение

$$M = 18 + 1 = 19,\ \ N = 185,\ \ P(A) = 19/185.$$

Задача 1.4. Брошены 3 игральных кубика. Найти вероятность того, что на них выпадет одинаковое количество очков.

Решение

Число возможных исходов при бросании трех игральных кубиков равно $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Выпишем благоприятные исходы: (1, 1, 1); (2, 2, 2), ..., (6, 6, 6), поэтому $M = 6$ и $P(A) = 6/216 = 1/36$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, ..., 9. 3 карточки выбирают случайным образом и раскладывают в порядке выбора. Найти вероятность того, что полученное при этом число (от 012 до 987) делится на 36.

3.2. Брошены две игральных кости (кубика). Найти вероятность того, что на одной из них число выпавших очков на 3 больше, чем на другой.

3.3. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном числе (от 100 до 999) все цифры разные.

3.4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Все получившиеся кубики перемешаны. Найти вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенных грани.

3.5. В урне 4 черных и 6 белых шаров. Из урны, не глядя, вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.