№ 537

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей

Под редакцией Б.Г. Разумейко

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 517.2
П40

П40 *Плужникова Е.Л., Разумейко Б.Г.* Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учеб.-метод. пособие. /Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 2001. – 133 с.

Пособие содержит справочный материал по курсу "Дифференциальное исчисление функций одной переменной", варианты домашнего задания, типовые варианты контрольных работ и варианты тестов, предназначенных для проверки усвоения пройденного материала. Также в пособии подробно разобраны методы решения типовых задач домашнего задания.

Количество вариантов обеспечивает индивидуальное задание каждому студенту.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

1. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

1.2. Сложение дробей

При сложении дробей каждую из них следует привести к общему знаменателю:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

1.3. Решение простейших уравнений

1. Линейное.

Линейным уравнением называют уравнение вида:

$$ax + b = 0 \ (a \neq 0),$$

тогда $x = -\frac{b}{a}$ – *корень* этого уравнения.

2. Квадратное.

Квадратным уравнением называют уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0).$$

Для его решения находим дискриминант D по формуле:

$$D = b^2 - 4ac,$$

тогда

а) если $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, уравнение имеет два корня – x_1 и x_2;

б) если $D = 0$, то $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$, уравнение имеет один корень – x_1;

в) если $D < 0$, то корней нет.

3. $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0, \\ cx+b \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}, \\ x \neq -\dfrac{d}{c}. \end{cases}$

4. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0,$

где $P(x)$; $Q(x)$ – некоторые функции переменной x.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

5. $|x| = b$, тогда

– если $b > 0$, то $x_1 = -b$; $x_2 = b$;

– если $b = 0$, то $x_1 = 0$;

– если $b < 0$, то корней нет.

6. $x^{2n} = b$, где $n \in N$.

– если $b > 0$, то $x_1 = -\sqrt[2n]{b}$; $x_2 = \sqrt[2n]{b}$;

– если $b = 0$, то $x = 0$;

– если $b < 0$, то корней нет.

7. $x^{2n+1} = b$, где $n \in N \Leftrightarrow x = \sqrt[2n+1]{b}$ – корень уравнения.

8. $\sqrt[2n]{x} = b$, где $n \in N$, тогда

– если $b > 0$, то $x = b^{2n}$;

– если $b = 0$, то $x = 0$;

– если $b < 0$, то нет корней.

9. $\sqrt[2n+1]{x} = b$, где $n \in N \Leftrightarrow x = b^{2n+1}$ – корень уравнения.

10. $a^x = b$ $(a > 0;\ a \neq 1)$, тогда

– если $b > 0$, то $x = \log_a b$;

– если $b \leq 0$, то корней нет.

11. $\log_a x = b$ $(a > 0;\ a \neq 1)$,
тогда $x = a^b$ – корень уравнения.

1.4. Графики основных элементарных функций

1. *Линейная функция* – это функция вида:

$$y = ax + b,$$

графиком которой является прямая (рис. 1.1).

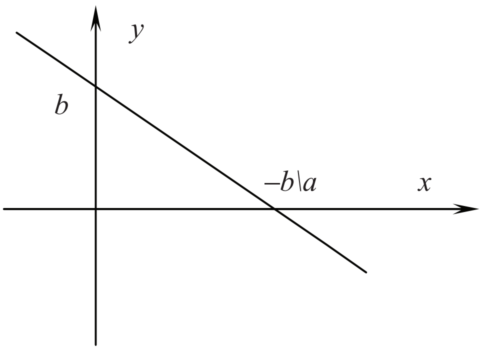


Рис. 1.1

График этой функции строят по двум точкам, как правило, точкам пересечения с осями:

x	0	$-b/a$
y	b	0

Если $x = b$, то график имеет вид (рис. 1.2).

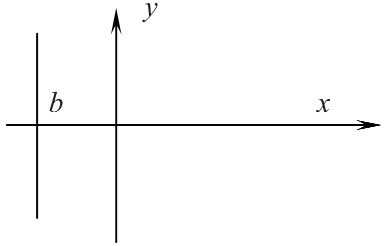


Рис. 1.2

Если $y = b$, то график имеет вид (рис. 1.3).

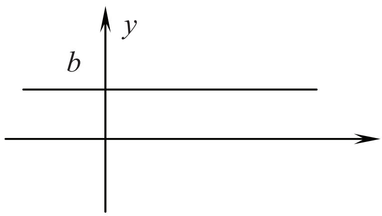


Рис. 1.3

2. *Квадратичная функция* – это функция вида:

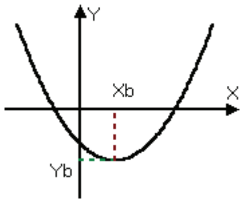
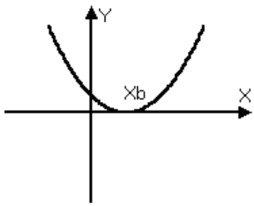
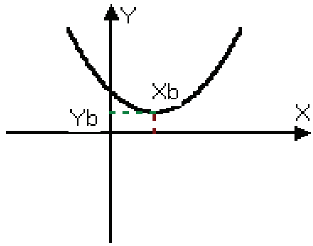
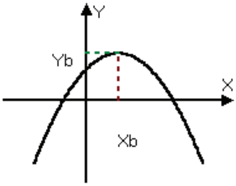
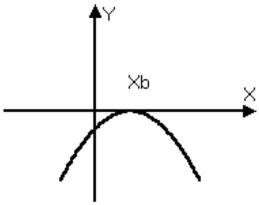
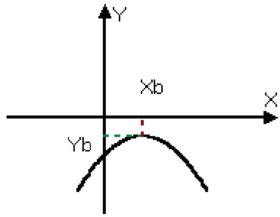
$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

графиком которой является парабола (см. таблицу).

Координаты вершины параболы (x_b, y_b) определяют по формулам:

$$x_b = -\frac{b}{2a}\,;\; y_b = y(x_b) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c.$$

Варианты графика квадратичной функции

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$		
		
$a < 0$		
		

3. Функция $y = |x|$.

Для построения графика раскрывают модуль:

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции имеет следующий вид (рис. 1.4):

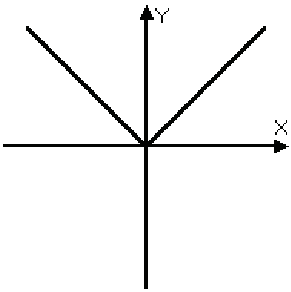


Рис. 1.4

4. *Степенная функция* – это функция вида:

1) $y = x^{2n}$, где $n \in N$,

область допустимых значений (О.Д.З.) этой функции: $x \in R$, график этой функции имеет вид (рис. 1.5);

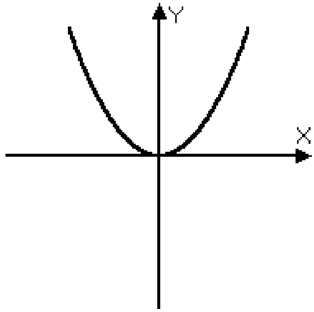


Рис. 1.5

2) $y = x^{2n+1}$, где $n \in N$,

О.Д.З.: $x \in R$, график функции имеет вид (рис. 1.6);

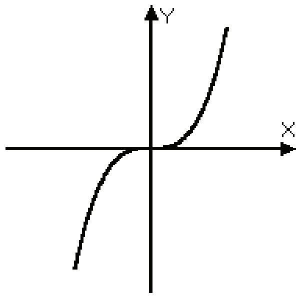


Рис. 1.6

3) $y = \sqrt[2n]{x}$, где $n \in N$,

О.Д.З.: $x \geq 0$, график функции имеет вид (рис. 1.7);

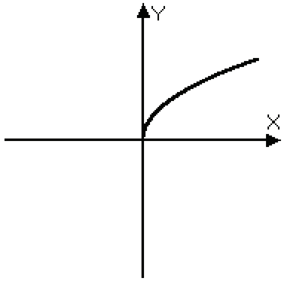


Рис. 1.7

4) $y = \sqrt[2n+1]{x}$, где $n \in N,$

О.Д.З.: $x \in R,$ график функции имеет вид (рис. 1.8).

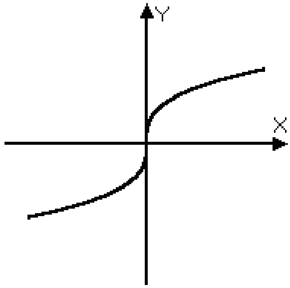


Рис. 1.8

5. *Обратная пропорциональность:*

1) $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$, где $n \in N,$

О.Д.З.: $x \neq 0$, график функции показан на рис. 1.9;

2) $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$, где $n \in N,$

О.Д.З.: $x \neq 0$, график функции показан на рис. 1.10.

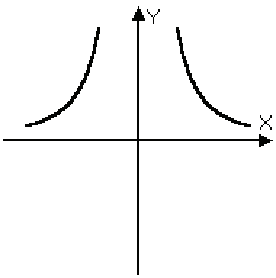


Рис. 1.9

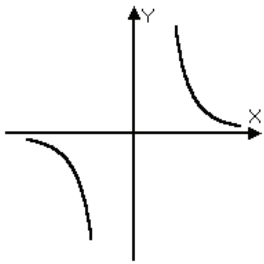


Рис. 1.10

6. *Показательная функция* – это функция вида

$$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 0).$$

О.Д.З.: $x \in R$.

График показательной функции имеет вид:

1) при $a > 1$ – (рис. 1.11); 2) при $0 < a < 1$ – (рис. 1.12).

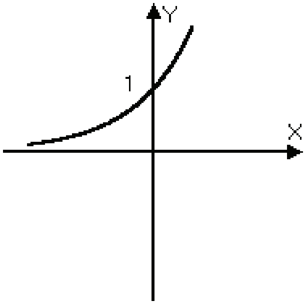


Рис. 1.11

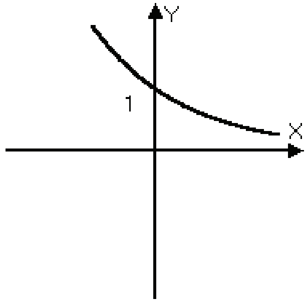


Рис. 1.12

7. *Логарифмическая функция* – это функция вида

$$y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

О.Д.З.: $x > 0$.

График логарифмической функции имеет вид:

а) при $a > 1$ – (рис. 1.13); б) при $0 < a < 1$ – (рис. 1.14).

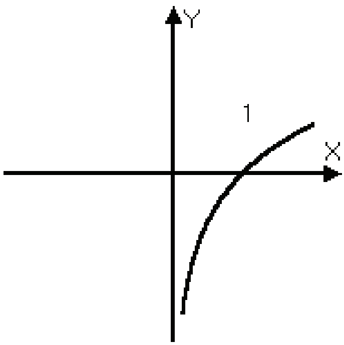


Рис. 1.13

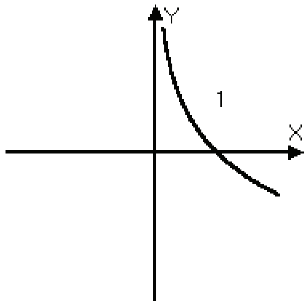


Рис. 1.14

8. *Тригонометрические функции.*

1) $y = \sin x$,
О.Д.З.: $x \in (-\infty, +\infty)$,
область значений функции: $y \in [-1, 1]$.
Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$, т.е.:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Функция нечетная, т.е. график ее симметричен относительно начала координат:

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Некоторые значения функции $y = \sin x$ приведены ниже:

x, рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0

График функции $y = \sin x$ показан на рис. 1.15.

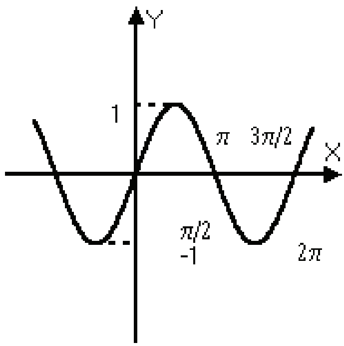


Рис. 1.15

2) $y = \cos x$.

О.Д.З.: $x \in (-\infty, +\infty)$,
область значений функции: $y \in [-1, 1]$.
Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$, т.е.:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Функция четная, т.е. график ее симметричен относительно оси OY:

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Некоторые значения функции $y = \cos x$ приведены ниже:

x, рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1

График функции $y = \cos x$ показан на рис. 1.16.

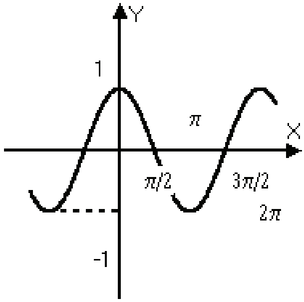


Рис. 1.16

3) $y = \mathrm{tg}\, x$.

О.Д.З.: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

область значений функции: $y \in (-\infty, +\infty)$.

Функция является периодической с периодом $T = \pi$, т.е.

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x.$$

Функция нечетная, т.е. график ее симметричен относительно начала координат.

Некоторые значения функции $y = \mathrm{tg}\, x$ приведены ниже:

x, рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	π
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	0

График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ показан на рис. 1.17.