№ 1911

В.Н. Шинкин

Теоретическая механика

Динамика и аналитическая механика

Курс лекций

№ 1911

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»**

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

В.Н. Шинкин

Теоретическая механика

Динамика и аналитическая механика

Курс лекций

Допущено учебно-методическим объединением
по образованию в области металлургии в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению Металлургия

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 531.1
Ш62

Р е ц е н з е н т
д-р техн. наук, проф. *Б.А. Романцев*

Шинкин, В. Н.
Ш62 Теоретическая механика: Динамика и аналитическая механика : Курс лекций / В.Н. Шинкин. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 206 с.
ISBN 978-5-87623-391-2

Рассмотрены основные теоретические и практические вопросы динамики материальной системы и аналитической механики по следующим темам: геометрия масс, динамика материальной системы и твердого тела (центр масс, количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия, работа силы, закон сохранения механической энергии), принцип Даламбера, аналитическая статика, принцип виртуальных перемещений Лагранжа, общее уравнение динамики, аналитическая динамика, уравнения Лагранжа второго рода и уравнения Гамильтона.

Темы изложены с учетом специфики металлургических процессов. Подробно даны решения большого числа задач, приведены 10 домашних заданий по динамике механизмов и приспособлений, используемых в металлургическом производстве.

Предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 150100 «Металлургия».

УДК 531.1

ISBN 978-5-87623-391-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика – одна из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практики. Так, начало развития механики было тесно связано с земледелием (поднимание воды для орошения земельных участков в Египте), ростом городов, возведением крупных построек, развитием ремесел и мореплаванием. Уже при строительстве египетских пирамид применялись простейшие механические приспособления: рычаги, блоки и наклонная плоскость. Однако, несмотря на то, что в древние времена человечество обладало некоторыми эмпирическими знаниями по механике, потребовались многие века для того, чтобы установить основные законы механики и заложить фундамент этой науки.

Основоположником механики как науки является знаменитый древнегреческий ученый **Архимед** (287–212 гг. до н. э.). Он дал точное решение задачи о равновесии сил, приложенных к рычагу, создал учение о центре тяжести тел, открыл и сформулировал закон о гидростатическом давлении жидкости на погруженное в нее тело (закон Архимеда).

На первой стадии развития механики, от древнего мира до XIV в., в результате изучения простейших машин создается учение о силах. Однако быстрое и успешное развитие механики начинается лишь с эпохи Возрождения, когда были созданы благоприятные условия для развития науки и техники и заложены основы для мировой торговли и перехода ремесла в мануфактуру, которая послужила исходным пунктом для современной крупной промышленности. В этот период для решения практических задач требуются исследования движения тел, и на основе накопленного за четыре столетия опыта к концу XVII в. создаются основы механики материальных тел.

Блестящим представителем эпохи Возрождения является гениальный итальянский художник, физик, механик и инженер **Леонардо да Винчи** (1451–1519). В области механики он изучил движение падающего тела, движение тела по наклонной плоскости, явление трения и ввел понятие момента силы.

Зарождение небесной механики (науки о движении небесных тел) связано с великим открытием **Николая Коперника** (1473–1543) – создателя гелиоцентрической системы мира, сменившей геоцентрическую систему Птолемея. Это открытие произвело переворот в научном мировоззрении той эпохи и освободило естествознание от теологии. На основании учения Коперника и астрономических наблюдений **Иоганн Кеплер** (1571–1630) сформулировал три закона движения планет.

Создание основ динамики принадлежит великим ученым – итальянскому **Галилео Галилею** (1564–1842) и англичанину **Исааку Ньютону** (1643–1727), открывшему всемирный закон тяготения. В знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) Ньютон в систематическом виде изложил основные законы классической механики.

XVIII в. характеризовался разработкой общих принципов классической механики и важнейшими исследованиями по механике твердого тела, гидродинамике и небесной механике. Наиболее крупными зарубежными учеными XVIII и XIX вв. в области механики являются **Иван Бернулли** (1667–1748), **Даниил Бернулли** (1700–1782), **Жан Лерон Даламбер** (1717–1783), **Жозеф Луи Лагранж** (1736–1813). В работах французских ученых **Пьера Вариньона** (1654–1722) и **Луи Пуансо** (1777–1859) наряду с динамикой дальнейшее развитие получила и статика. Вариньон решил задачи сложения сил, приложенных в точке, и параллельных сил. Он получил условия равновесия этих сил, доказал теорему о моменте равнодействующей и предложил создание основ графостатики (построение силового многоугольника).

Развитие науки в России связано с образованием по инициативе Петра I в 1725 г. в Петербурге Российской Академии наук. Большое влияние на развитие механики оказали труды гениального русского ученого, основателя Московского университета **Михаила Васильевича Ломоносова** (1711–1765) и знаменитого математика, астронома и физика **Леонарда Эйлера** (1707–1783). За 30 лет работы в Российской Академии наук Эйлер создал большое количество научных трудов по математике, механике твердого и упругого тела, гидромеханике и небесной механике.

Огромное значение для развития механики имеют работы выдающихся российских ученых: **М.В. Остроградского** (1801–1861), **П.Л. Чебышева** (1821–1894), **С.В. Ковалевской** (1850–1891), **А.М. Ляпунова** (1857–1918), **И.В.Мещерского** (1859–1935), **К.Э. Циолковского** (1857–1935), **А.Н. Крылова** (1863–1945), **Н.Е. Жуковского** (1847–1921), **С.А. Чаплыгина** (1869–1942) и многих других. Российскими механиками выполнены фундаментальные исследования по теории полета ракет, реактивных самолетов, искусственных спутников Земли и космических станций.

Теоретическая механика является научной основой важнейших отраслей современной техники. Она также необходима для дальнейшего изучения ряда учебных курсов: «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин», «Механика сплошных сред» и «Обработка металлов давлением».

1. КРАТКИЙ КУРС СТАТИКИ И КИНЕМАТИКИ

1.1. Краткий курс статики

Сила – это мера механического взаимодействия твердых тел, в результате которого тела могут приобретать ускорения или деформироваться. Сила является векторной величиной и характеризуется модулем, точкой приложения и направлением (линией действия силы) (рис. 1.1).

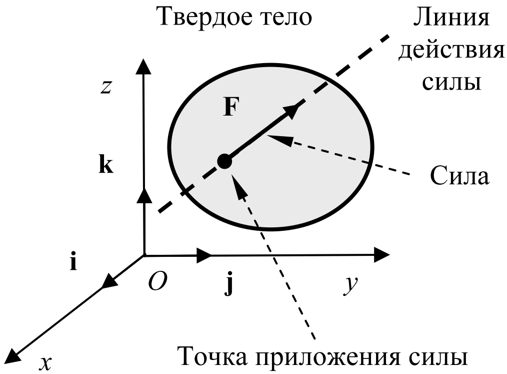


Рис. 1.1

Пусть $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z)$, $[\mathbf{F}] =$ Н (ньютон), $F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$ − модуль силы; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ − единичные орты, $|\,\mathbf{i}\,| = |\,\mathbf{j}\,| = |\,\mathbf{k}\,| = 1$.

Главным вектором системы сил $\{\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n\}$ называется их геометрическая сумма (рис. 1.2)

$$\boxed{\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i,}$$

$$\mathbf{F}_O = \left(F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz}\right),\ \ \mathbf{F}_i = \left(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\right),\ \ \mathbf{F}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{ix}\,,\ \ \mathbf{F}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{iy}\,,\ \ \mathbf{F}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{iz}\,.$$

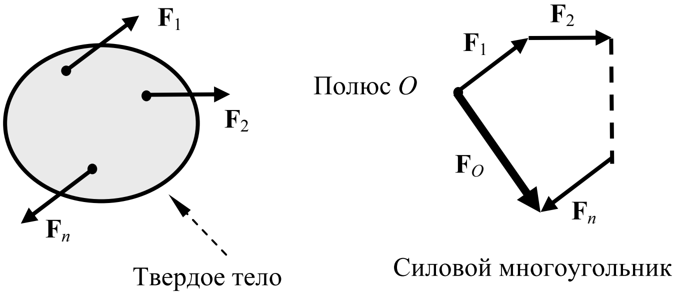


Рис. 1.2

Моментом силы относительно точки называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\boxed{\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =}$$

$$= \mathbf{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \mathbf{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \mathbf{k}\left(xF_y - yF_x\right) = \left(M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}\right),$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки приложения силы;

$\mathbf{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$ – вектор силы;

$M_{Ox} = yF_z - zF_y$, $M_{Oy} = zF_x - xF_z$, $M_{Oz} = xF_y - yF_x$ – ***моменты силы относительно осей*** x, y и z (рис. 1.3).

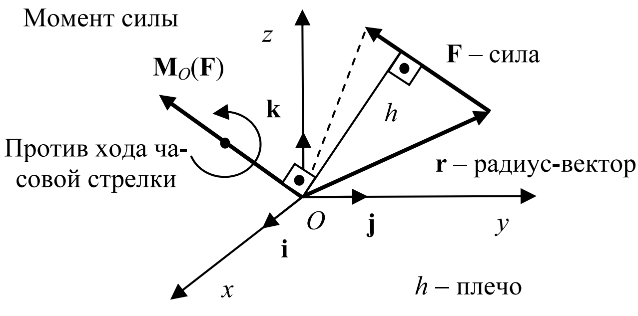


Рис. 1.3

Момент силы $\mathbf{M}_O$ перпендикулярен к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ и вектору силы $\mathbf{F}$.

Положительным направлением момента силы считается направление, откуда «поворот» силы виден происходящим против хода часовой стрелки. В механике ***плечом*** называется кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы. По абсолютному значению момент силы относительно точки равен произведению *силы на плечо*:

$$\left|\mathbf{M}_O\right| = \left|\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right| = rF\sin\left(\mathbf{r},\mathbf{F}\right) = F\left(r\sin\left(\mathbf{r},\mathbf{F}\right)\right) = Fh.$$

Для определения направления момента силы удобно пользоваться ***«правилом правой руки»*** (рис. 1.4).

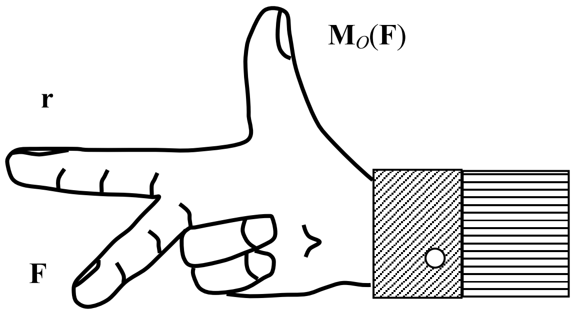


Рис. 1.4

Главным моментом системы сил относительно выбранной точки называется геометрическая сумма моментов всех сил относительно этой точки:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O\left(\mathbf{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i\,.}$$

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил:

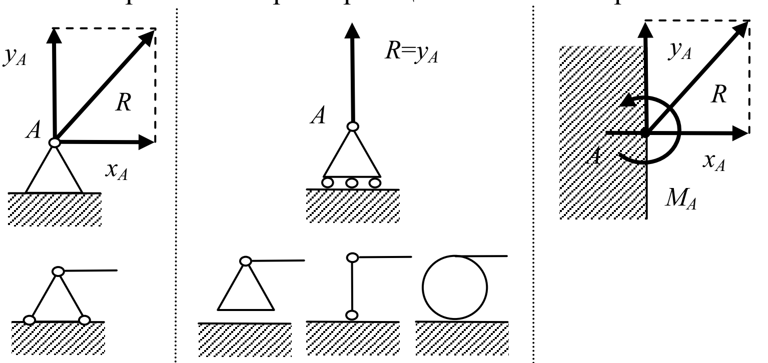
$$\boxed{\mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{F}_O = 0.}$$

Эти два векторных равенства эквивалентны шести скалярным равенствам

$$F_{Ox} = 0, \quad F_{Oy} = 0, \quad F_{Oz} = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0.$$

Парой сил называется совокупность двух сил $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$, равных по модулю и противоположных по направлению.

Основные опоры и их опорные реакции показаны на рис. 1.5.



Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора	Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора	Жесткая заделка (защемление)

Рис. 1.5

Пример 1.1. Найти реакции опор балки (рис. 1.6).

Решение. Заменим действие равномерно распределенной нагрузки силой Q = 18·5 = 90 кН, приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной вертикально вниз. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad -6 + y_A - Q + y_B + 9 = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: \quad 6 \cdot 2 - Q \cdot 5{,}5 + y_B \cdot 8 + 9 \cdot 10 = 0,$$

откуда получим

$$y_A = 37{,}875 \text{ кН}, \quad y_B = 49{,}125 \text{ кН}.$$

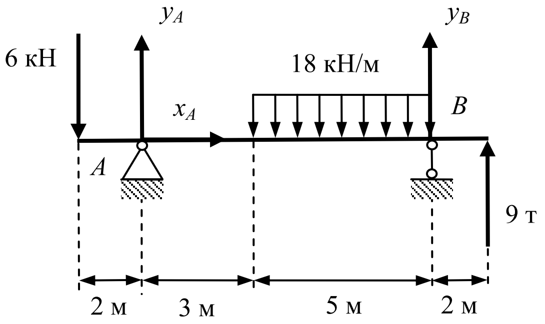


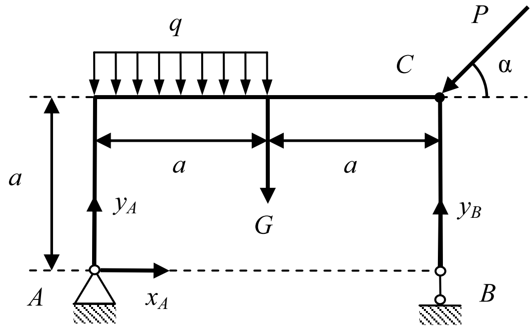
Рис. 1.6

Проверка:

$$M_{BZ} = 0: \quad 6 \cdot 10 - y_A \cdot 8 + Q \cdot 2{,}5 + 9 \cdot 2 = 60 - 37{,}875 \cdot 8 + 90 \cdot 2{,}5 + 18 = 0 .$$

Ответ: $x_A = 0$, $y_A = 37{,}875$ кН, $y_B = 49{,}125$ кН.

Пример 1.2. *Дано*: G = 20 кН, P = 10 кН, q = 2 кН/м, a = 2 м, $\alpha = 45°$. Найти реакции опор рамы (рис. 1.7).



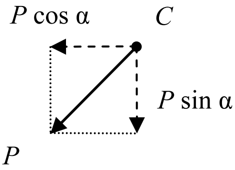


Рис. 1.7

Решение. Заменим действие равномерно распределенной нагрузки q силой $Q = q \cdot a = 4$ кН, приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной вертикально вниз. Разложим силу P на две составляющие, направленные по вертикали и горизонтали. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A - P\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad y_A - Q - G - P\sin\alpha + y_B = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: \quad -Q\cdot\frac{a}{2} - G\cdot a + P\cos\alpha\cdot a - P\sin\alpha\cdot 2a + y_B\cdot 2a = 0.$$

Откуда получаем

$$x_A = 7{,}071\,\text{кН}, \quad y_A = 16{,}536\,\text{кН},$$

$$y_B = 14{,}536\,\text{кН}, \quad R_A = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2} = 17{,}984\,\text{кН}.$$

Проверка:

$$M_{BZ} = 0: \quad -y_A\cdot 2a + Q\cdot\frac{3a}{2} + G\cdot a + P\cos\alpha\cdot a =$$
$$= -16{,}536\cdot 4 + 4\cdot 3 + 20\cdot 2 + 10\cdot 0{,}707\cdot 2 = -\,0{,}004 \approx 0.$$

Ответ: $x_A = 7{,}071\,\text{кН}$, $y_A = 16{,}536\,\text{кН}$, $y_B = 14{,}536\,\text{кН}$, $R_A = 17{,}984\,\text{кН}$.

Пример 1.3. *Дано*: G = 5 кН, P = 4 кН, q = 2,5 кН/м, M = 8 кН·м, α = 45°. Найти реакции опор (рис. 1.8).

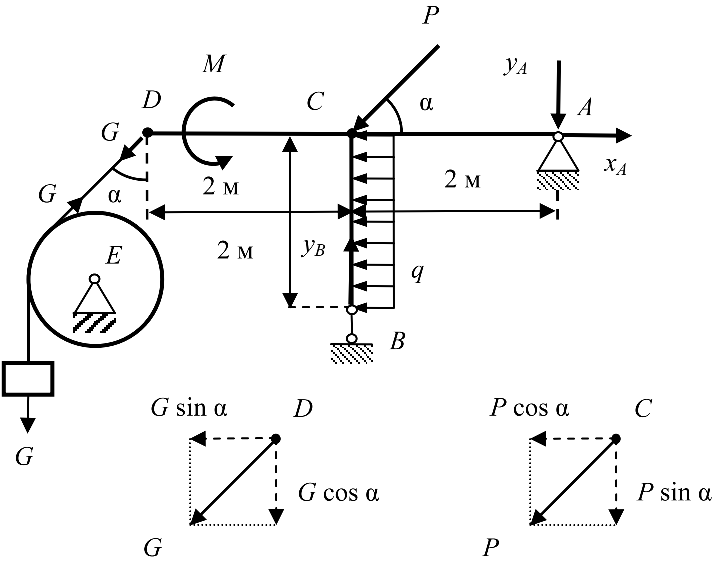


Рис. 1.8

Решение. Заменим действие равномерно распределенной нагрузки q силой $Q = q \cdot 2 = 5$ кН, приложенной в середине интервала действия этой нагрузки и направленной горизонтально справа налево. Так как блок E не вращается, то натяжение веревок сверху и снизу блока одинаковы (в противном случае суммарный момент от натяжения веревок относительно центра блока E был бы отличен от нулю и блок начал бы вращаться). Разложим силы G и P на две составляющие, направленные по вертикали и горизонтали. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил, действующие на твердое тело $DCAB$, равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A - P\cos\alpha - Q - G\sin\alpha = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad -y_A - P\sin\alpha + y_B - G\cos\alpha = 0,$$

$$M_{AZ} = 0: \quad P\sin\alpha \cdot 2 - Q \cdot 1 - y_B \cdot 2 + M + G\cos\alpha \cdot 4 = 0,$$

откуда получим

$$x_A = 11{,}364 \text{ кН}, \quad y_A = 5{,}035 \text{ кН},$$

$$y_B = 11{,}399 \text{ кН}, \quad R_A = \sqrt{x_A^{\,2} + y_A^{\,2}} = 12{,}429 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$M_{BZ} = 0: \quad -x_A \cdot 2 - y_A \cdot 2 + P\cos\alpha \cdot 2 + Q \cdot 1 + M + G\cos\alpha \cdot 2 + G\sin\alpha \cdot 2 =$$
$$= -11{,}364 \cdot 2 - 5{,}035 \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 1 + 8 + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 0{,}001 \approx 0.$$

Ответ: $x_A = 11{,}364$ кН, $y_A = 5{,}035$ кН, $y_B = 11{,}399$ кН, $R_A = 12{,}429$ кН.

Пример 1.4. *Дано*: $a = 0{,}6$ м; $b = 0{,}4$ м; $c = 0{,}3$ м; $G = 2$ кН; $\alpha = 45°$. Найти реакции опор рамки (рис. 1.9).

Решение. Из уравнений статики следует, что главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\sum_i F_i(x) = 0: \quad x_A + x_B + S_{CD}\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_i F_i(y) = 0: \quad y_A + y_B = 0,$$

$$\sum_i F_i(z) = 0: \quad z_A + z_B - G + S_{CD}\sin\alpha = 0,$$

$$M_{AX}=0:\quad -G\cdot\left(\frac{c-b}{2}\right)+S_{CD}\sin\alpha\cdot c+z_B\cdot c=0,$$

$$M_{AY}=0:\quad G\cdot\left(\frac{a}{2}\right)-S_{CD}\sin\alpha\cdot a=0,$$

$$M_{AZ}=0:\quad -x_B\cdot c-S_{CD}\cos\alpha\cdot c=0.$$

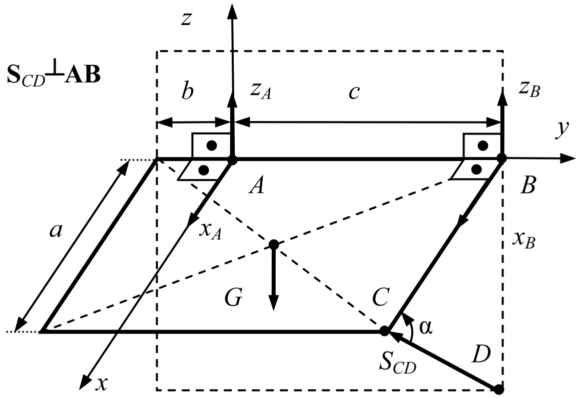


Рис. 1.9

Так как опоры в точках A и B – петли, то

$$y_A=y_B=0\ .$$

Из полученной системы линейных уравнений получаем

$$x_A=0,\ y_A=0,\ z_A=2{,}333\ \text{кН},$$

$$x_B=-1,\ y_B=0,\ z_B=-1{,}333,\ S_{CD}=1{,}414\ \text{кН},$$

$$R_A=\sqrt{x_A{}^2+y_A{}^2+z_A{}^2}=2{,}333\ \text{кН},\ \ R_B=\sqrt{x_B{}^2+y_B{}^2+z_B{}^2}=1{,}666\ \text{кН}.$$

Проверка:

$$M_{BX}=0:\quad -z_A\cdot c+G\cdot\left(\frac{c+b}{2}\right)=-2{,}333\cdot0{,}3+2\cdot\frac{0{,}7}{2}=0{,}001\approx0,$$

$$M_{BZ}=0:\quad x_A\cdot c=0;\quad 0\cdot0{,}3=0.$$

Ответ: $S_{CD}=1{,}414$ кН, $R_A=2{,}333$ кН, $R_B=1{,}666$ кН.

Пример 1.5. *Дано*: a = 3,5 м, b = 5 м, c = 4 м, P = 2 кН. Найти методом вырезания узлов усилия S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 в шести стержнях шарнирно-стержневой конструкции (рис. 1.10).

Решение. Не ограничивая общности, будем считать, что все стержни сжаты.

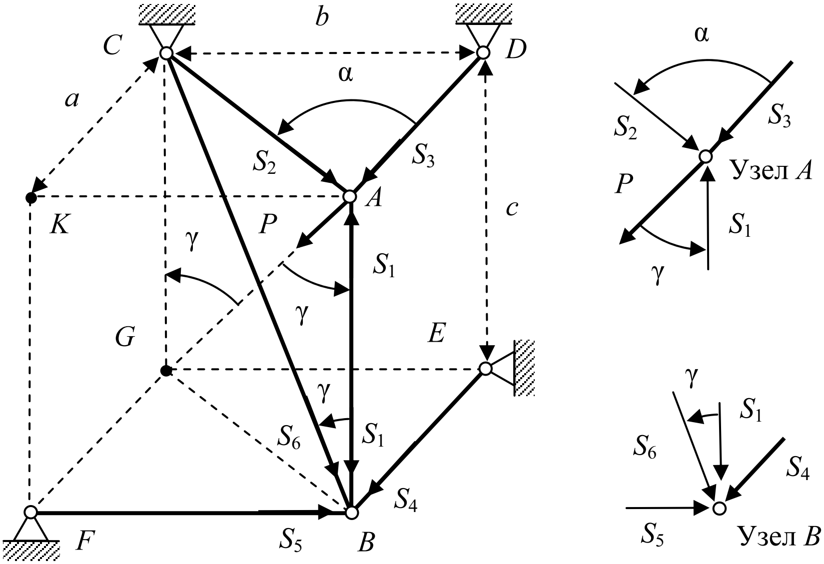


Рис. 1.10

Найдем косинусы и синусы углов α и γ :

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2} = 6{,}103\text{ м},\quad AG = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7{,}297\text{ м},$$

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{3{,}5}{6{,}103} = 0{,}573,\quad \sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{6{,}103} = 0{,}819,$$

$$\cos\gamma = \frac{CG}{AG} = \frac{4}{7{,}297} = 0{,}548,\quad \sin\gamma = \frac{AC}{AG} = \frac{6{,}103}{7{,}297} = 0{,}836.$$

Узел A. Спроектируем все силы в узле A на три взаимно перпендикулярных направления – **AB**, **AK** и **AD**:

$$S_1 - P\cos\gamma = 0,\quad S_2\sin\alpha - P\sin\gamma\sin\alpha = 0,$$

$$S_3 + S_2 \cos\alpha - P\sin\gamma\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$S_1 = P\cos\gamma = 2\cdot 0{,}548 = 1{,}096 \text{ кН}, \quad S_2 = P\sin\gamma = 2\cdot 0{,}836 = 1{,}672 \text{ кН},$$

$$S_3 = -(S_2 - P\sin\gamma)\cos\alpha = 0\cdot\cos\alpha = 0 \text{ кН}.$$

Узел B. Спроектируем все силы в узле B на три взаимно перпендикулярных направления – **BE**, **BF** и **BA**:

$$S_4 + S_6 \sin\gamma\cos\alpha = 0, \quad S_5 + S_6\sin\gamma\sin\alpha = 0, \quad S_6\cos\gamma + S_1 = 0,$$

откуда

$$S_6 = -\frac{S_1}{\cos\gamma} = -\frac{P\cos\gamma}{\cos\gamma} = -P = -2 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_6\sin\gamma\cos\alpha = 2\cdot 0{,}836\cdot 0{,}573 = 0{,}958 \text{ кН},$$

$$S_5 = -S_6\sin\gamma\sin\alpha = 2\cdot 0{,}836\cdot 0{,}819 = 1{,}369 \text{ кН}.$$

Так как $S_6 < 0$, то стержень CB растянут.

Ответ: $S_1 = 1{,}096$ кН, $S_2 = 1{,}672$ кН, $S_3 = 0$ кН, $S_4 = 0{,}958$ кН, $S_5 = 1{,}369$ кН, $S_6 = -2$ кН.

1.2. Краткий курс кинематики

Рассмотрим декартову прямолинейную систему координат. В инерциальной (неподвижной) системе координат ***абсолютной скоростью*** точки называется векторная величина, численно равная полной производной радиуса-вектора точки по времени (рис. 1.11):

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}, \quad [\mathbf{v}] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Абсолютным ускорением точки называется векторная величина, численно равная полной производной абсолютной скорости точки по времени:

$$\boxed{\mathbf{W} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \quad [\mathbf{W}] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.}$$

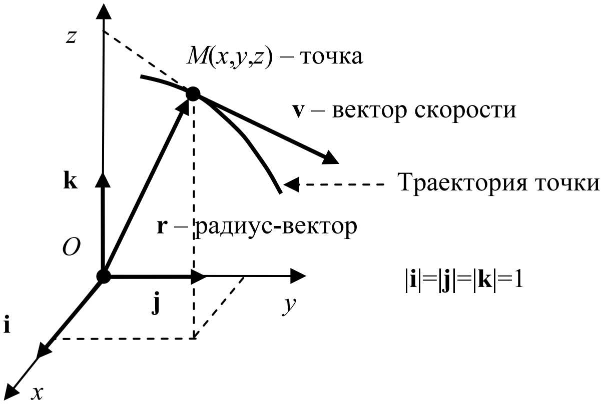


Рис. 1.11

Простейшие движения твердого тела: поступательное, плоскопараллельное, сферическое и вращательное.

Поступательным движением твердого тела называется движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе во все время движения.

Плоскопараллельным движением твердого тела называется движение, при котором любая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой фиксированной неподвижной плоскости.

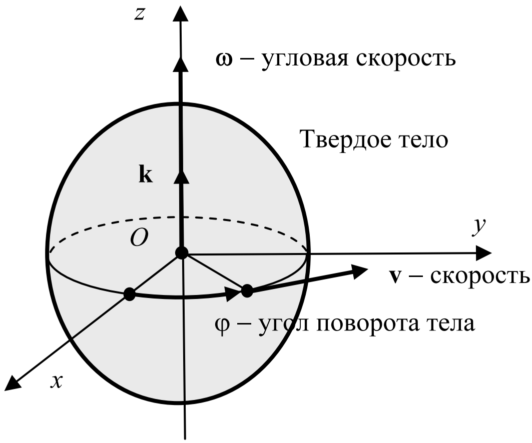


Рис. 1.12

Вращательным движением твердого тела (*движением вокруг неподвижной оси*) называется движение тела с двумя неподвижными точками (рис. 1.12). Ось, проходящая через две неподвижные точки, называется *осью вращения* тела (ось z).

Вектором угловой скорости при вращательном движении твердого тела называется векторная величина, численно равная полной производной угла поворота тела по времени и направленная в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}\,.}$$

Вектором углового ускорения при вращательном движении твердого тела называется векторная величина, численно равная полной производной вектора угловой скорости по времени:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{k}\,.}$$

Сферическим движением твердого тела называется движение тела с одной неподвижной точкой. При сферическом движении тело в каждый фиксированный момент времени совершает вращательное движение с ***мгновенной угловой скоростью*** $\boldsymbol{\omega}$ вокруг некоторой оси.

Сложным движением точки M называется движение точки относительно подвижной системы координат. Рассмотрим инерциальную (неподвижную) систему координат $Ox_1y_1z_1$. Пусть подвижная система координат $Ax_2y_2z_2$ движется поступательно относительно неподвижной системы координат. Пусть система координат $Axyz$ совершает сферическое движение относительно подвижной системы координат $Ax_2y_2z_2$ с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Движение точки M относительно неподвижной системы координат называется ***абсолютным движением точки***, а движение точки M относительно подвижной системы координат $Axyz$ – ***относительным движением точки*** (рис. 1.13).

Пусть $\mathbf{r}_A$ и $\boldsymbol{\rho}$ – радиусы-векторы точки M относительно подвижной и неподвижной систем координат.

Абсолютная скорость точки M

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r\,,}$$