№ 1870

А.Н. Шелаев

Нестандартные и олимпиадные задачи по неэлементарной и высшей математике

Учебное пособие

УДК 517
Ш42

Р е ц е н з е н т
канд. физ.-мат. наук, доц. *П.А. Фролов*

Шелаев А.Н.

Ш42 Нестандартные и олимпиадные задачи по неэлементарной и высшей математике: Учеб. пособие. – М.: МИСиС, 2004. – 159 с.

В пособии рассматриваются методы решения различных типов нестандартных и олимпиадных задач повышенной трудности по высшей и неэлементарной математике, редко анализируемых в учебной литературе, но, в то же время, необходимых как для глубокого усвоения математических знаний, так и для формирования творческих способностей. Введенный термин «неэлементарная математика» относится к интенсивно развивающейся «промежуточной» области математики (обычно не рассматриваемой ни в школе, ни в вузе), прежде всего, к нестандартным нелинейным алгебраическим и тригонометрическим задачам с параметрами, ряду задач функционального анализа, задачам, решаемым с помощью графического анализа, с помощью геометрических образов, физических соображений и аналогий.

Содержание и структура пособия соответствуют государственному образовательному стандарту.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей. Может быть использовано преподавателями при подготовке к прроведению экзаменов и студенческих олимпиад.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Определение нестандартных математических задач, естественно, вытекает из их сравнения со стандартными задачами, для которых существуют известные общие правила решения, обычно сразу вытекающие из определений, теорем и соответствующих им формул. В то же время нестандартные задачи не имеют общих правил и положений, определяющих точные программы их решения. Очевидно также, что восприятие задачи как нестандартной отчасти условно, поскольку это восприятие зависит, в частности, от уровня математической подготовки решающего задачу.

Важной особенностью решения олимпиадных задач (как, впрочем, и экзаменационных задач) является ограниченное время на их выполнение, например, в последние годы на 3-м туре всероссийских олимпиад по математике предлагалось выполнить 10 заданий за 3 часа. В этой связи отметим, что быстрота мышления, конечно, хорошее, но не обязательное качество для успешной работы в науке. Так, крупный математик акад. П.С. Александров, вспоминая о своей молодости, отметил, что он никогда не занимал призовых мест на олимпиадах. Другой выдающийся ученый – акад. Д.А. Сахаров даже выступил со специальным заявлением «По поводу вступительных экзаменов на мехмат МГУ», в котором заявил, что он не может решить некоторые задачи устного экзамена за короткое время. В качестве примера им был приведен следующий вопрос: что больше e^{π} или π^{e}? (3 варианта решения данной задачи приведены в задании № 5.11.)

Эти высказывания отражают следующий факт: хотя в большинстве случаев успешное решение олимпиадных задач коррелирует с успешной научной работой, существуют очень талантливые «решатели» уже сформулированных, поставленных задач, которые, однако, сами не могут ставить новые задачи и развивать новые идеи. В то же время они могут быть блестящими критиками чужих «безумных» идей. Классический пример такого критика – известный физик П. Эренфест, современник А. Эйнштейна, весьма скептически относившегося к математике, о чем говорят следующие высказывания А. Эйнштейна: «Главное – это содержание, а не математика. С помощью математики можно доказать все, что угодно». И еще: «С тех пор как математики навалились на теорию относительности, я сам перестал ее понимать». Однако именно учитель Эйнштейна по математике Г. Минковский сделал математическое завершение специальной теории относительности, введя четырехмерный континуум пространства–времени. О своем ученике, разработавшем принципы теории относительности, Г. Минковский сказал так: «Это было огромной неожиданностью. Ведь раньше Эйнштейн был настоящим лентяем. Математикой он не занимался вовсе».

Говоря о нестандартных и олимпиадных задачах, следует также подчеркнуть, что при их решении большую роль играет психологический фактор. Эти задачи уже были решены их авторами, и поэтому можно быть уверенным в том, что какое-то решение существует (хотя авторское решение не всегда бывает лучшим).

В то же время в реальной практике решаемая задача совсем не обязательно имеет решение. Особенно часто такая ситуация бывает в задачах с физическим содержанием, когда трудно выделить определяющее явление или эффект [см., например, весьма поучительную книгу Дж. Уокера «Физический фейерверк» (М.: Мир, 1989)].

Подчеркнем, что решение нестандартных, «абстрактных» задач не только делает методы их решения стандартными, но и позволяет развивать новые плодотворные научные направления. Так, попытки решить «бесполезную» теорему Ферма породили целые разделы современной теории чисел, алгебры и алгебраической геометрии, практическая польза от которых уже не подлежит никакому сомнению.

Из небольшого количества учебной литературы по нестандартным математическим задачам следует указать прежде всего две книги, уже достаточно давно написанные нынешним ректором МГУ акад. В.А. Садовничим с соавторами: 1) В.А. Садовничий, А.С. Подколзин «Задачи студенческих олимпиад по математике» (М.: Наука, 1978); 2) В.А. Садовничий, А.А. Григорян, С.В. Конягин «Задачи студенческих математических олимпиад» (М.: Изд-во МГУ, 1987).

Интересные идеи можно найти также в других книгах, указанных в библиографическом списке, в том числе в книге Е.А. Морозовой, И.С. Петракова «Международные математические олимпиады», М.: Просвещение, 1971) и книге под ред. И.Н. Сергеева «Зарубежные математические олимпиады» (М.: Наука, 1987).

Данное пособие ориентировано на студентов физико-технических вузов, поэтому принцип подбора задач состоял, во-первых, в выделении ключевых идей и методов решения, позволяющих решать максимально широкий круг задач с акцентом на прикладную математику. Во-вторых, автор пособия учитывал то, что некоторые задачи, известные для студентов математических факультетов университетов, не известны студентам, изучающим математику в гораздо меньшем объеме.

Следует также отметить, что математики, ограниченные жесткими рамками строгих аксиоматических построений, испытывают значительные трудности не только в постановке прикладных задач, но и в анализе физических, химических, биологических и т. д. следствий из полученных решений. И там, где математик заканчивает решение (обычно в безразмерных единицах), инженер должен проанализировать полученный результат, рассмотрев, в частности, предельные случаи.

В качестве простого и короткого примера, уместного для введения, можно привести задачу о нахождении центра масс сферического сектора радиусом R. Получив формулу $z_{цм} = 3R\cos^2(\alpha/2)/4$ (отсчет z ведется от вершины сектора), математик обычно не задумывается о физическом смысле результата. Между тем при уменьшении угла раствора сектора α до нуля данная формула дает значение не $R/2$, как это должно быть для стержня, а $3R/4$, что соответствует центру масс пирамиды. Существенно более сложными примерами математических задач, требующих тщательного физического анализа (в частности, принципа Ферма) могут служить задания № 11.8 и 11.9, являющиеся введением в проблему оптики сред с отрицательным коэффициентом преломления.

В пособии рассмотрено около 140 нестандартных и олимпиадных задач, собранных, предложенных и решенных автором пособия. Задачи сгруппированы по тематике в 11 параграфах. Наиболее сложные задачи, рассмотренные в пособии, предлагались на всесоюзных математических олимпиадах. Задачи всероссийских олимпиад для студентов физико-технических вузов, как показывает педагогический опыт автора пособия, вполне доступны не только членам вузовских олимпиадных команд, но и «обычным» студентам вузов, проявляющим интерес к математике. Решение таких нестандартных задач исключительно полезно, так как не только резко повышает уровень понимания математики, но и существенно развивает общие аналитические способности.

Дело, в частности, в том, что нерешенная или трудно решаемая задача, остающаяся в памяти иногда на всю жизнь, оказывается гораздо полезней быстро решенной и быстро забытой задачи на «подстановку в формулу». В этом случае срабатывает известный в психологии эффект незавершенного действия, установленный Б.В. Зейгарник. При этом существенно то, что данный эффект может служить мерой оценки уровня притязаний и самооценки личности, так как эффект срабатывает при адекватной самооценке и слабо проявляется при повышенной и пониженной самооценке.

Автор надеется, что рассмотренные задачи не только будут полезными, но и доставят истинное наслаждение теми очень красивыми идеями, которые скрываются за, на первый взгляд, скучными и абстрактными математическими формулами.

1. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

В данном параграфе основной акцент при анализе функций и графиков будет сделан на подготовку к решению нестандартных задач с параметрами и функциональных уравнений. Поскольку данная тематика мало освещена в обычной учебной литературе, вначале рассмотрим ряд несложных, но важных для дальнейшего анализа задач.

№ 1.1. *Пусть произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равно нулю при всех x из области определения функций: $f(x)g(x) \equiv 0$. Следует ли из этого тождества, что либо $f(x) \equiv 0$, либо $g(x) \equiv 0$?*

Естественно, не следует, так как можно задать большое число пар функций, обладающих следующим свойством: в тех областях x, в которых одна из функций отлична от нуля, другая функция равна нулю.

№ 1.2. *Найдите функцию, являющуюся одновременно четной и нечетной.*

Для нахождения такой функции нужно решить простую систему из двух функциональных уравнений

$$f(x) = f(-x), \qquad f(x) = -f(-x). \tag{1.1}$$

Из системы уравнений (1.1) следует, что

$$f(x) = -f(x) \tag{1.2}$$

и, в итоге, из (1.2) получаем, что единственной функцией, являющейся одновременно четной и нечетной, является функция $f(x) \equiv 0$.

№ 1.3. *Доказать, что любая функция $f(x)$, определенная на некотором отрезке $[-a,a]$, представима в виде суперпозиции четной и нечетной функций и что это представление единственно. Записать функцию a^x в виде суперпозиции таких функций.*

Пусть функция $f(x)$ представлена в виде суперпозиции четной (even) функции $e(x)$ и нечетной (odd) функции $o(x)$. Тогда

$$f(x) = e(x) + o(x); \tag{1.3}$$

$$f(-x) = e(-x) + o(-x) = e(x) - o(x). \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) следует, что функции $e(x)$, $o(x)$ единственным образом представимы через функции $f(x)$, $f(-x)$

$$e(x) = [f(x) + f(-x)]/2; \tag{1.5}$$

$$o(x) = [f(x) - f(-x)]/2. \tag{1.6}$$

Согласно (1.3), (1.5), (1.6) функцию a^x, не обладающую свойством четности, можно следующим образом представить в виде суперпозиции четной $e(x) = (a^x + a^{-x})/2$ и нечетной $o(x) = (a^x - a^{-x})/2$ функций:

$$f(x) = e(x) + o(x) = (a^x + a^{-x})/2 + (a^x - a^{-x})/2. \qquad (1.7)$$

№ 1.4. *Функции f(x), g(x) определены на всей числовой оси и не являются периодическими. Может ли функция P(x) = f(x)g(x) быть периодической?*

Как известно, условие того, что $f(x)$ – периодическая функция с данным периодом T, есть $f(x) = f(x + T)$. В то же время можно привести несколько необычный пример, когда произведение двух непериодических функций удовлетворяет условию периодичности с любым периодом T.

Выберем, в частности, следующие две непериодические функции:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + a}\,,\ g(x) = x - \sqrt{x^2 + a}\,, \qquad (1.8),$$

где a – некоторая константа. Тогда функция $P(x)$, являющаяся их произведением, равна

$$P(x) = f(x)\cdot g(x) = -a = \text{const}. \qquad (1.9)$$

Так как константа – периодическая функция с любым периодом, то произведение непериодических функций может быть периодической функцией с любым периодом.

№ 1.5. *Может ли сумма двух периодических функций не иметь периода?*

Да. Примеры таких функций проще всего подбирать из комбинаций тригонометрических функций типа $\cos x$ и $\cos(\theta x)$, $\sin x$ и $\sin(\theta x)$, где θ – иррациональное число. Пусть, например,

$$f(x) = \cos x,\ g(x) = \cos(\theta x). \qquad (1.10),$$

Если бы сумма этих функций имела период T, то выполнялись бы следующие тождества:

$$\cos(x + T) + \cos(\theta x + \theta T) \equiv \cos x + \cos(\theta x); \qquad (1.11)$$

$$\cos(x + T) - \cos x \equiv -[\cos(\theta x + \theta T) - \cos(\theta x)]; \qquad (1.12)$$

$$2\sin(x + T/2)\sin(-T/2) \equiv -2\sin(\theta x + \theta T/2)\sin(-\theta T/2); \qquad (1.13)$$

Так как (1.13) справедливо при любых x, то (1.13) не изменится при сдвиге x на $-T/2$:

$$\sin(x + T/2) \Rightarrow \sin x,\ \sin(\theta x + \theta T/2) \Rightarrow \sin(\theta x). \qquad (1.14)$$

С учетом (1.14) тождество (1.13) запишется в виде

$$\sin x \sin(T/2) \equiv \sin(\theta x)\sin(\theta\, T/2). \qquad (1.15)$$

Полагая в (1.15) $x = \pi$ получим, что левая часть (1.15) равна нулю и, следовательно, равна нулю и правая часть: $\sin(\theta T/2) = 0$ ($\sin(\theta\pi) \neq 0$, так как θ – иррационально). Отсюда следует, что $\theta T/2 = k\pi$, т. е. θT пропорционально 2π.

Полагая в (1.15) $\theta x = \pi$, обратим в нуль правую часть, при этом в нуль должна обратиться и левая часть: $\sin(T/2) = 0$ ($\sin x \neq 0$). Отсюда получаем, что $T/2 = m\pi$, т.е. теперь T пропорционально 2π, но это противоречит полученному ранее соотношению – θT пропорционально 2π, так как θ – иррационально.

№ 1.6. *Привести пример функции, непрерывной лишь в одной точке.*

Такой функцией является, например, следующая разрывная при $x \neq 0$ функция $f(x) = x$, если x – рациональное число, и $f(x) = -x$, если x – иррациональное число.

Непрерывность $f(x)$ в точке $x = 0$ следует из того, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

№ 1.7. *Привести пример всюду разрывной функции, абсолютное значение которой всюду непрерывная функция.*

Такой функцией является, в частности, разрывная функция $f(x)$:

$f(x) = 1$, если x – рациональное число, и $f(x) = -1$, если x – иррациональное число.

При этом абсолютное значение этой функции – непрерывная функция $|f(x)| \equiv 1$.

№ 1.8. *Привести пример функции, определенной на всей числовой оси и разрывной всюду, кроме точек $x = \pm a$.*

Такой функцией является, в частности, разрывная функция $f(x)$: $f(x) = 0$, если x – рациональное число, и $f(x) = x^2 - a^2$, если x – иррациональное число.

№ 1.9. *Может ли сумма двух монотонных функций быть немонотонной?*

Да. Например, сумма $f(x) + g(x) = 2\cos x$ (кривая *1*) монотонно возрастающей функции $f(x) = 2x + \cos x$ (кривая *2*) и монотонно убывающей функции $g(x) = -2x + \cos x$ (кривая *3*) немонотонна на $[-\pi, \pi]$ (рис. 1.1).

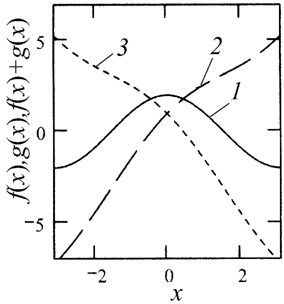

Рис. 1.1

№ 1.10. *Функция f(x) возрастает на интервале (a, b). Можно ли утверждать, что функция g(x) =* $f^2(x)$ *возрастает на (a, b)?*

Нет. Простейший пример: функция $f(x) = x$ возрастает на $(-\infty, \infty)$. В то же время функция $g(x) = x^2$ убывает на $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, \infty)$.

№ 1.11. *Построить график функции* $f(x) = \int_1^x e^t / t \; dt$.

Попытка взять данный интеграл с переменным верхним пределом (напрашивающимся способом – интегрированием по частям) приводит к появлению не менее сложного интеграла $\int e^t \ln t \, dt$:

$$f(x) = \int_1^x e^t \; d(\ln t) = e^t \ln t \,|_1^x - \int_1^x \ln t \, de^t = e^x \; \ln x - \int_1^x e^t \ln t \, dt. \quad (1.16)$$

Другой остающейся возможностью проинтегрировать данный интеграл является предварительное разложение в ряд Тейлора функции e^t:

$$e^t = 1 + t/1! + t^2/2! + t^3/3! + \cdots + t^n/n! + \cdots \quad (1.17)$$

С учетом (1.17) исходный интеграл запишется в виде

$$f(x) = \int_1^x e^t / t \; dt = [\ln|t| + t/1! + t^2/2{\cdot}2! + \cdots + t^n/n{\cdot}n! + \cdots] \,|\, _1^x . (1.18)$$

Из (1.18) следует, что с ростом x функция $f(x)$ будет все более резко возрастать. Это же утверждение можно получить, взяв производную от функции $f(x)$, учтя то, что согласно основной теореме дифференциального и интегрального исчисления производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции с аргументом, равным значению переменного верхнего предела:

$$f'(x) = e^x / x\,. \qquad (1.19)$$

При этом, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, функция $f(x)$, действительно, будет все более резко возрастать с ростом x. Соответствующий график $f(x) = \int_1^x e^t\,dt/t$, рассчитанный на компьютере в программе MathCad, приведен на рис. 1.2.

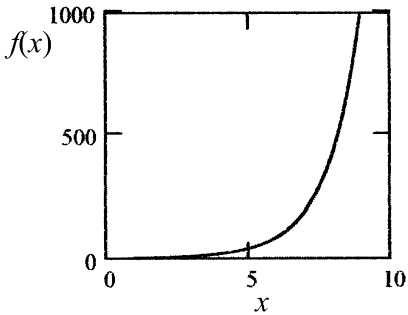

Рис. 1.2

№ 1.12. *Построить график функции* $f(x) = \int_0^x \cos t^2\,dt$.

Данный интеграл также относится к числу не интегрируемых аналитически. Его можно привести к специальному интегралу Fresnel $C(x)$:

$$f(x) = \sqrt{\pi/2}\ \text{Fresnel}\, C(x\sqrt{2/\pi})\,, \qquad (1.20),$$

где $\text{Fresnel}\,C(x) = \int_0^x \cos(z^2\pi/2)\ dz$.

Аналитическую оценку данного интеграла можно получить, воспользовавшись разложением косинуса в ряд Тейлора, справедливым при $t^2 < \infty$.

$$\cos t^2 = 1 - (t^2)^2/2! + (t^2)^4/4! - (t^2)^6/6! + \cdots \qquad (1.21)$$

В то же время общие закономерности поведения функции $f(x)$ можно установить, пользуясь основными свойствами функции косинус.

Функция $\cos t^2 \ge 0$ при $0 \le t^2 \le \pi/2$, $3\pi/2 \le t^2 \le 5\pi/2$ и т.д. Аналогично функция $\cos t^2 \le 0$ при $\pi/2 \le t^2 \le 3\pi/2$, $5\pi/2 \le t^2 \le 7\pi/2$ и т.д.

Интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$ можно определить по знаку первой производной, равной подынтегральной функции интеграла с переменным верхним пределом, а точки перегиба $f(x)$ – из равенства нулю второй производной

$$f'(x) = \cos x^2,\ \ f''(x) = -2x\ \sin x^2 = 0\,. \qquad (1.22,\ 1.23)$$

Так как с ростом t указанные интервалы знакопостоянства $\cos t^2$ будут уменьшаться по t, последовательный вклад в данный интеграл положительных и отрицательных составляющих $\cos t^2$, будет уменьшаться и функция $f(x)$ будет в пределе при $t^2 \to \infty$ стремиться к некоторому постоянному значению, как это показано на рис. 1.3, рассчитанном на компьютере в программе MathCad.

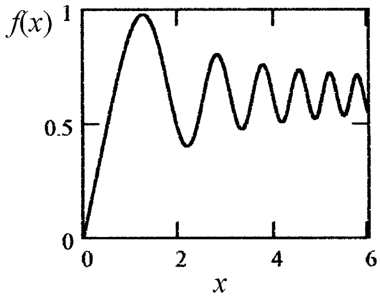

Рис. 1.3

Отметим также, что в соответствии со сделанными выше выводами из компьютерных расчетов получено, что $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos t^2\ dt \approx 0{,}997$, $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{3\pi/2}} \cos t^2\ dt \approx -0{,}575$, $\int_{\sqrt{3\pi/2}}^{\sqrt{5\pi/2}} \cos t^2\ dt \approx 0{,}400$, т. е. значения интеграла на последовательных областях положительных и отрицательных значений косинуса уменьшаются по модулю. При $x \to \infty$ интеграл стремится к постоянному значению $f(x = \infty) \approx 0{,}62$.

№ 1.13. *Доказать, что число решений уравнения* $\log_a x = a^x$ *при* $0 < a < 1$ *может быть более одного.*

Имеем одно уравнение с одним неизвестным x и одним параметром a. Областью допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения являются $0 < x < 1$, так как $a^x > 0$ при любых x, а $\log_a x \le 0$ при $x \ge 1$ и $0 < a < 1$.

На первый взгляд кажется (рис. 1.4), что графики логарифмической и показательной функций при $0 < a < 1$ могут пересекаться лишь в одной точке.

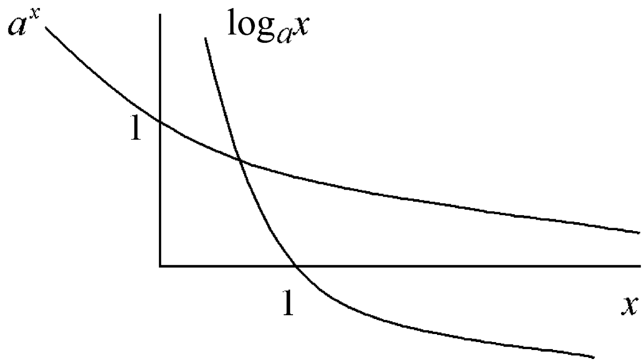

Рис. 1.4

Соответствующее решение можно найти следующим образом. Пусть $\log_a x = y$, тогда по определению логарифма $x = a^y$. С другой стороны, исходное уравнение запишется в виде $y = a^x$. Таким образом, получена симметричная по x, y система уравнений. Если эта система имеет какое-то решение x, то она имеет равное ему решение y. В итоге исходная система обязательно имеет симметричное решение, лежащее на прямой $y = x$.

Исходя из эквивалентной исходному уравнению системы уравнений

$$a^x = y,\ a^y = x \tag{1.24}$$

для некоторых частных случаев параметра a не слишком сложно подобрать еще два несимметричных решения в виде простых дробей.

Так, для $a = 1/16$ из $(1/16)^x = y$, $(1/16)^y = x$ реализуются следующие несимметричные решения ($x = 1/2$, $y = 1/4$), ($x = 1/4$, $y = 1/2$).

Компьютерные графики исследуемых функций $\log_a x$ (кривые *1*) и a^x (кривые *2*), построенные при $a = 1/4$, $a = 1/16$, $a = 1/64$, $a = 1/256$ с помощью программы MathCad показаны на рис. 1.5–1.8. Отметим, что $\log_a x$ обозначается в этой программе как $\log(x, a)$.

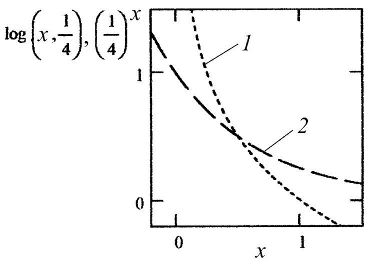

Рис. 1.5

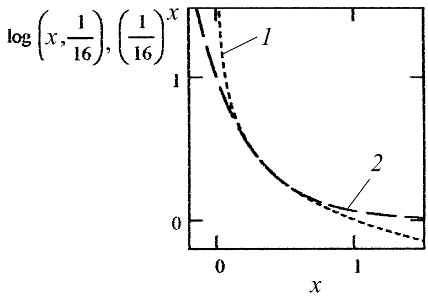

Рис. 1.6

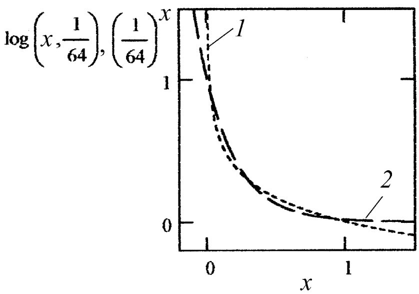

Рис. 1.7

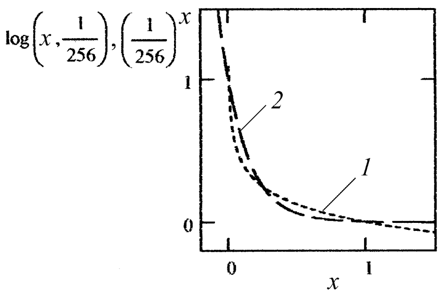

Рис. 1.8

Таким образом, получен парадоксальный результат: исходное уравнение может иметь три решения, что никак не следует из общего вида графиков логарифмической и показательной функций.

Однако, анализируя зависимость логарифмической функции от основания a, получаем, что график логарифма уменьшается с уменьшением a при x вблизи нуля, и в то же время поднимается при бóльших x. Значения же показательной функции при уменьшении a растут при x, близких к нулю, и быстрее достигают значений, практически равных нулю, при бóльших x.

Таким образом, противоположные сдвиги графиков $\log_a x$ и a^x при уменьшении a и приводит к появлению дополнительных решений.

Из компьютерных графиков, показанных на рис. 1.5 – 1.8, следует, что 2-е и 3-е решения появляются из первого (симметричного) решения $x = y$ при $a \approx 1/15{,}15$. Однако усмотреть эти решения в этой области из графиков $\log_a x$ и a^x практически невозможно. Например, при $a = 1/16$ эти графики выглядят просто слившимися в области $0{,}2 < x < 0{,}7$. И лишь при $a \leq 1/64$ все три точки пересечения графиков хорошо видны.

2. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

№ 2.1-2.2. Найти множество пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a\cdot e^x + b = e^{ax+b}; \qquad (№\ 2.1)$$

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1. \qquad (№\ 2.2)$$

№ 2.1. На первый взгляд кажется, что задача недоопределена, так как дано лишь одно уравнение относительно трех переменных – одного неизвестного x и двух параметров a, b. Однако, поскольку в задаче говорится о том, что данное уравнение справедливо при всех x ($-\infty < x < +\infty$), из этого уравнения можно получить бесконечную систему уравнений.

В то же время, подставляя в исходное уравнение даже $x = 0, 1, -1$ и т.д., мы будем получать практически нерешаемые нелинейные уравнения, из которых трудно получить существенные ограничения на параметры a, b. Например, даже при $x = 0$ из получаемого уравнения следует, что $a = -b + e^b$, что может выполняться при множестве значений a и b. Таким образом, аналитическое решение данной задачи по дискретным значениям x вряд ли возможно. Поэтому используем графический (интегральный) анализ данного уравнения сразу по всем значениям x.

Пусть $y = e^x$ ($y > 0$ при всех x). Тогда исходное уравнение можно записать в виде $ay + b = y^a e^b$. График левой части этого уравнения $z = ay + b$ *всегда* прямая линия, в общем случае не проходящая через начало координат (при $b \neq 0$).

График правой части $z = y^a e^b$ в общем случае ($a \neq 1$) кривая линия, *всегда* проходящая через начало координат. Условия задачи будут выполнены, если графики левой и правой части данного уравнения совпадают при всех значениях x. Для этого необходимо, чтобы прямая линия проходила через начало координат ($b = 0$), а кривая стала прямой ($a = 1$).

Подставляя найденные таким образом значения a и b в исходное уравнение, получим тождество $e^x \equiv e^x$, справедливое при всех значениях x.

Существенной особенностью данного метода решения является необходимость проверки возможности потери тривиальных решений, соответствующих вырождению геометрических образов правой