№ 605

МИСиС

Курс теоретической физики в задачах и упражнениях

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

№ 605

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра теоретической физики

Курс теоретической физики в задачах и упражнениях

Под редакцией доктора физико-математических наук,
профессора Ю.Х. Векилова

2-е издание, исправленное и дополненное

Допущено учебно-методическим объединением по образованию в области металлургии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям Физика металлов и Металловедение и термическая обработка металлов

Москва Издательство «УЧЕБА» 2007

УДК 53
К93

Р е ц е н з е н т
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е.К. Наими*

Авторы: Ю.Х. Векилов, Ю.М. Кузьмин, С.И. Мухин, Я.М. Муковский

К93 **Курс теоретической физики в задачах и упражнениях/** Ю.Х. Векилов, Ю.М. Кузьмин, С.И. Мухин, Я.М. Муковский; Под ред. Ю.Х. Векилова. – М.: МИСиС, 2007. – 341 с.

Учебное пособие содержит задачи с решениями по следующим разделам курса теоретической физики: механика, теория упругости, электродинамика, квантовая механика и статистическая физика. Задачи по каждому из разделов предваряет краткое теоретическое введение, а также приводятся примеры решения задач данного типа. В конце пособия дано краткое математическое приложение.

Содержание пособия соответствует программам данных разделов курса.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Физика металлов» и «Физика полупроводников», а также может быть использовано преподавателями при составлении домашних заданий по этим дисциплинам.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие принципы механики 6
  1.1. Уравнения движения 7
    1.1.1. Уравнение Лагранжа. Принцип относительности Галилея. Интегралы движения 7
    1.1.2. Интегрирование уравнений движения Лагранжа 11
      1.1.2.1. Движение частицы в одномерном потенциальном поле 11
      1.1.2.2. Движение частицы в центральном поле. Задача Кеплера 15
      1.1.2.3. Рассеяние частиц. Формула Резерфорда 20
  1.2. Малые колебания 23
    1.2.1. Свободные одномерные колебания. Колебания систем со многими степенями свободы. Вынужденные колебания. Резонанс 23
    1.2.2. Затухающие колебания 42
  1.3. Метод Гамильтона в классической механике 45
    1.3.1. Уравнения движения Гамильтона. Канонические преобразования. Скобки Пуассона 45
    1.3.2. Уравнение движения Гамильтона-Якоби 48
    1.3.3. Адиабатические инварианты 49
2. Теория упругости 52
  2.1. Тензоры деформации и напряжений 52
  2.2. Деформация тела. Закон Гука 55
    2.2.1. Закон Гука 55
    2.2.2. Однородные деформации 57
  2.3. Уравнения равновесия изотропных тел 60
  2.4. Слабый изгиб стержней 66
  2.5. Устойчивость упругих систем 69
  2.6. Колебания стержней и пластинок 75
3. Теория электромагнитного поля 81
  3.1. Общие сведения 81
    3.1.1. Уравнения электромагнитного поля 81
    3.1.2. Уравнения электромагнитного поля в материальных средах 83
      3.1.2.1. Основные уравнения (уравнения макроскопической электродинамики) 83
      3.1.2.2. Граничные уравнения на поверхности раздела 84
  3.2. Электростатика 85
    3.2.1. Электростатическое поле 85

3.2.1.1. Поле в вакууме ... 85
3.2.1.2. Поле в веществе ... 86
3.2.2. Электростатическая энергия зарядов ... 87
3.2.3. Электростатическое поле системы зарядов на больших расстояниях ... 95
3.2.3.1. Дипольный момент ... 95
3.2.3.2. Мультипольные моменты ... 96
3.2.4. Энергия системы зарядов во внешнем поле ... 99
3.3. Магнитостатика ... 104
3.4. Квазистационарное электромагнитное поле ... 118
3.5. Переменное электромагнитное поле ... 125
3.5.1. Потенциалы электромагнитного поля ... 125
3.5.2. Поле системы зарядов на больших расстояниях ... 126
3.5.3. Дипольное излучение ... 127
3.5.3.1. Электромагнитное поле дипольного излучателя ... 128
3.5.3.2. Магнитно-дипольное излучение ... 130
3.5.4. Плоские электромагнитные волны ... 131
3.5.5. Взаимодействие заряженных частиц с излучением ... 131
3.5.5.1. Рассеяние электромагнитных волн ... 131
3.5.5.2. Дисперсия света ... 132
3.5.5.3. Электромагнитное поле в плазме ... 132
3.6. Специальная теория относительности ... 145
3.6.1. Постулаты ... 145
3.6.2. Преобразования Лоренца ... 146
3.6.3. Инварианты теории относительности ... 147
3.6.4. Четырехмерные векторы и тензоры. Ковариантная система уравнений ... 148
3.6.5. Релятивистская механика. Энергия и импульс ... 149
3.6.6. Электродинамика теории относительности ... 149
4. Квантовая механика ... 160
4.1. Волны де Бройля. Волновые пакеты ... 160
4.2. Волновое уравнение. Стационарные состояния. Одномерное движение. Спектр энергии и волновые функции ... 166
4.3. Операторы. Теория представлений. Матрицы ... 196
4.3.1. Операторы ... 196
4.3.2. Вычисление вероятностей и средних, переход к другим представлениям ... 201
4.3.3. Теория представлений, матрицы ... 206
4.4. Движение в центральном поле с аксиальной симметрией ... 220
4.4.1. Разделение переменных ... 220
4.4.2. Движение в магнитном поле ... 222

4.5. Теория возмущений 226
4.5.1. Стационарные возмущения в невырожденных системах 228
4.5.2. Теория возмущений для вырожденных систем 233
4.5.3. Нестационарные возмущения 236
4.6. Вариационный метод 240
4.7. Тождественность частиц 245
4.7.1. Волновая функция системы тождественных частиц 245
4.7.2. Многоэлектронный атом, молекулы 248
4.8. Теория рассеяния. Борновское приближение 253
5. Статистическая физика 258
5.1. Основные положения термодинамики 258
5.1.1. Основные соотношения равновесной термодинамики ... 260
5.1.2. Свободная энергия 260
5.1.3. Термодинамический потенциал (свободная энергия Гиббса) 261
5.2. Необходимые понятия теории вероятностей 264
5.3. Классическая статистическая механика 269
5.4. Метод ансамблей Гиббса 275
5.4.1. Микроканоническое распределение (ансамбль) Гиббса 277
5.4.2. Каноническое распределение (ансамбль) Гиббса 277
5.4.3. Большое каноническое распределение (ансамбль) Гиббса 279
5.5. Флуктуации 290
5.6. Квантовая статистика 293
5.6.1. Общие положения 293
5.6.2. Статистика Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна 295
5.6.2.1. Высокие температуры 296
5.6.2.2. Низкие температуры 296
Библиографический список 308
Приложения 309
Приложение 1. Векторы 309
Приложение 2. Интеграл Фурье 325
Приложение 3. Дельта-функция и ее свойства 328
Приложение 4. Вычисление некоторых интегралов и формула Стирлинга 335
Приложение 5. Некоторые специальные функции 338

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Траектории частиц механической системы описываются набором обобщенных координат $z_1(t),...,z_N(t)$. Лагранжиан механической системы $L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t)$ зависит от координат $z_1(t),..., z_N(t)$ и связанных с ними скоростей $\dot{z}_1(t),..., \dot{z}_N(t)$ и определяет динамику системы. Точки над символами, как всегда, обозначают производную по времени d/dt. Лагранжиан $L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t)$ является функцией от скоростей $\dot{z}_i(t)$ не выше второй степени. Интеграл по времени от лагранжиана вдоль произвольной траектории системы, определяемой некоторой совокупностью функций координат частиц $z_1(t),..., z_N(t)$, задает функционал $S[z_i]$, называемый *действием*, на данной траектории системы между моментами времени t_a и t_b:

$$S[z_i] = \int_{t_a}^{t_b} L\left(z_i(t), \dot{z}_i(t), t\right) \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Согласно *принципу наименьшего действия Гамильтона* механическая система реально движется по траектории $z_1(t),..., z_N(t)$, на которой действие $S[z_i]$ минимально. Непосредственная (прямая) минимизация действия производится на определенном классе пробных траекторий, согласно способу, описанному в задаче 1.1. Непрямая минимизация действия производится методом Эйлера, который приводит в данном случае к дифференциальным уравнениям Лагранжа, как описано в 1.2.

Задача 1.1. Частица в поле $U(z) = -Fz$ за время τ перемещается из точки $z = 0$ в точку $z = a$. Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид $z(t) = At^2 + Bt + C$, и подбирая коэффициенты A, B и C так, чтобы действие имело наименьшее значение.

Решение. Полагая $z = 0$ при $t = 0$, находим $C = 0$ и из условия $z = a$ при $t = \tau$ находим $B = a/\tau - A\tau$. Используя функцию $z(t) = At^2 + (a/\tau - A\tau)t$, вычисляем действие

$$S = \int_0^\tau L(z, \dot{z})\mathrm{d}t = \int_0^\tau [\frac{m\dot{z}^2}{2} - U(z)]\mathrm{d}t = mA^2\tau^3/6 + ma^2/(2\tau) - FA\tau^3/6 + Fa\tau/2. \tag{1.2}$$

Из условия $\delta S/\delta A = 0$, определяющего минимум действия, находим $A = F/(2m)$. Очевидно, закон движения:

$$z(t) = Ft^2/(2m) + [a/\tau - F\tau/(2m)]t \tag{1.3}$$

в данном случае является точным. Однако приведенное решение задачи позволяет утверждать лишь то, что при найденном законе движения действие принимает наименьшее значение среди значений, принимаемых при движении по любому другому закону из законов предложенного вида.

1.1. Уравнения движения

1.1.1. Уравнение Лагранжа. Принцип относительности Галилея. Интегралы движения

Действие $S[z_i]$ экстремально на траектории реального движения $z_i(t)$ в сравнении со всеми другими траекториями, близкими к данной: $z_i'(t) = z_i(t) + \delta z_i(t)$, которые имеют такие же концевые точки: $z'_i(t_a) = z_i(t_a)$ и $z'_i(t_b) = z_i(t_b)$. Это свойство действия выражается равенством нулю вариации действия $\delta_1 S[z_i]$ в линейном приближении по вариации траектории $\delta z_i(t)$:

$$\delta_1 S[z_i] = \{S[z_i + \delta z_i] - S[z_i]\}|_{\text{лин}} = 0 \tag{1.4}$$

с граничным условием

$$\delta z_i(t_a) = 0,\ \delta z_i(t_b) = 0. \tag{1.5}$$

Траектория $z_i(t)$, зануляющая первую вариацию действия, удовлетворяет уравнению Лагранжа, являющемуся, по сути, уравнением Эйлера для экстремума функционала $S[z_i]$:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\partial L/\partial \dot{z}_i) = \partial L/\partial z_i;\ i = 1,...,N. \tag{1.6}$$

Количество уравнений Лагранжа определяется количеством обобщенных координат, описывающих движение механической системы $z_1,..., z_N$. Система отсчета, по отношению к которой время является однородным, а пространство – однородным и изотропным, называется *инерциальной*. Если какая-либо система отсчета движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, то она также инерциальна. Во всех инерциальных системах одинаковы свойства пространства и времени, а также одинаковы и законы механики. Это утверждение называется *принципом относительности Галилея*.

Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки, а также время t и t' в двух различных системах отсчета K и K' связаны *преобразованием Галилея*:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t; \quad (1.7)$$

$$t' = t, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{v}$ – это скорость движения системы K' относительно системы K.

Лагранжиан замкнутой системы материальных точек, т.е. системы, на которую не действуют никакие внешние тела, имеет общий вид

$$L = \sum_a [m_a v_a^2/2] - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots), \quad (1.9)$$

где $\mathbf{r}_a$ – радиус-вектор a-й точки, а $\mathbf{v}_a$ – ее скорость.

Первый член в (1.9) называют кинетической энергией, а функцию U – потенциальной энергией системы материальных точек. Декартовы координаты могут быть менее удобными для описания системы со связями, т.е. с дополнительными условиями, налагающими определенные ограничения на совместное изменение различных декартовых координат. Для учета связей вводят обобщенные координаты. Их количество $N_{\text{об}} = N - N_{\text{св}}$, где N – количество декартовых координат, $N_{\text{св}}$ – количество налагаемых ограничений (связей). Если движение описывается не декартовыми координатами точек, а некоторыми обобщенными координатами z_i, то для получения лагранжиана проводят соответствующее преобразование:

$$x_a = f_a(z_1, \ldots, z_{N\text{об}}),\ \mathrm{d}x_a/\mathrm{d}t = \sum_k (\partial f_a/\partial z_k)\,\dot{z}_k. \quad (1.10)$$

Подстановка выражений (1.10) в общее выражение для лагранжиана (1.9) приводит к лагранжиану, выраженному через обобщенные координаты и скорости:

$$L = \sum_{i,k} [a_{ik}(z)\,\dot{z}_i \dot{z}_k] - U(z_1, \ldots, z_{N\text{об}}), \quad (1.11)$$

где a_{ik} – функции только от координат*.

Лагранжиан двух невзаимодействующих систем частиц A и B равен сумме лагранжианов каждой из систем: $L_{AB} = L_A + L_B$. Потенциальная энергия механической системы во внешнем поле, вообще говоря, явно зависит от времени: $U(z_1, \ldots, z_N, t)$. Сила, действующая на a-ю частицу,

---

* $a_{ik} = m_{ik}/2$, тензор m_{ik} иногда называют тензором обобщенных масс.

$$\mathbf{F}_a = -\,\partial U/\,\partial \mathbf{r}_a. \qquad (1.12)$$

Функции координат и скоростей частиц системы, которые сохраняют постоянные значения при движении частиц, зависящие лишь от начальных условий, называются *интегралами (инвариантами) движения*. При движении замкнутой механической системы с N степенями свободы число независимых интегралов движения равно $2N-1$. Это следует из того, что общее решение N уравнений второго порядка (1.6), т.е. уравнений Лагранжа, содержит $2N$ произвольных постоянных. Поскольку система замкнута, вид решения не зависит от выбора начала отсчета времени t_0. Следовательно, константа t_0 входит в решения аддитивно со временем t: $t + t_0$. Исключая $t + t_0$ из $2N$ функций координат z_i и скоростей $\dot{z}_i$ $(i = 1,..., N)$, выражаем оставшиеся $2N-1$ постоянные C_i $(i = 1,..., 2N-1)$ в виде функций от координат и скоростей: z_i и $\dot{z}_i$ $(i = 1,..., N)$. Полученные таким образом $2N-1$ функций и являются интегралами движения замкнутой системы с N степенями свободы.

Аддитивными интегралами движения механической системы называются сохраняющиеся величины, значения которых для всей системы равны сумме значений для каждой из невзаимодействующих ее частей в отдельности. Существуют следующие аддитивные интегралы движения: энергия E, импульс $\mathbf{p}$, и момент импульса $\mathbf{M}$ системы:

$$E = \sum_i \left[\dot{z}_i(\partial L/\partial \dot{z}_i)\right] - L = \sum_a \left[m_a v_a^2/2\right] + U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...); \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{p} = \sum_a \left[\partial L/\partial \mathbf{v}_a\right] = \sum_a \left[m_a \mathbf{v}_a\right]; \qquad (1.14)$$

$$\mathbf{M} = \sum_a \left[\,\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a\right], \qquad (1.15)$$

где $\mathbf{p}_a = \partial L/\partial \mathbf{v}_a$ – импульс a-й частицы.

Сохранение энергии E связано с однородностью времени, в силу чего лагранжиан замкнутой системы или системы в постоянном внешнем поле не зависит явно от времени: $\partial L/\partial t = 0$. Сохранение импульса $\mathbf{p}$ связано с однородностью пространства, в силу чего вариация лагранжиана при любом параллельном переносе $\boldsymbol{\varepsilon}$ замкнутой системы как целого в пространстве равна нулю: $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{L} = 0$. Сохранение момента импульса $\mathbf{M}$ связано с изотропией пространства, в силу чего вариация лагранжиана при повороте на любой угол φ замкнутой системы в пространстве как целого равна нулю: $\delta_\varphi L = 0$.

В общем случае обобщенную координату z_i, не входящую явным образом в лагранжиан, называют *циклической*. Из уравнения Лагранжа (1.6) следует сохранение соответствующего обобщенного импульса p_i:

$$d/dt[\partial L/\partial \dot{z}_i] = \partial L/\partial z_i = 0; \rightarrow p_i \equiv \partial L/\partial \dot{z}_i = \text{const}. \qquad (1.16)$$

Задача 1.2. Найти интегралы движения, если вид действия не меняется при: а) пространственном сдвиге; б) повороте; в) сдвиге начала отсчета времени; г) винтовом сдвиге вдоль оси z.

Ответ: а) импульс; б) момент импульса; в) энергия; г) $M_z + hp_z/(2\pi) = \text{const}$ (h – шаг винта).

Задача 1.3. Найти интегралы движения для частицы, движущейся:

1) в однородном поле $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$;

2) в поле $U(\mathbf{r})$, где $U(\mathbf{r})$ – однородная функция: $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$. (Уточнить, при каком n преобразование подобия не меняет вид действия.);

3) в поле бегущей волны $U(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ – постоянный вектор;

4) в магнитном поле, заданном векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – однородная функция;

5) в электромагнитном поле, вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z.

Решение. 1. Потенциальная энергия $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$, а с ней вместе и действие, не изменяются при сдвигах в направлении, перпендикулярном $\mathbf{F}$, и при поворотах относительно оси, параллельной $\mathbf{F}$. Поэтому интегралами движения являются компоненты импульса, перпендикулярные $\mathbf{F}$, и компонента момента импульса, параллельная $\mathbf{F}$. Так как функция Лагранжа не зависит от времени, интегралом движения является энергия. Утверждение, что различные точки в некоторой области «равноправны», означает, что во всех этих точках равны значения потенциальной энергии (а не силы!). Пространство, в котором имеется однородное поле, отнюдь не однородно.

2. Преобразование подобия не меняет вида действия при $n = 2$. В этом случае $\mathbf{pr} - 2Et = \text{const}$. Например, для центрального поля $U = \alpha/r^2$ этот интеграл, переписанный в виде $m\dot{r}r - 2Et = \text{const}$, с учетом со-

отношения $\dot{r} = \sqrt{(2/m)\left[E - \alpha/t^2 - M^2/\left(2mr^2\right)\right]}$ определяет зависимость $r(t)$, где M – момент импульса относительно центра поля (проекция).

3. E – $\mathbf{Vp}$ = const.

4. $\mathbf{pr} - 2Et$ = const, где $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + (e/c)\mathbf{A}$, если $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

5. $E - p_\varphi\Omega$ = const.

Задача 1.4. Найти интегралы движения для частицы в однородном магнитном поле **H**, если векторный потенциал **A** задан в виде:

1. $\mathbf{A} = (1/2)[\,\mathbf{Hr}\,]$;

2. $A_x = A_z = 0$, $A_y = xH$, или $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$.

Решение. 1. Пусть ось z параллельна полю **H**. Сдвиг вдоль оси z и поворот вокруг нее не изменяют вида **A**, а следовательно, и вида действия. Поэтому интегралами движения являются

$p_z = \partial L/\partial \dot{z} = m\dot{z}$ и $M_z = xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + [(eH)/(2c)](x^2 + y^2)$.

Кроме того, интегралом движения является энергия $E = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

2. $E = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, $p'_y = m\dot{y} + (e/c)Hx$, $p'_z = m\dot{z}$.

Соображения симметрии позволяют определить различные интегралы движения в зависимости от выбора векторного потенциала данного поля H. Но все величины: E, $p_z = p'_z$, M_z, p'_y – являются интегралами движения независимо от выбора **A**.

1.1.2. Интегрирование уравнений движения Лагранжа

1.1.2.1. Движение частицы в одномерном потенциальном поле

Одномерным называют движение механической системы с одной степенью свободы, которую назовем x. Если потенциальная энергия $U(x)$ не зависит от времени явно, то уравнения Лагранжа интегрируются в общем виде:

$$t = \sqrt{(m/2)} \int \mathrm{d}x/\sqrt{\left[E - U(x)\right]} + \text{const}, \tag{1.17}$$

где две произвольные постоянные в решении (1.17) имеют смысл полной энергии E и начала отсчета времени t_0 = const.

В силу положительности кинетической энергии движение происходит только в тех областях пространства, где $U(x) < E$. Точки x_a, ограничивающие области движения, находятся из уравнения $U(x_a) = E$ и называются *точками остановки (поворота)*. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение называется *финитным*. Если же область движения не ограничена хотя бы с одной стороны, то такое движение называется *инфинитным*. Период колебаний T между двумя точками поворота x_a и x_b определяется по формуле

$$\mathrm{T(E)} = \sqrt{(2m)} \int_{x_b}^{x_a} \mathrm{d}x / \sqrt{E - U(x)}\,, \tag{1.18}$$

где пределы являются корнями уравнения $U(x_{a,b}) = E$ при данном значении E.

Задача 1.5. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$:

а) $U(x) = A[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$ – потенциал Морса (рис. 1.1);

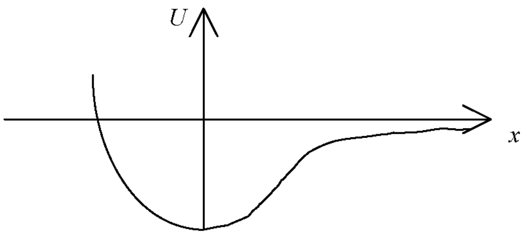


Рис. 1.1

б) $U(x) = -\,U_0/[\mathrm{ch}^2(\alpha x)]$ (рис. 1.2);

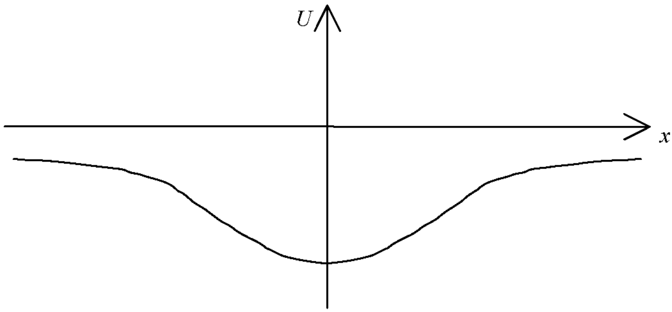


Рис. 1.2

в) $U(x) = U_0\mathrm{tg}^2(\alpha x)$ (рис. 1.3).

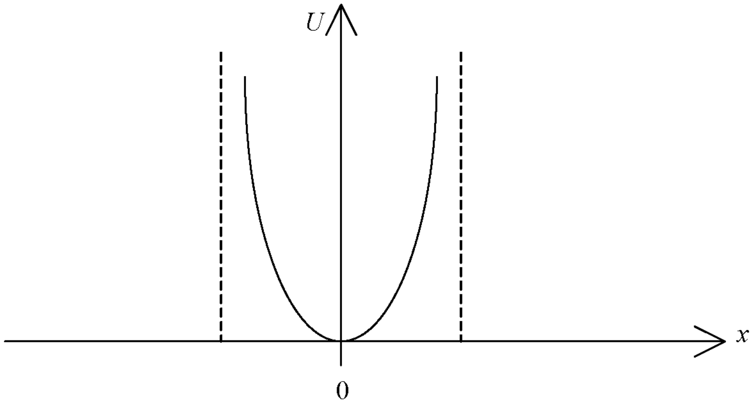


Рис. 1.3

Ответы:

а) $x(t) = (1/\alpha)\,\mathrm{Arch}\left\{\left[\left(|E| + U_0\right)/|E|\right]\sin\left[\alpha t\sqrt{\left(2|E|/m\right) + C}\right]\right\}$ при $E < 0$;

б) $x(t) = \pm(1/\alpha)\,\mathrm{Arsh}\left\{\left[\left(E + U_0\right)/E\right]\mathrm{sh}\left[\alpha t\sqrt{\left(2E/m\right) + C}\right]\right\}$ при $E > 0$;

в) $x(t) = \pm(1/\alpha)\,\mathrm{Arsh}\left[\alpha t\sqrt{\left(2U_0/m\right) + C}\right]$ при $E = 0$, $\{\mathrm{Arsh}(x) = \ln[x + (x^2 + 1)]\}$.

Задача 1.6. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия ее равна нулю.

Ответ. $x(t) = -\sqrt{\dfrac{m}{2A}}\,t^{-1}$.

Задача 1.7. Найти изменение закона движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$:

1) $U(x) = m\omega^2x^2/2$, $\delta U(x) = m\alpha x^3/3$;

2) $U(x) = \begin{cases} \alpha/x^2 & \text{при} \quad x < \alpha; \\ \infty & \text{при} \quad x > \alpha; \end{cases}$ $\delta U(x) = Fx$.

Решение. 1. Невозмущенное движение $x_0(t) = a\sin(\omega t)$; $E = ma^2\omega^2$. (1.19)

Поправка $\delta t(x) = (\alpha/3\omega^3)\left[\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} + a^2/\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} - 2a\right]$. (1.20)

Подставляя (1.19) и (1.20) в формулу

$$x = x_0(t) - x'_0(t)\,\delta t(x_0(t)),$$

получаем

$$x(t) = a\sin(\omega t) - \alpha a^3/(3\omega^2)\cos(\omega t)[\cos(\omega t) + 1/\cos(\omega t) - 2].$$

С точностью до членов первого порядка малости по $\alpha a^2/\omega^2$ включительно

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) + \alpha a^3/(2\omega^2) - [\alpha a^3/(6\omega^2)]\cos[2(\omega t + \varphi)],$$

где $\varphi = -2\alpha a^2/(3\omega^2)$.

Задача 1.8. Найти изменение периода движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$:

1) $U(x) = m\omega^2x^2/2$ (гармонический осциллятор), $\delta U(x) = m\beta x^4/4$;

2) $U(x) = m\omega^2x^2/2$, $\delta U(x) = m\alpha x^3/3$;

3) $U(x) = A[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$, $\delta U(x) = -V\exp(\alpha x)$, $V \ll A$.

Решение. 1. Ответ: $T = 3\pi\beta E/(2m\omega^5)$.

2. Графики потенциальной энергии $U(x)$ и $U(x) + \delta U(x)$ изображены на рис. 1.4.

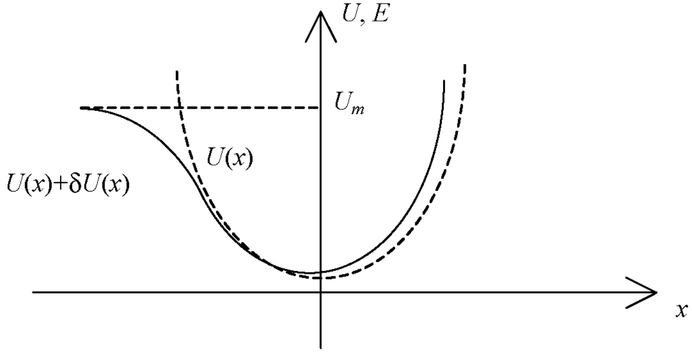


Рис. 1.4

Видно, что при $E > U_m = m\omega^6/6\alpha$ добавка делает движение инфинитным. При значениях E, близких к U_m, период колебаний неограниченно возрастает (как $|\ln(U_m - E)|$); поэтому нельзя рассчитывать, что в этом случае он определяется небольшим числом членов ряда

$$T = \sqrt{m/2}\sum_{n=0}^{\infty}\ [(-1)^n/n!\ ](\partial^n/\partial E^n)\int_{x_1}^{x_2}\ [\delta U(x)]^n \mathrm{d}x/\sqrt{\left[E-U(x)\right]}\,.$$

Если же $E \ll U_m$, то поправка к периоду $\delta T = 5\pi E/(18\omega U_m)$.

3. Ответ: $\delta T = \dfrac{3\pi AV\sqrt{m}}{2\alpha\sqrt[5]{E}\sqrt{2}}$; $E \gg \sqrt{8AV}$.

1.1.2.2. Движение частицы в центральном поле. Задача Кеплера

Потенциальная энергия частицы в центральном поле $U(r)$ зависит только от расстояния $|\mathbf{r}| \equiv r$ до неподвижного центра поля. Сохраняется момент импульса частицы **M** относительно центра поля:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r},\mathbf{p}] = \mathrm{const}. \qquad (1.21)$$

Вследствие (1.21) движение происходит в одной плоскости, в которой вводятся полярные координаты r и φ. Лагранжиан принимает вид

$$L = (m/2)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)^2 - U(r). \qquad (1.22)$$

Очевидно, координата φ является циклической. Соответствующий ей сохраняющийся обобщенный импульс

$$p_i = (\partial L/\partial \dot{z}_i) \equiv p_\varphi = mr^2(\mathrm{d}\varphi\ /\mathrm{d}t) = \mathrm{const} \equiv M \qquad (1.23)$$

является проекцией момента импульса **M** на ось, перпендикулярную плоскости орбиты частицы M_z. Также сохраняется полная энергия частицы E. Полное решение задачи в квадратурах о движении частицы в центральном поле, зависящее от двух интегралов движения M и E, а также от начальных условий t_0 и φ_0, имеет вид

$$t = \int \mathrm{d}r/\sqrt{\left\{(2/m)\left[E-U(r)\right]-M^2/\left(m^2r^2\right)\right\}} + t_0; \qquad (1.24)$$

$$\varphi = \int\left(M/r^2\right)\mathrm{d}r/\sqrt{\left\{(2/m)\left[E-U(r)\right]-M^2/r^2\right\}} + \varphi_0. \qquad (1.25)$$

Частный случай задачи о движении в центральном поле вида $U(r) = -\alpha/r$, соответствующем полю тяготения или кулоновскому полю, называется *задачей Кеплера*. В задаче Кеплера интегралы в общих формулах (1.24) и (1.25) имеют первообразные в виде элементарных функций. Орбиту частицы можно записать в виде

$$p/r = 1 + e\cos(\varphi). \tag{1.26}$$

Это уравнение определяет линию конического сечения с фокусом в начале координат; p и e называются соответственно *параметром* и *эксцентриситетом* орбиты:

$$p = M^2/(m\alpha);\ e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2}, \tag{1.27}$$

причем сделанный выбор начала отсчета угла $\varphi = 0$ соответствует ближайшей к центру точке орбиты (*перигелий*). Из (1.26) следует, что при $E < 0$ движение финитно, эксцентриситет $e < 1$ и (1.26) описывает эллипс. В случае $E \geq 0$ движение инфинитно. При этом в случае $E > 0$ эксцентриситет $e > 1$ и (1.26) описывает гиперболу. В случае $E = 0$ $e = 1$ и (1.26) описывает параболу.

Задача 1.9. Найти траектории и законы движения частицы в поле

$$U = \begin{cases} -V & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases}$$

На рис. 1.5 показана сферическая прямоугольная потенциальная яма при различных значениях момента и энергии.

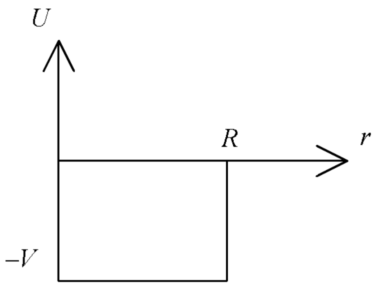
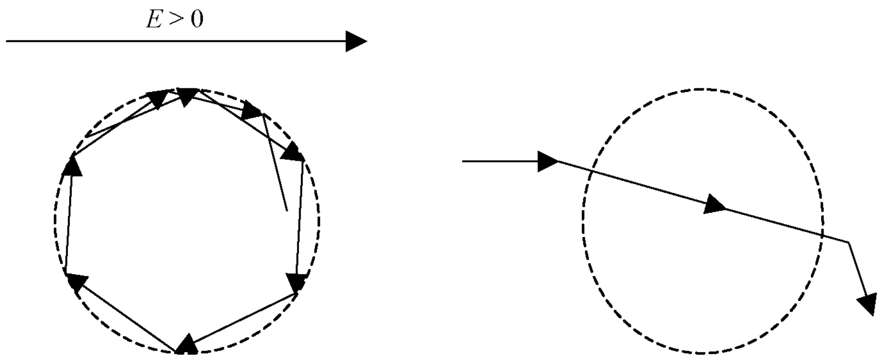


Рис. 1.5

Решение. Скорость частицы $\dot{r} = \sqrt{\left[\dfrac{2}{M}(E - U(r) - \dfrac{M^2}{2mr^2}\right]}$. Вне сферы радиусом R частица движется со скоростью $\sqrt{2E/m}$, а внутри – со скоростью $\sqrt{\left[2(E+V)/m\right]}$. В зависимости от соотношения E и M получаются различные виды траекторий. При $[M^2/(2mR^2) - V] < E < M^2/(2mR^2)$ частица либо движется внутри сферы, испытывая отражения на границе (рис. 1.6,*а*), либо (если, кроме того, $E > 0$) может двигаться и вне сферы (траектория прямая, рис.1.6,*б*). При $M^2/(2mR^2) < E$ имеет место преломление траектории (см. рис.1.6,*б*).

Как выглядит траектория при $E = M^2/(2mR^2) - V$?



а *б*

Рис. 1.6

Задача 1.10. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$.

Выразить изменение направления ее скорости при рассеянии через энергию и момент.

Решение. Для определения траектории движения используем следующие формулы:

$$\varphi = \int M\,\mathrm{d}r/\left\{r^2\sqrt{[2m(E - U_{эф})]}\right\};\ U_{эф} = U(r) + M^2/(2mr^2).$$

Интеграл, записанный в виде

$$\left(\tilde{M}/M\right)\varphi = \int \tilde{M}\mathrm{d}r/\left\{r^2\sqrt{2m\left[E - \tilde{M}^2/\left(2Mr^2\right) - \frac{\alpha}{r}\right]}\right\},$$

где $\tilde{M}^2 = M^2 + 2M\beta$, сводится к соответствующему интегралу в задаче Кеплера.

В результате вычисления получаем

$$r = p/[e\cos\gamma(\varphi - \psi) - 1],$$

где

$$p = (2/\alpha)[\beta + M^2/(2m)];\ e = \sqrt{\left[1 + \left(4E/\alpha^2\right)\left(\beta + M^2/(2m)\right)\right]};$$

$$\gamma = \sqrt{\left[1 + 2m\beta/M^2\right]},\ E > 0,\ \psi \text{ – произвольная постоянная.}$$

Траектория представляют собой кривую, получаемую из гиперболы уменьшением полярных углов в γ раз (рис.1.7). Постоянная ψ определяет ориентацию траектории. Направление асимптот определяется условием $r \to \infty$, при этом $e\cos(\varphi_{1,2} - \varphi) = 1$. Скорость отклоняется на угол

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi - (2/\gamma)\arccos(1/e) =$$
$$= \pi - (2/\gamma)\,\mathrm{arctg}\sqrt{\left[\left(4E/\alpha^2\right)\left(\beta + M^2/2m\right)\right]}\ [(4E/\alpha^2)(\beta + M^2/2m)].$$

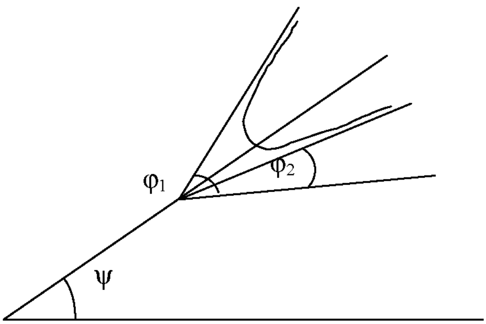


Рис. 1.7

Задача 1.11. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$.

Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями перигелия (точки $r = r_{\min}$), период радиальных колебаний T_r и период обращения T_φ. При каком условии траектория окажется замкнутой?

Решение. Уравнение траектории

$$r = p/[1 + e\cos\gamma(\varphi - \psi)],$$

где p, e, γ определены в задаче 1.10. При $E < 0$ движение финитное. Период тот же, что и в поле $U_0 = -\alpha/r$. Для определения T_r достаточно заметить, что добавление к полю U_0 добавки β/r^2 сказывается на радиальном движении так же, как увеличение M. Период же T_r в кулоновском поле U_0 от M не зависит.

$$T_r = \pi\alpha\sqrt{m/\sqrt{(2|E|)^3}},\ \Delta\varphi = 2\pi/\gamma,\ T_\varphi = \gamma T_r.$$

Траектория замкнутая, если γ – рациональное число. На рис. 1.8 изображена траектория для $\gamma \approx 5$.

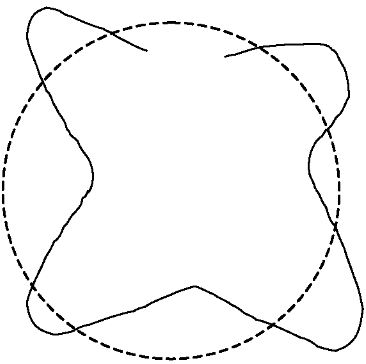


Рис. 1.8

Задача 1.12. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\alpha/r - \beta/r$.

Решение. При $\beta < M^2/2m$ $\quad r = \tilde{p}/\{1 - \tilde{e}\cos[\tilde{\gamma}(\varphi - \psi)]\}$,

$\tilde{p} = (2/\alpha)[M^2/2m - \beta]$, $\tilde{\gamma} = \sqrt{1 - 2m\beta/M^2}$,

$\tilde{e} = \sqrt{\left[1 + 4E/\alpha^2\left(M^2/2m - \beta\right)\right]}$;

если $E < 0$, то $\Delta\varphi = 2\pi/\gamma$, $T_\varphi = \tilde{\gamma}T_r$, T_r – то же, что в задаче 1.7. При $\beta > M^2/(2m)$ $r = p'/\{e\ \mathrm{sh}[\gamma'(\varphi - \psi)] + 1\}$, если $E > 0$, и

$r = p'/\{e\ \mathrm{ch}[\gamma'(\varphi - \psi)] + 1\}$, если $E < 0$.

Задача 1.13. При каких значениях момента импульса M возможно финитное движение частицы в поле $U(r) = -V\exp(-\chi^2 r^2)$?

Ответ. Финитное движение возможно при $M^2 < 8mV/(e^2\chi^2)$.

1.1.2.3. Рассеяние частиц. Формула Резерфорда

Упругим называется рассеяние частиц, которое не сопровождается изменением их внутреннего состояния. В этом случае в законе сохранения энергии при рассеянии внутреннюю энергию можно не учитывать. В системе центра инерции двух частиц задача о рассеянии сводится к рассмотрению рассеяния одной частицы массой m в поле $U(r)$ неподвижного силового центра, расположенного в центре инерции O. Взаимодействие между частицами считаем зависящим только от взаимного расстояния между ними. Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к OB, соединяющей центр O с ближайшей точкой орбиты B (рис. 1.9).

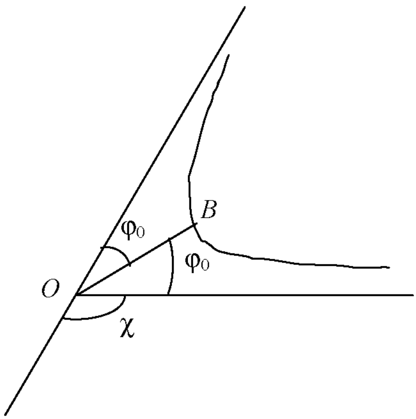


Рис. 1.9

Обозначим через φ_0 угол асимптоты орбиты с прямой OB. Соответственно угол отклонения частицы в результате рассеяния в потенциале центра равен $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$, где

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} (M/r^2)dr/\sqrt{\left\{2m\left[E-U(r)\right]-M^2r^2\right\}}, \tag{1.28}$$

причем минимальное расстояние до центра $r_{\min} = OB$ является корнем знаменателя подынтегрального выражения в (1.28).

При инфинитном движении вводят вместо интегралов движения M и E параметры v_∞ и ρ, являющиеся скоростью частицы на бесконечности и *прицельным расстоянием* соответственно. Последнее равняется минимальному расстоянию до центра, на котором частица прошла бы мимо, если бы силовое поле $U(r)$ отсутствовало. С этими параметрами формула (1.28) приобретает вид

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} (\rho/r^2)\mathrm{d}r/\sqrt{\left\{1-2U(r)/\left(mv_\infty^2\right)-\rho^2/r^2\right\}}. \qquad (1.29)$$

При рассеянии пучка одинаковых частиц последние падают на рассеивающий центр с одинаковой начальной скоростью $\mathbf{v}_\infty$, но с различающимися прицельными расстояниями в интервале $(\rho,\ \rho + \mathrm{d}\rho)$. Соответственно углы рассеяния частиц лежат в интервале $(\chi,\ \chi + \mathrm{d}\chi)$. Эффективным дифференциальным *сечением рассеяния* $\mathrm{d}\sigma$ называется отношение числа частиц $\mathrm{d}N$, рассеиваемых в единицу времени, на углы в интервале $(\chi,\ \chi + \mathrm{d}\chi)$, к числу частиц n, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (предполагается однородность по сечению):

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}N/n. \qquad (1.30)$$

Эквивалентное выражение для сечения рассеяния имеет вид

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho(\chi)\ |\mathrm{d}\rho(\chi)/\mathrm{d}\chi|\ \mathrm{d}\chi = [\rho(\chi)/\sin(\chi)]\ |\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\chi|\mathrm{d}o, \qquad (1.31)$$

где введено обозначение телесного угла между конусами с углами раствора χ и $\chi + \mathrm{d}\chi$:

$$\mathrm{d}o = 2\pi \sin(\chi)\mathrm{d}\chi.$$

Важным частным случаем является рассеяние частиц на центре с кулоновским потенциалом $U(r)= \alpha/r$. Из формулы (1.29) при этом следует

$$\varphi_0 = \arccos\{\alpha/(mv_\infty{}^2\rho)/\{1+ [\alpha/(mv_\infty{}^2\rho)]^2\}= (\pi - \chi)/2. \qquad (1.32)$$

Находя с помощью (1.32) зависимость $\rho(\chi)$ и подставляя в общее выражение (1.31), получаем *формулу Резерфорда*:

$$\mathrm{d}\sigma = (\alpha/2mv_\infty{}^2)^2\mathrm{d}o/[\sin^4(\chi/2)]. \qquad (1.33)$$

Эффективное сечение (1.33) не зависит от знака α.

Задача 1.14. Найти эффективное дифференциальное сечение рассеяния частиц сферическим «потенциальным горбом»:

$$U(r)=\begin{cases} V & \text{при} \quad r<a, \\ 0 & \text{при} \quad r>a. \end{cases}$$

Решение

$$\mathrm{d}\sigma=\left\{\left(\frac{a^2n^2(n\cos(\theta/2)-1)}{4\cdot\cos(\theta/2)}\frac{(n-\cos(\theta/2))}{\left[1+n^2-2n\cos(\theta/2)\right]^2}+\frac{a^2}{4}\right)\mathrm{d}o\right.$$

при $0<\theta<\theta_m$, $\theta_m = 2\arccos n<\pi$,

где $n=\sqrt{(1-V/E)}$.

Чем вызвано отличие этого сечения от сечения рассеяния на потенциальной яме?

Задача 1.15. Найти сечение падения частиц в центр поля $U=\alpha/r-\beta/r^2$.

Решение

$$\sigma=\begin{cases} \pi\left[\beta/E-\alpha^2/(4E^2)\right] & \text{при} \quad E>\alpha^2/(2\beta), \\ 0 & \text{при} \quad E<\alpha^2/(2\beta). \end{cases}$$

Как изменится сечение при изменении знака α (см. задачу 1.12)?

Задача 1.16. Найти эффективное дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r)=\begin{cases} \alpha|r-\alpha|/R & \text{при} \quad r<R, \\ 0 & \text{при} \quad r>R. \end{cases}$$

Решение. $\mathrm{d}\sigma = R^2(1+\lambda)\mathrm{d}o\,/\,\{4[1+\lambda\sin^2(\theta/2)]^2\}$, где $\lambda = 4RE\,(RE + \alpha)/\alpha^2$,

где $\lambda=-1$, $\mathrm{d}\sigma=0$ – каналирование.

Как объяснить результат, получаемый при $(\alpha+2RE)=0$?

1.2. Малые колебания

1.2.1. Свободные одномерные колебания. Колебания систем со многими степенями свободы. Вынужденные колебания. Резонанс

Малые одномерные колебания механической системы вблизи положения устойчивого равновесия z_0 по обобщенной координате z описываются лагранжианом

$$L = m\dot{z}^2/2 - k(z - z_0)^2/2, \tag{1.34}$$

где $k = U''(z_0)$ – вторая производная потенциальной энергии по координате в точке минимума, а первый член в (1.34) – кинетическая энергия системы. Систему с лагранжианом (1.34) называют *одномерным осциллятором*. Соответствующее уравнение Лагранжа после замены $u = z - z_0$ принимает вид

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0;\ \omega = \sqrt{(k/m)}\,. \tag{1.35}$$

Общее решение уравнения (1.35) представляется линейной комбинацией гармонических функций:

$$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = a \cos(\omega t + \alpha), \tag{1.36}$$

где введены параметры – *амплитуда колебаний* a и *фаза* α согласно соотношениям

$$a = \sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)},\ \mathrm{tg}\,\alpha = -c_2/c_1.$$

Параметр ω называется *циклической частотой* гармонического колебательного движения, которое описывается соотношением (1.36). Обобщение Лагранжиана (1.34) на случай N степеней свободы, $z_1(t),\ldots, z_N(t)$, проводится введением потенциальной энергии U, имеющей минимум при $z_i = z_{i0.}$ Вводим опять малые смещения относительно положения равновесия: $u_i = z_i - z_{i0}$ и представляем потенциальную энергию U, отсчитанную от ее минимального значения $U(z_{10},\ldots, z_{N0})$, в виде положительно определенной квадратичной формы:

$$U - U(z_{10},\ldots, z_{N0}) = (1/2)\sum_{i,k}\left(k_{i,k}u_i u_k\right). \tag{1.37}$$

Вводя также кинетическую энергию по аналогии с (1.34), получаем следующий Лагранжиан системы гармонических осцилляторов:

$$L = (1/2)\sum_{i,k} [m_{i,k}(\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}u_k/\mathrm{d}t) - k_{i,k}u_iu_k], \tag{1.38}$$

где коэффициенты $m_{i,k}$ и $k_{i,k}$ симметричны по индексам i,k.

Уравнения Лагранжа представляют собой систему N однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_k (m_{i,k}\ddot{u}_k + k_{i,k}u_k) = 0. \tag{1.39}$$

Переходя к представлению Фурье по временной переменной t, ищем решения системы (1.38) в виде

$$u_k = A_k\exp(i\omega t). \tag{1.40}$$

Подстановка (1.40) в (1.39) приводит к системе N однородных линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные коэффициенты A_k:

$$\sum_k (-\omega^2 m_{i,k} + k_{i,k})A_k = 0. \tag{1.41}$$

Отличные от нуля решения A_k системы (1.41) существуют, когда ω^2 удовлетворяет *характеристическому* уравнению, т.е. условию равенства нулю детерминанта матрицы системы (1.41):

$$\det|-\omega^2 m_{i,k} + k_{i,k}| = 0. \tag{1.42}$$

N вещественных решений ω_α ($\alpha = 1,..., N$) определяют набор собственных частот механической системы. Используя миноры $\Delta_{k\alpha}$ матрицы системы (1.41), вычисленные при заданных значениях ω_α, можно выразить исходные координаты осцилляторов u_i ($i = 1,\ldots, N$) через нормальные координаты Y_α, $\alpha = 1,..., N$ согласно формуле

$$u_i = \sum_\alpha \Delta_{i\,\alpha}Y_\alpha. \tag{1.43}$$

В этих координатах уравнения Лагранжа разделяются и приобретают вид, полностью аналогичный (1.35):

$$\ddot{Y}_\alpha + \omega_\alpha^2 Y_\alpha = 0, \tag{1.44}$$

где собственные частоты колебаний могут быть представлены в виде, аналогичном одномерному случаю (1.35): $\omega_\alpha^2 \equiv k_\alpha/m_\alpha$. Соответственно общее решение системы (1.39) приобретает вид

$$u_i = \sum_{\alpha} [\Delta_{i\alpha} C_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)]. \qquad (1.45)$$

Решение (1.45) представляет собой линейную комбинацию N собственных колебаний системы с произвольными амплитудами C_α и фазами φ_α. В случае кратных корней характеристического уравнения (1.42) соответствующие миноры зануляются, и поэтому выбор коэффициентов в (1.43) для различных нормальных координат с одной и той же кратной частотой не однозначен и определяется начальными условиями.

Наличие внешней вынуждающей силы $F_k(t)$, воздействующей по оси координат u_k, отражается в добавлении к лагранжиану системы L_0 дополнительного слагаемого, входящего в выражение для потенциальной энергии системы:

$$L = L_0 + \sum_{k} [F_k(t) u_k]. \qquad (1.46)$$

Переходя к нормальным координатам согласно преобразованию (1.43), получаем следующие уравнения Лагранжа:

$$\ddot{Y}_\alpha + \omega_\alpha^2 Y_\alpha = f_\alpha(t), \qquad (1.47)$$

где $f_\alpha(t) \equiv \sum_{k} [F_k(t)\Delta_{k\alpha}/m_\alpha]$.

Общее решение уравнения (1.47) имеет вид

$$Y_\alpha(t) = \mathrm{Im}\{\exp(i\omega_\alpha t) \int_0^t f_\alpha(t')\exp(-i\,\omega_\alpha t')\mathrm{d}t' + C_\alpha)\}, \qquad (1.48)$$

где символ Im{...} означает взятие мнимой части комплексного числа, C_α – произвольная постоянная. В частном случае гармонической вынуждающей силы

$$f_\alpha(t) = f_0 \cos(\gamma t + \beta) \qquad (1.49)$$

решение также имеет вид суммы гармонических функций с собственной и внешней частотами ω_α и γ:

$$Y_\alpha(t) = C_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) + f_0 \cos(\gamma t + \beta)/(\omega_\alpha^2 - \gamma^2). \qquad (1.50)$$

Решение (1.50) неприменимо в случае выполнения условия *резонанса*: $\omega_a = \gamma$. В последнем случае амплитуда колебаний растет линейно со временем вплоть до выхода системы из режима малых колебаний:

$$Y_\alpha(t) = C_\alpha \cos(\gamma t + \varphi_\alpha) + t f_0 \sin(\gamma t + \beta)/(2\gamma). \qquad (1.51)$$

Задача 1.17. Найти свободные колебания системы (рис. 1.10), если она находится в однородном поле тяжести и частица может двигаться только вертикально.

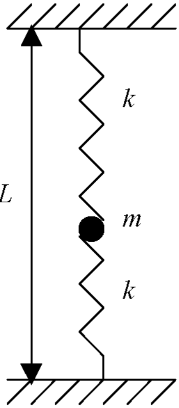


Рис. 1.10

Ответ. $\omega^2 = 2k/m$.

Задача 1.18. Найти свободные колебания системы (рис. 1.11), если частица может двигаться: 1) горизонтально; 2) вертикально.

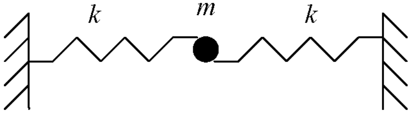


Рис. 1.11

Решение. 1. Скорость смещения из положения равновесия $\dot{x} = \dot{x}_0 \cos(\omega t) + (x_0\omega) \sin(\omega t)$, откуда

$$x(t) = \sqrt{\left(x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2\right)} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = -\dot{x}_0/(\omega x_0)$, $\omega^2 = 2k/m$.

2. Пусть натяжение одной пружины f. Для малых смещений $|y| << \sqrt{(fl/k)}$, где l – длина одной пружинки в положении равновесия, колебания гармонические $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = 2f/(ml)$.

При $f = kl$ частота колебаний та же, что и в пункте 1. Если пружинки не натянуты ($f = 0$), колебания нелинейны, возвращающая сила $F = -\dfrac{ky^3 l}{l^2}$; частота

$$\omega = \sqrt{\pi}\sqrt{(2k/m)y_m/l}\ ,$$

где y_m – амплитуда колебаний. Если частица может двигаться в плоскости xy, то ее движение при $f \neq 0$ и малых смещениях представляет собой гармонические колебания вдоль осей x и y с частотами $\omega^2_x = 2k/m$ и $\omega^2_y = 2f/(ml)$ соответственно.

Задача 1.19. Найти установившиеся малые колебания плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по окружности радиусом R с частотой Ω (рис. 1.12). Длина маятника l ($l >> R$).

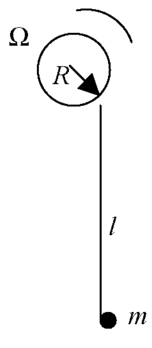


Рис. 1.12

Ответ. Угол отклонения маятника от вертикали $\varphi = [a\Omega^2/(g - l\Omega^2)] \cos(\Omega t)$, $|a\Omega^2/(g - l\Omega^2)| << 1$.

Задача 1.20. Найти частоту ω малых колебаний частицы в поле $U(x) = V\cos(\alpha x) - Fx$.

Ответ. $\omega^2 = (V\alpha^2/m)\sqrt{\left[1-\left(F/V\alpha\right)^2\right]}$; min $U(x)$ существует при $F < V\alpha$.

Задача 1.21. Точка массой m, несущая заряд q, может двигаться в поле тяжести по вертикали окружности радиусом R. В нижней части окружности закреплен заряд q. Найти положение равновесия и частоту малых колебаний точки (рис. 1.13).

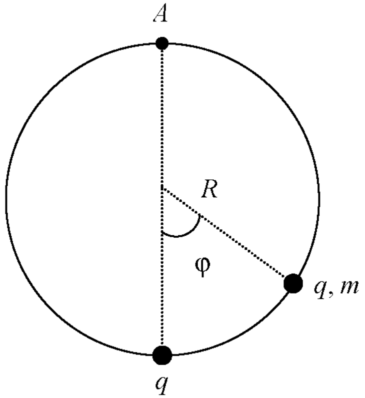


Рис. 1.13

Решение. $\omega^2 = (3g/R)\,|1 - x_0^2|$, где $x_0 = \sqrt[3]{\left[q^2/\left(8mgR^2\right)\right]}$. При $x_0 > 1$ точка A – положение устойчивого равновесия, а при $x_0 < 1$ – неустойчивого. Положение устойчивого равновесия φ_0 при $x_0 < 1$ определяется условием $\sin(\varphi_0/2) = x_0$.

Задача 1.22. Найти установившиеся колебания осциллятора под действием периодической силы $F(t) = F(t/\tau - n)$ при $n\tau < t < (n + 1)\tau$ (рис. 1.14).

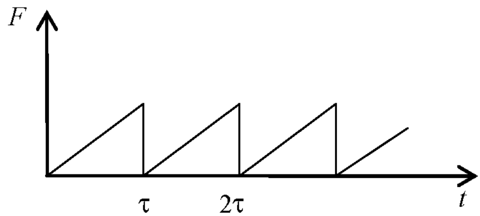


Рис. 1.14

Решение. В промежуток времени $0 \le t \le \tau$ колебания имеют вид

$$x = Ft/(m\omega^2\tau) + B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t).$$

Движение окажется установившимся, если $x(\tau) = x(0) = C$, $\dot{x}(\tau) = \dot{x}(0) = B\omega + F/(m\omega^2\tau)$. Эти условия приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} F/(m\omega^2) + B\sin(\omega t) + C[\cos(\omega t) - 1] = 0; \\ B[\cos(\omega t) - 1] - C\sin(\omega t) = 0, \end{cases}$$

определяющей постоянные B и C. Таким образом, при $0 \le t \le \tau$

$$x(t) = F/(m\omega^2)\{t/\tau - [\sin(\omega t - \omega\tau/2)]/[2\sin(\omega\tau/2)]\}.$$

Если же t лежит в промежутке $n\tau \le t \le (n+1)\tau$ (где n – целое), то в правой части $x(t)$ следует заменить t на $t' = t - n\tau$ $(0 < t' < \tau)$.

При $\omega\tau$, близком к целому кратному 2π, второй член в последнем выражении оказывается очень большим – случай, близкий к резонансу. При $\omega\tau = 2\pi l$ (l – целое) установившихся колебаний быть не может (система уравнений, определяющая B и C, противоречива): представив силу в виде ряда Фурье

$$F(t) = F/2 - \sum_{l=1}^{\infty} [(F/\pi l)\sin(2\pi l/\tau)t,$$

увидим, что резонансную раскачку колебаний может вызывать каждая гармоника вынуждающей силы. При $\tau = 2\pi l/\omega$ для достаточно больших t (каких именно?)

$$x(t) \sim [-Ft/(2\pi m\omega l)]\sin(\omega t).$$

Задача 1.23. Найти установившиеся колебания осциллятора под действием периодической силы $F(t) = F[1 - \exp(-\lambda t')]$, $t' = t - n\tau$ при $n\tau < t < (n+1)\tau$ (рис. 1.15).

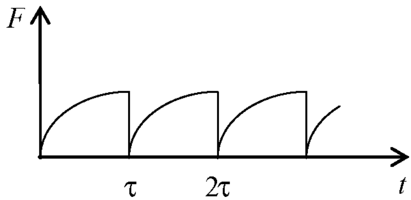


Рис. 1.15

Ответ. $A = \dfrac{4\lambda\omega^2}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a|^2 n^2}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2 n^2}.$

Задача 1.24. Найти нормальные колебания системы, изображенной на рис. 1.16, при которых частицы двигаются вертикально.

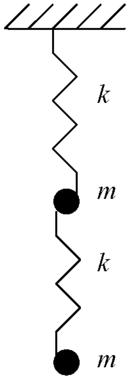


Рис. 1.16

Решение. В системе возможны два нормальных колебания, т.е. такие колебания, при которых частицы движутся с одинаковой частотой в фазе или противофазе (x_i – отклонения от положения равновесия, ср. с задачей 1.17):

1) $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$, $x_2 = 2/(\sqrt{5} - 1)\,A\cos(\omega_1 t + \varphi)$;

2) $x_2 = B\cos(\omega_2 t + \psi)$, $x_2 = -2/(\sqrt{5} - 1)B\cos(\omega_2 t + \psi)$.

Здесь нормальные частоты $\omega^2_{1,2} = [(3 \pm \sqrt{5})/2](k/m)$.

Задача 1.25. Найти свободные колебания системы (рис. 1.17), если в начальный момент:

1) одна из частиц имеет скорость υ, скорость другой и отклонения обеих частиц от положения равновесия равны нулю;

2) одна из частиц отклонена от положения равновесия на расстояние a, отклонение другой и скорость равны нулю.

Частицы могут двигаться только вдоль прямой AB.

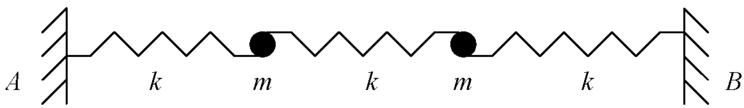


Рис. 1.17

Решение

1) $x_{1,2} = (\upsilon/2)\,[(1/\omega_1)\sin(\omega_1 t) \pm (1/\omega_2)\sin(\omega_2 t)]$; при $k_1 << k$ колебания имеют форму биений:

$x_1 = (\upsilon/\omega_1)\cos(\varepsilon t)\sin(\omega_1 t)$, $x_2 = -(\upsilon/\omega_1)\sin(\varepsilon t)\cos(\omega_1 t)$;

2) $x_{1,2} = (a/2)\,[\cos(\omega_1 t) \pm \cos(\omega_2 t)]$; при $k_1 << k$ $x_1 = a\cos(\varepsilon t)\cos(\omega_1 t)$, $x_2 = a\sin(\varepsilon t)\sin(\omega_1 t)$. Всюду $\omega_1^2 = k/m$, $\omega_2^2 = (2k_1 + k)/m$, $\varepsilon = k_1\omega_1/(2k)$.

Задача 1.26. Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц, связанных одинаковыми пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 1.18). Определить нормальные координаты, приводящие функцию Лагранжа к сумме квадратов.

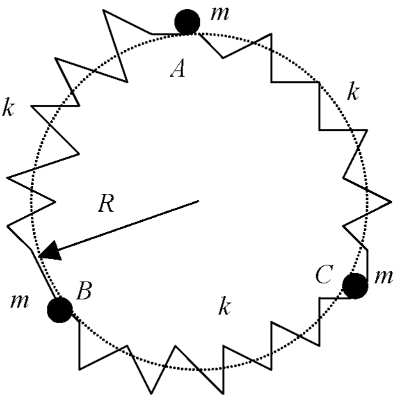


Рис. 1.18

Решение. Пусть x_i – смещение i-й частицы вдоль кольца. Функция Лагранжа системы

$$L = (m/2)(\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + \dot x_3^2) - (k/2)\,[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2].$$

Три частицы могут вращаться с постоянной угловой скоростью ω_0:

$$x_1 = x_2 = x_3 = C_1 t + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,q_1(t),\ \omega_1 = 0,\ C_1 = \omega_0 R,\ C_2 = 0. \qquad (1.52)$$

Колебания же частиц A и B навстречу друг другу с равной амплитудой

$$x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,q_2(t) = C_2\cos(\omega_2 t + C_4),\ x_3 = 0,\ \omega_2^2 = 3k/m \qquad (1.53)$$

происходят с той же частотой, что и колебания частиц B и C навстречу друг другу:

$$x_2 = -x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_3(t) = C_3\cos(\omega_3 t + C_6),\ x_1 = 0,\ \omega_3 = \omega_2. \qquad (1.54)$$

Введем «вектор смещения» $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Тогда колебания (1.52) – (1.54) можно представить в виде трех векторов (множители $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ введены для того, чтобы нормировать векторы $\mathbf{r}_i$ условием $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k = \delta_{ik} q_i^2$):

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1,\ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2,\ \mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3.$$

Нормальные координаты должны диагонализовать одновременно обе квадратичные формы – для кинетической и для потенциальной энергии. Поскольку в функции Лагранжа системы L кинетическая энергия пропорциональна сумме квадратов скоростей, то преобразование от x_i к нормальным координатам, не меняющее ее вида, должно быть ортогональным, а векторы нормальных колебаний взаимно ортогональными. Векторы $\mathbf{r}_i$ независимы, но не ортогональны друг другу: $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = 0$, но $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \neq 0$. Чтобы получить нормальные координаты, нужно ортогонализовать векторы $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Заметим, что суперпозиция колебаний $\alpha\mathbf{r}_2 + \beta\mathbf{r}_3$ есть по-прежнему колебание с частотой $\omega_2 = \omega_3$. Поэтому колебания

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}'_3 = \alpha\mathbf{r}_2 + \beta\mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} q_3,$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ найдены из условия $\mathbf{r}'_3\mathbf{r}'_2 = 0$ и условия нормировки $\mathbf{r}'_3$, являются нормальными колебаниями. Координаты q_i

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} q_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} q_3; \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} q_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} q_3; \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}} q_3 \end{cases}$$

приводят функцию Лагранжа к виду

$$L = (m/2)\,(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3^2 q_3^2).$$

Разумеется, любые координаты, полученные из q_2, q_3 ортогональным преобразованием, являются нормальными координатами (соответственно любые векторы, полученные из $\mathbf{r}'_2$, $\mathbf{r}'_3$ простым поворотом вокруг $\mathbf{r}_1$, являются векторами нормальных колебаний).

Задача 1.27. Найти нормальные колебания системы частиц, которые могут двигаться по кольцу (рис. 1.19).

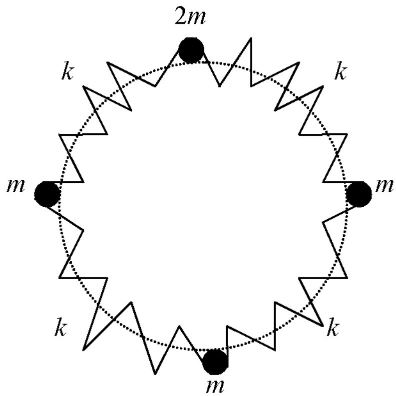


Рис. 1.19

Решение. Пусть x_i – смещение i-й частицы вдоль кольца. Два нормальных колебания легко угадываются: