№ 190

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие

№ 190

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 517
П40

Р е ц е н з е н т
канд. техн. наук, доц. *Л.А. Шамаро*

Плужникова, Е.Л.
П40 Математический анализ : дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : учеб. пособие / Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 110 с.
ISBN 978-5-87623-424-7

В пособии приведены основные формулы и понятия по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», разобраны типовые задачи различных уровней сложности, а также даны условия домашнего задания. Количество вариантов обеспечивает индивидуальное задание каждому студенту. Типовые варианты контрольных работ и тестов, предназначенные для проверки усвоения курса, позволят студенту подготовиться к экзаменационной сессии.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517

ISBN 978-5-87623-424-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Функции нескольких переменных

Величина u называется *функцией переменных величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащей некоторому множеству X, поставлено в соответствие одно определенное значение величины u. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *аргументами* или независимыми переменными. Множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Совокупность всех значений, которые функция принимает на множестве $D(f)$, называется *областью значений* функции и обозначается $E(f)$.

Если u функция переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В основном будут рассмотрены функции двух и трех переменных.

Рассмотрим более подробно $z = f(x, y)$– функцию двух переменных. Величина z называется функцией переменных величин x, y на множестве X, если каждой точке $M(x, y)$ этого множества соответствует одно определенное значение величины z. Как и функции одной переменной, функции двух переменных могут быть заданы таблицей своих значений, аналитически (формулой) и графически.

Табличное задание функции двух переменных состоит в том, что для каждой пары значений независимых переменных x, y указывается соответствующее им значение функции.

При аналитическом способе задания функции двух переменных задается формула, при помощи которой по заданным значениям независимых переменных x, y можно найти значение функции.

Если функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области X на плоскости XOY, тогда каждой точке (x, y), принадлежащей области X, будет отвечать точка $(x, y, f(x, y))$ трехмерного пространства $\boldsymbol{R}^3$. Множество точек $(x, y, f(x, y))$ называется *графиком функции* $z = f(x, y)$. Иными словами, графиком функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y называется множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты – соответствующими значениями z. Графиком функции непрерывных аргументов обычно служит некоторая поверхность. Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является эллиптический параболоид, графиком функции $z = 4x + y$ – плоскость.

В аналитической геометрии при изучении поверхностей второго порядка пользуются методом сечений, который заключается в том, что вид поверхности определяется с помощью исследования кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Этот же метод применяется и при исследовании функций двух переменных. Для изучения характера изменения функции пользуются линиями уровня. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется линия в плоскости XOY, в точках которой функция сохраняет постоянное значение. Для того чтобы получить линию уровня необходимо пересечь график функции плоскостью $z = c$, параллельной плоскости XOY, а затем спроектировать линию пересечения плоскости $z = c$ и данной поверхности на плоскость XOY. Например, линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности с центром в начале координат.

Точно так же при изучении функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ используют поверхности уровня. *Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = c$.

Пример 1.1.1

Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а также найти линии уровня данной функции.

Решение

Найдем область определения данной функции. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно,

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Таким образом, получили область определения функции – множество точек круга с центром в начале координат, радиус которого равен 1 (рис.1.1).

Найдем линии уровня функции. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ принимает постоянное значение $z = c$, если

$$c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2.$$

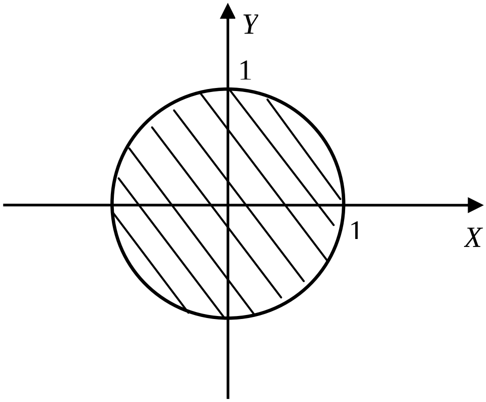

Рис. 1.1

Таким образом, при $c \in (-1, 1)$ линии уровня – концентрические окружности с центром в начале координат, а при $c = \pm 1$ линии уровня – точка с координатами (0, 0).

Пример 1.1.2

Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Решение

Функция $u = x^2 + y^2 - z^2$ принимает постоянное значение $z = c$, если

$$c = x^2 + y^2 - z^2.$$

Таким образом, при $c > 0$ поверхности уровня – однополостные гиперболоиды, при $c < 0$ – двуполостные гиперболоиды, а при $c = 0$ – конус второго порядка.

1.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Множество $U_\delta(P_0)$ точек (x, y) плоскости XOY называется δ-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$, если $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, т.е. δ-окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ − это внутренность круга с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ радиуса δ. *Проколотой* δ-*окрестностью* точки $P_0(x_0, y_0)$ называется множество

$$\overset{\circ}{U}_\delta(P_0) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\},$$

т.е. проколотая δ-окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ − это внутренность круга с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ радиусом δ с выколотым центром.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(P_0)$ точки $P_0(x_0, y_0)$. Число a называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $P(x, y) \in \mathring{U}(P_0)$ и удовлетворяющих условию $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ имеет место неравенство

$$| f(x,y)-a|<\varepsilon.$$

Предполагается, что точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(x_0, y_0)$ по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу a.

Обозначают:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a.$$

Аналогично определяется предел для функции нескольких переменных. Все основные свойства пределов функции одной переменной переносятся на случай функций нескольких переменных.

Последовательность $\{P_n(x_n, y_n)\}$ точек плоскости XOY сходится к точке $P_0(x_0, y_0)$ этой плоскости тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ координат точек P_n сходятся к соответствующим координатам x_0, y_0 точки P_0.

Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ имела предел в точке $P_0(x_0, y_0)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $\{P_n(x_n, y_n)\}$, имеющей пределом точку P_0, существовал $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ и был одинаковым для всех последовательностей $\{P_n(x_n, y_n)\}$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $P_0(x_0, y_0)$, если функция определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ и

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)= f(x_0,y_0).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в некоторой области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывные функции двух переменных обладают теми же самыми свойствами, что и непрерывные функции одного переменного.

Пример 1.2.1

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$.

Решение

После подстановки в данное выражение $x = 0$ и $y = 0$ получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, умножим на выражение, сопряженное к числителю, а затем преобразуем выражение, полученное в числителе по формуле разности квадратов $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(3-\sqrt{xy+9})(3+\sqrt{xy+9})}{xy(3+\sqrt{xy+9})} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{9-xy-9}{xy(3+\sqrt{xy+9})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{(3+\sqrt{xy+9})} = -\frac{1}{6}.$$

Пример 1.2.2

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$.

Решение

После подстановки в данное выражение $x =1$ и $y = 0$ получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln^2(1+x+y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

Так как при $x \to 1$, $y \to 0$ функция $x + y - 1 \to 0$, то можно заменить бесконечно малую функцию $\alpha(x, y) = \ln(1 + x + y - 1)$ на эквивалентную ей бесконечно малую функцию $\alpha_1(x, y) = x + y - 1$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln^2(1+x+y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = I.$$

Сделаем замену $x - 1 = z$, где $z \to 0$, а затем перейдем к полярным координатам:

$$I = \lim_{\substack{z\to 0\\ y\to 0}} \frac{(z+y)^2}{\sqrt{z^2+y^2}} = \left| \begin{array}{l} z = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ r \to 0 \end{array} \right| = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi + r\sin\varphi)^2}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi) = \lim_{r\to 0} r(1+\sin 2\varphi) = 0.$$

Пример 1.2.3

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Решение

После подстановки в данное выражение $x = 0$ и $y = 0$ получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Вычислим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{1} = 1;$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-1+y}{1} = -1.$$

Получили, что оба повторных предела существуют и конечны, но они не равны между собой. Следовательно, по теореме о единственности предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ не существует.

Также можно показать, что данный предел не существует, рассмотрев изменение x и y вдоль прямых $y = kx$. Тогда данное выражение может стремиться к различным пределам в зависимости от выбранного значения k. Действительно, при $y = kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2 - (kx)^2 + x^3 + (kx)^3}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2(1-k^2+x+k^3x)}{x^2(1+k^2)} =$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{1-k^2+x+k^3x}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Тогда при разных значениях k получаются различные предельные значения. Следовательно, данный предел не существует.

Пример 1.2.4

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Решение

После подстановки в данное выражение $x = 0$ и $y = 0$ получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Рассмотрим изменение x и y вдоль прямых $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2kx}{x^4+(kx)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx}{x^2+k^2}=0.$$

Рассмотрим изменение x и y вдоль параболы $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}.$$

Получили, что предел вдоль прямых $y = kx$ существует и равен при любом значении k нулю, а предел вдоль параболы $y = x^2$ существует и равен $\dfrac{1}{2}$. Значит, по теореме о единственности предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ не существует.

Пример 1.2.5

Исследовать функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\cos\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x\neq 0, y\neq 0;\\ 0, \quad x=0, \quad y=0\end{cases}$$

на непрерывность в точке (0, 0).