№ 2004

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Учебное пособие

№ 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 517.1
П40

Р е ц е н з е н т
канд. техн. наук, доц. *Л.А. Шамаро*

Плужникова, Е.Л.
П40 Математический анализ : дифференциальное исчисление функций одной переменной : учеб. пособие / Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 207 с.
ISBN 978-5-87623-429-2

В пособии приведены основные формулы и понятия по темам «Предел последовательности», «Предел функции», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», приведено большое количество примеров решения задач различных уровней сложности. Представлены различные варианты домашних заданий по данному курсу. Наличие в пособии типовых вариантов контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса, позволит студенту подготовиться к экзаменационной сессии.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517.1

ISBN 978-5-87623-429-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Функции и основные понятия, связанные с ними

Пусть X – некоторое числовое множество. На множестве X определена *числовая функция* f, если каждому элементу x множества X поставлено в соответствие по некоторому правилу единственное действительное число $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения функции*. Область определения функции обозначают $D(f)$. Произвольный элемент области определения обозначается буквой x и называется *аргументом функции*. Множество всех значений функции $f(x)$, когда аргумент пробегает область определения функции, называется *множеством значений функции* f. Множество значений функции обозначают $E(f)$.

Обычно функцию задают формулой, указывающей последовательность математических операций, которые необходимо выполнить над аргументом, чтобы получить ее значение. В этом случае под областью определения функции понимают множество тех значений аргумента, для которых указанные формулой действия выполнимы. Такой способ задания функции называется *аналитическим*.

Табличный способ задания функции состоит в том, что указываются значения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. При табличном задании функции ее область определения состоит только из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перечисленных в таблице.

Функция $f(x)$ задана *графически*, если на координатной плоскости изображен ее график. *Графиком функции* $f(x)$ называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$, т.е. множество точек, абсциссы которых принадлежат множеству X, а ординаты равны соответствующим значениям функции. Заметим, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда любая прямая, параллельная оси OY, пересекает график функции не более чем в одной точке.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия

$$(-x) \in X \quad \text{и} \quad f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия

$$(-x) \in X \quad \text{и} \quad f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для любого $x \in X$ выполняются условия

$$x + T \in X;\ x - T \in X \quad \text{и} \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Число T называется *периодом функции* $f(x)$. Очевидно, если T – период функции $f(x)$, то любое число вида nT, где $n \in N$, также является периодом этой функции.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в окрестности точки x_0, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ для любого x, принадлежащего данной окрестности точки x_0.

Обратная функция

Пусть задана функция $f(x)$, $D(f) = X$ – область определения, $E(f) = Y$ – множество значений функции $f(x)$. Если для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение, то говорят, что функция обратима. Тогда, выразив x из формулы $y = f(x)$, получим $x = f^{-1}(y)$. Если у обратного отображения $x = f^{-1}(y)$ аргумент обозначить x, а зависимую переменную y, то получим обратную функцию $y = f^{-1}(x)$.

Областью определения обратной функции $f^{-1}(x)$ является множество значений функции $f(x)$, а множеством значений функции $f^{-1}(x)$ является область определения функции $f(x)$. График обратной функции симметричен графику функции $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

1.2. Графики основных элементарных функций

1. *Линейной функцией* называется функция вида

$$y = kx + b,$$

где k и b − некоторые действительные числа.

Линейная функция определена на всей числовой прямой ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Если $k \neq 0$, то ее множеством значений является вся числовая ось, если $k = 0$, то множество значений функции состоит из одного числа b.

Графиком линейной функции является прямая, проходящая через точку с координатами $(0, b)$, с угловым коэффициентом k (рис. 1.1).

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс. При $k \neq 0$ эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $(-b/k,\ 0)$. Если $k = 0$, то $y = b$, и прямая параллельна оси OX (рис. 1.2).

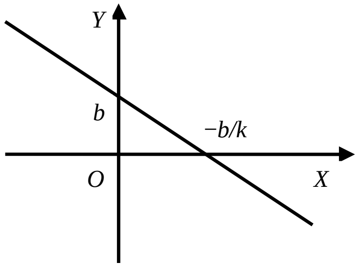


Рис. 1.1

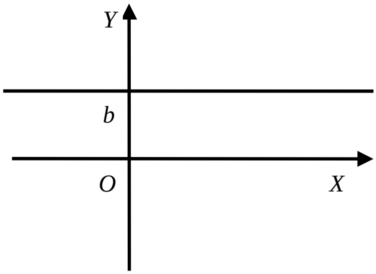


Рис. 1.2

2. *Квадратичной функцией* называется функция вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c − некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.

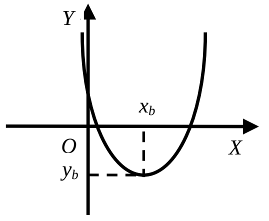
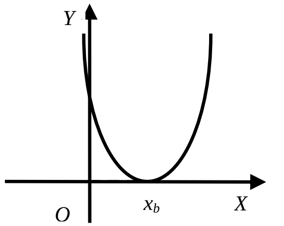
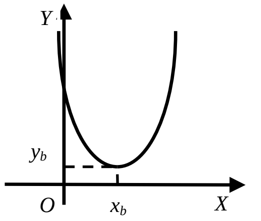
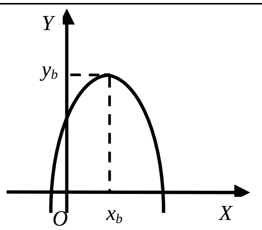
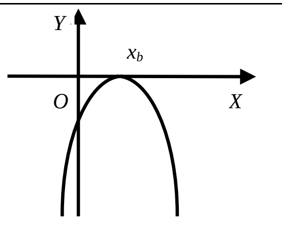
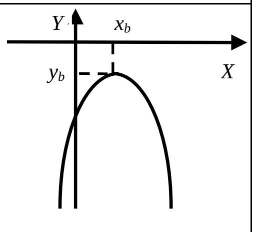
Данная функция определена на всей числовой оси ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Графиком квадратичной функции является парабола (табл. 1.1). При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз. Чем больше модуль числа a, тем уже ветви параболы. Если $D = b^2 – 4ac > 0$, то парабола пересекает ось OX в двух точках, если $D = 0$, то парабола касается оси OX, если $D < 0$, то парабола не пересекает ось OX.

Координаты вершины параболы (x_b, y_b) определяют по формулам

$$x_b = -\frac{b}{2a}; \quad y_b = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c.$$

Таблица 1.1

Графики квадратичной функции

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$		
		
$a < 0$		
		

3. Функция $y = |x|$.

Для построения графика раскрывают модуль:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Данная функция определена на всей числовой оси ($D(f)$) = $\boldsymbol{R}$). Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \ / \ y \geq 0\}$. Функция является четной, следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат (рис. 1.3).

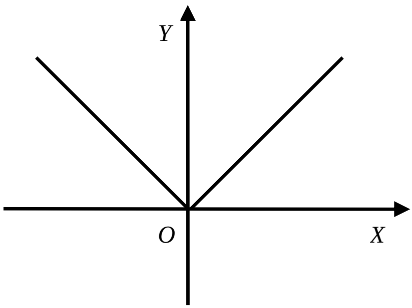


Рис. 1.3

4. *Степенной функцией* называется функция вида

$$y = x^p.$$

Область определения и график данной функции зависят от показателя p. Рассмотрим несколько случаев.

а) $y = x^{2n}$, где $n \in N$.

Данная функция определена на всей числовой оси ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \ / \ y \geq 0\}$. Функция является четной, следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат (рис. 1.4).

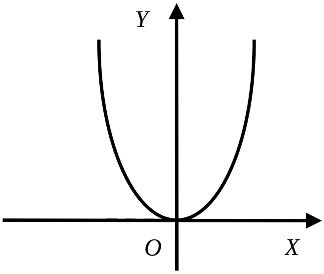


Рис. 1.4

б) $y = x^{2n+1}$, где $n \in N$.

Данная функция определена на всей числовой оси ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Множество значений – вся числовая ось. Функция является нечетной, следовательно, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.5).

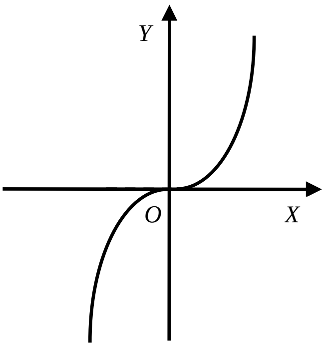


Рис. 1.5

в) $y = \sqrt[2n]{x},\ n \in N.$

Область допустимых значений $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} \ / \ x \geq 0\}$. Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \ / \ y \geq 0\}$. График функции изображен на рис. 1.6.

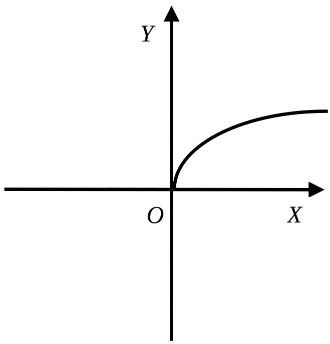


Рис. 1.6

г) $y = \sqrt[2n+1]{x},\ n \in N.$

Данная функция определена на всей числовой оси ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Множество значений – вся числовая ось. Функция является нечетной, следовательно, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.7).

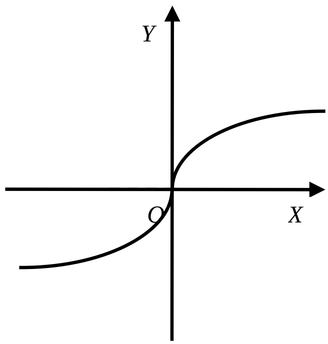


Рис. 1.7

5. $y = \dfrac{1}{x^p},\ p \in N.$

Рассмотрим два случая.

а) $y = \dfrac{1}{x^{2n}}, n \in N.$

Область определения функции $D(f)) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$. Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \mid y > 0\}$. Функция является четной, значит, график ее симметричен относительно оси ординат (рис. 1.8).

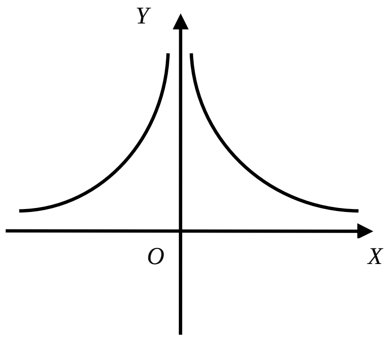


Рис. 1.8

б) $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}, n \in N.$

Область определения $D(f)) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$. Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \mid y \neq 0\}$. Функция является нечетной, значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.9).

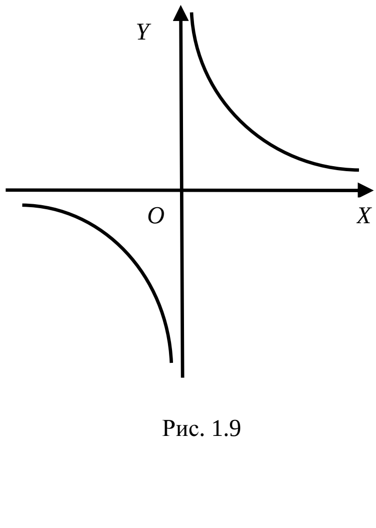


Рис. 1.9

6. *Дробно-линейная функция* задается формулой

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где *a, b, c* и *d* – некоторые действительные числа ($c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$). Область определения функции: $D(f)) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq -d/c\}$.

Преобразуем правую часть формулы:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+d/c}.$$

График дробно-линейной функции получается параллельным переносом на вектор $\vec{r} = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ из графика функции $y = \frac{k}{x}$, где $k = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Прямая $y = \frac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой графика дробно-линейной функции. Прямая $x = -\frac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

График функции $y = \frac{1}{x}$ называется гиперболой (рис. 1.10).

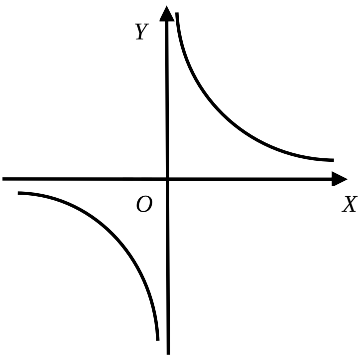


Рис. 1.10

7. *Показательной функцией* называется функция вида

$$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Область определения данной функции – вся числовая ось ($D(f)) = \boldsymbol{R}$). Множество значений $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \ / \ y > 0\}$. График показательной функции имеет вид:

а) при $a > 1$ функция возрастающая (рис. 1.11);

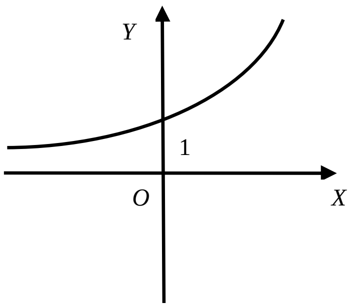


Рис. 1.11

б) при $0 < a < 1$ функция убывающая (рис. 1.12).

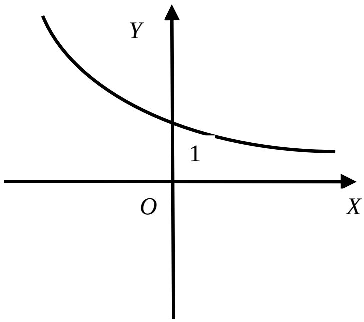


Рис. 1.12

8. *Логарифмической функцией* называется функция вида

$$y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Логарифмическая функция определена только для положительных значений x и является обратной к показательной функции. Множество значений данной функции − вся числовая ось. График логарифмической функции имеет вид:

а) при $a > 1$ функция возрастающая (рис. 1.13);

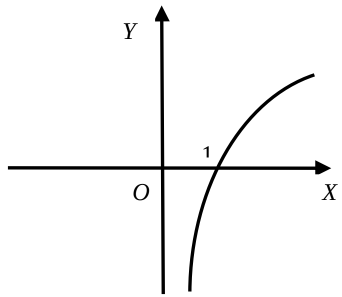


Рис. 1.13

б) при $0 < a < 1$ функция убывающая (рис. 1.14).

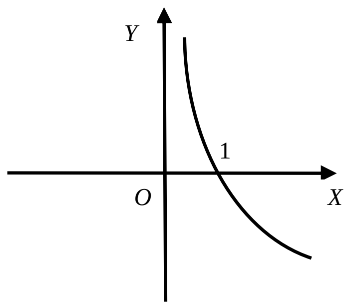


Рис. 1.14

9. *Тригонометрические функции.*

а) $y = \sin x$.

Область определения данной функции – вся числовая ось, множество значений: $y \in [-1, 1]$. Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$, так как

$$\sin (x + 2\pi) = \sin x.$$

Функция нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$. Значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.15).

Некоторые значения функции $y = \sin x$:

x, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0

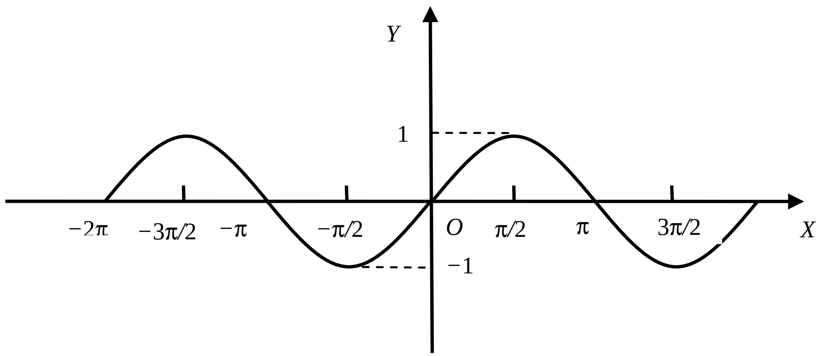


Рис. 1.15

б) $y = \cos x$.

Область определения данной функции – вся числовая ось, множество значений функции: $y \in [-1, 1]$.

Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$, так как

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Функция четная, так как $\cos(-x) = \cos x$. Значит, график ее симметричен относительно оси OY (рис. 1.16).

Некоторые значения функции $y = \cos x$:

x, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1

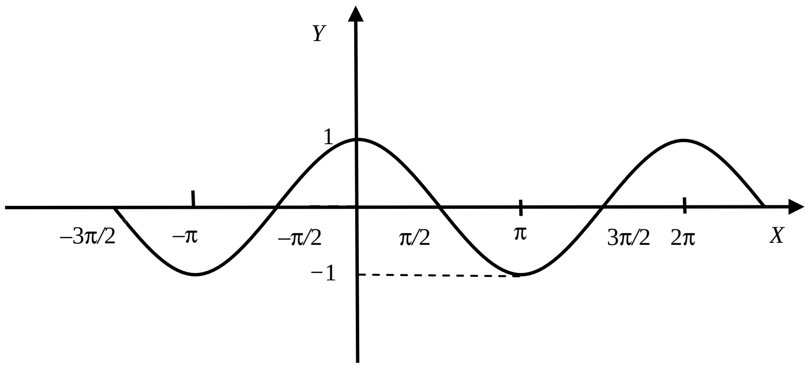


Рис. 1.16

в) $y = \text{tg}\, x$.

Область определения данной функции: $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, x \neq \pi/2 + \pi k,$ $k \in Z\}$; множество значений − вся числовая ось.

Функция является периодической с периодом $T = \pi$, так как

$$\text{tg}\,(x + \pi) = \text{tg}\, x.$$

Функция нечетная, так как $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\, x$. Значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.17).

Некоторые значения функции $y = \text{tg}\, x$:

x, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	π
$\text{tg}\, x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	0

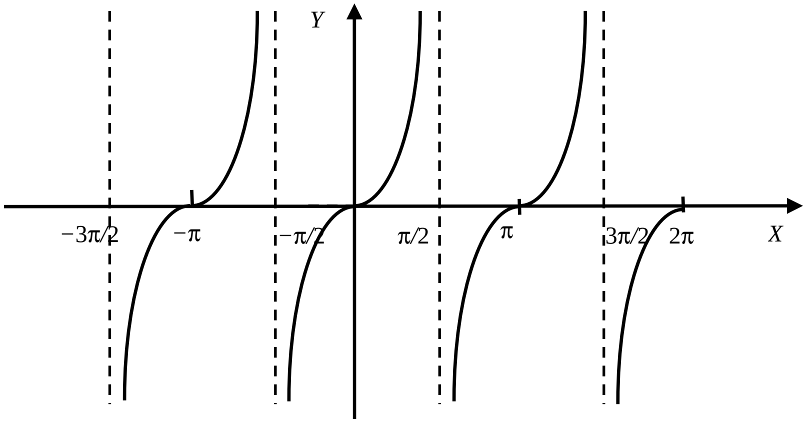


Рис. 1.17

г) $y = \text{ctg}\, x$.

Область определения данной функции: $D(f) = \{ x \in \boldsymbol{R} \,/\, x \neq \pi k,$ $k \in Z\}$; множество значений − вся числовая ось.

Функция является периодической с периодом $T = \pi$, так как

$$\text{ctg}\,(x + \pi) = \text{ctg}\, x.$$

Функция нечетная, так как $\text{ctg}\,(-x) = -\text{ctg}\, x$. Значит, график ее симметричен относительно начала координат (1.18).

Некоторые значения функции $y = \text{ctg}\, x$:

x, рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/2$
$\text{ctg}\, x$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	0

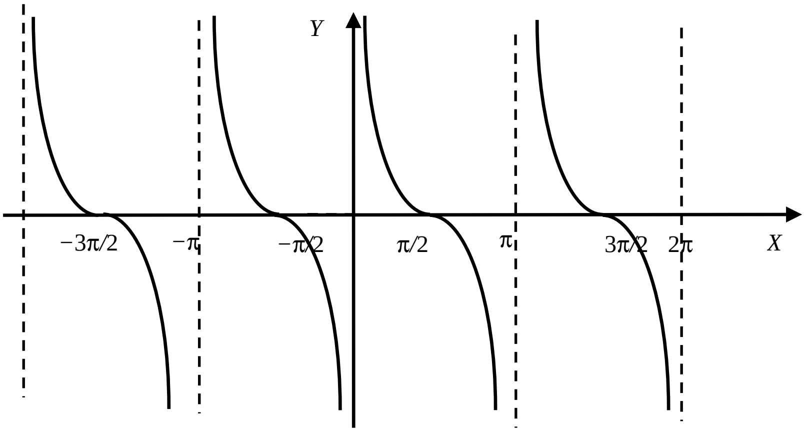


Рис. 1.18

10. *Обратные тригонометрические функции*.

а) $y = \arcsin x$ – функция, обратная к функции $x = \sin y$.

Область определения данной функции: $x \in [-1,\ 1]$; множество значений функции: $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Функция нечетная, так как

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Значит, график симметричен относительно начала координат (рис. 1.19).

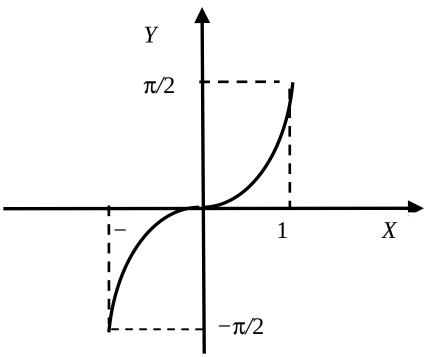


Рис. 1.19

б) $y = \arccos x$ – функция, обратная к функции $x = \cos y$.

Область определения данной функции: $x \in [-1,\ 1]$; множество значений функции: $y \in [0, \pi]$.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 1.20.

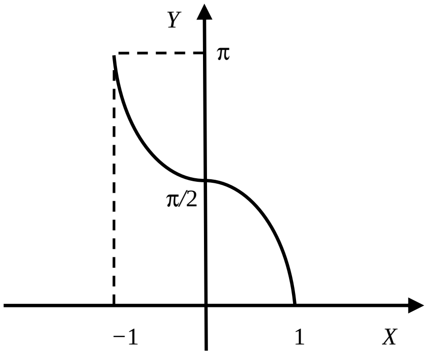


Рис. 1.20

в) $y = \operatorname{arctg} x$ – функция, обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$.

Область определения – вся числовая ось; множество значений функции: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Функция нечетная, так как

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.21).

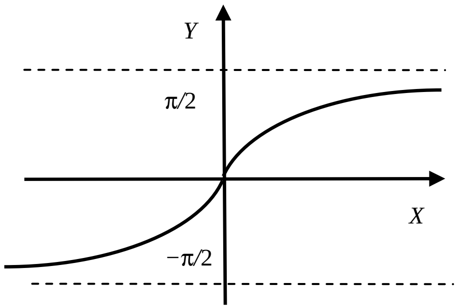


Рис. 1.21

г) $y = \operatorname{arcctg} x$ – функция, обратная к функции $x = \operatorname{ctg} y$.

Область определения – вся числовая ось, множество значений функции: $y \in (0, \pi)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

График функции изображен на рис. 1.22.

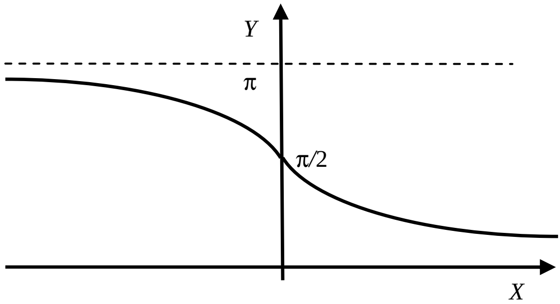


Рис. 1.22

11. *Гиперболические функции*.

а) $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус.

Область определения − вся числовая ось ($D(f) = \boldsymbol{R}$). Множество значений – вся числовая ось. Функция является нечетной, значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.23).

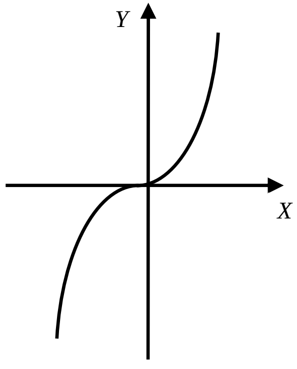


Рис. 1.23

б) $y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус.

Область определения − вся числовая ось ($D(f)$ = $\boldsymbol{R}$). Множество значений: $E(f) = \{y \in \boldsymbol{R} \ / \ y \geq 1\}$. Функция является четной, значит, график ее симметричен относительно оси OY (рис. 1.24).

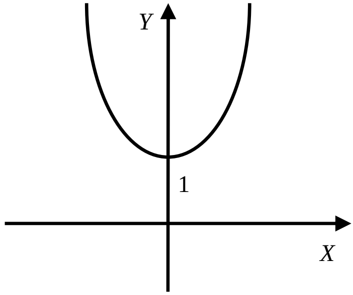


Рис. 1.24

в) $y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболический тангенс.

Область определения − вся числовая ось ($D(f)$ = $\boldsymbol{R}$). Множество значений: $x \in (-1, 1)$. Функция является нечетной, значит, график ее симметричен относительно начала координат (рис. 1.25).

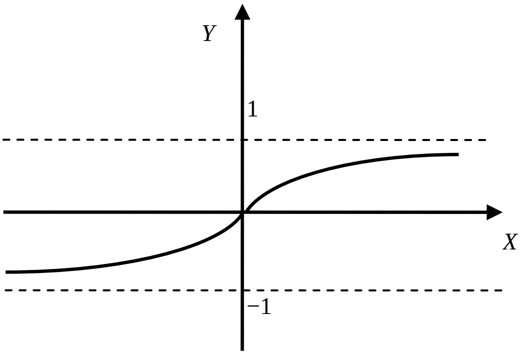


Рис. 1.25

г) $y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ – гиперболический котангенс.