№ 1657

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

И.Е. Гопенгауз

Высшая математика

Элементы функционального анализа

Курс лекций

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

№ 1657

И.Е. Гопенгауз

Высшая математика

Элементы функционального анализа

Курс лекций

УДК 517.98 (075.8)
Г66

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. *Б.Е. Гопенгауз*

Гопенгауз И.Е.
Г66 Высшая математика: Элементы функционального анализа. Курс лекций. – М.: МИСиС, 2007. – 121с.

Пособие написано в соответствии с программой курса "Функциональный анализ". В первой его части рассматриваются определения и примеры банаховых и гильбертовых пространств, свойства компактных множеств, вопросы аппроксимации в нормированных пространствах, сепарабельность и абстрактные ряды Фурье. Во второй части излагаются основы теории линейных непрерывных операторов. В заключение приводится доказательство спектральной теоремы Гильберта – Шмидта и дается ее применение к задаче Штурма – Лиувилля.

Данное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 230401 «Прикладная математика», а также для преподавателей, читающих лекции по функциональному анализу или ведущих практические занятия по этой дисциплине.

УДК 517.980(075.8)

Оглавление

1. Линейные нормированные пространства

1.1. Основные понятия

Определение 1.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Нормой в X называется числовая функция $\|\cdot\|$, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам нормы):

1а $\forall x \in X \ \|x\| \geq 0$ (неотрицательность);

1б $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$ (невырожденность);

2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (положительная однородность);

3) $\forall x, y \in X \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Определение 1.2. Линейное пространство вместе с определенной в нем нормой называется линейным нормированным пространством (ЛНП). (Для краткости вместо $(X, \|\cdot\|)$ мы будем писать просто X.)

Определение 1.3. Множество L называется подпространством ЛНП X, если L – это линейное подпространство X и в L используется та же норма, что и в X (точнее – ее сужение).

Определение 1.4. Преднормой в X называется числовая функция $p(\cdot)$, удовлетворяющая условиям 1а, 2 и 3 (условие 1б может и не выполняться).

Всякая норма является преднормой. Обратное утверждение не верно. Рассмотрим, например, функцию p, определенную в $\mathbb{R}^2$ следующим образом: для $x=(x_1;x_2)$ $p(x)=|x_1|$. Ясно, что функция p – преднорма, не являющаяся нормой, так как для элемента $x=(0;x_2)$ $p(x)=0$.

Упражнение 1.1. Пусть N – ядро преднормы p, определенной в линейном пространстве X, т.е. $N=\{x\in X \mid p(x)=0\}$. Доказать, что N – линейное подпространство пространства X.

Упражнение 1.2. Доказать, что

$$\forall x,y\in X \quad p(x-y)\geq |p(x)-p(y)|.$$

Решение. Так как $x=y+(x-y)$ и $y=x+(y-x)$, то неравенство треугольника дает $p(x)\leq p(y)+p(x-y)$ и $p(y)\leq p(x)+p(x-y)$. Следовательно,

$$-p(x-y)\leq p(x)-p(y)\leq p(x-y),$$

т.е. $|p(x)-p(y)|\leq p(x-y)$. Ч. и т.д.

Следствие. Функция $p(\cdot)$ – непрерывная функция из X в $\mathbb{R}_+$.

Определение 1.5. ЛНП называется ***строго нормированным***, если норма в нем кроме аксиом 1 – 3 удовлетворяет еще одной аксиоме:

4) равенство $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ для ненулевых векторов x,y возможно только в том случае, если существует такое $\lambda>0$, что $y=\lambda x$.

Определение 1.6. ***Расстоянием*** $d(x,y)$ между элементами x и $y \in X$ называется норма их разности, т.е.

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Определение 1.7. ***Шаром*** называется множество

$$B_r(a) = \{x \in X \mid \|x-a\| < r\};$$

сферой называется множество $S_r(a) = \{x \in X \mid \|x-a\| = r\}$.

Наконец, ***шар с границей*** − это объединение $\overline{B}_r(a) = B_r(a) \cup S_r(a)$.

Здесь a – центр и r − радиус шара (сферы).

Определение 1.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует элемент $a \in X$ такой, что

$$\|x_n - a\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Определение 1.9. Пусть $E \subset X$. Точка $x \in E$ называется внутренней точкой множества E, если существует $r > 0$ такое, что $B_r(x) \subset E$, т.е. x принадлежит E вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 1.10. Множество $G \subset X$ называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение 1.11. Точка x называется предельной точкой множества $E \subset X$, если $\forall r > 0$ $\dot{B}_r(x) \cap E \neq \varnothing$ (здесь $\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$ – проколотая окрестность).

Определение 1.12. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если F содержит все свои предельные точки.

Упражнение 1.3. Доказать, что:

1) $B_r(a)$ – открытое множество;

2) $\overline{B}_r(a)$ – замкнутое множество;

3) x является предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$;

4) объединение произвольного семейства открытых множеств – открытое множество;

5) пересечение произвольного семейства замкнутых множеств – замкнутое множество;

6) дополнение открытого множества замкнуто; дополнение замкнутого множества открыто.

1.2. Некоторые вспомогательные неравенства

Определение 1.13 Числа p и q называются сопряжёнными показателями, если $p,q>1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Легко видеть, что для таких значений p и q $(p-1)(q-1)=1$, кроме того, $q=\frac{p}{p-1}$, $p=\frac{q}{q-1}$.

Теорема 1. (неравенство Юнга). Если p и q – сопряжённые показатели, то

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad \forall a,b\ge 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y=x^{p-1},\ x\ge 0$ или, $x=y^{q-1},\ \mathrm{y}\ge 0$.

Площадь фигуры $G_1=\left\{(x,y)\mid\ 0\le x\le a;\ 0\le y\le x^{p-1}\right\}$ равна

$$S_1=S\left(G_1\right)=\int_0^a x^{p-1}dx=\frac{a^p}{p},$$

а площадь фигуры $G_2=\left\{(x,y)\mid\ 0\le y\le b;\ 0\le x\le y^{q-1}\right\}$ равна

$$S_2=S\left(G_2\right)=\int_0^b y^{q-1}dy=\frac{b^q}{q}.$$

Кроме того, ясно, что прямоугольник $\left\{(x,y)\mid\ 0\le x\le a;\ 0\le y\le b\right\}$ содержится в объединении фигур $G_1 \cup G_2$ (см. рис. 1.1), следовательно, $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Что и требовалось доказать.

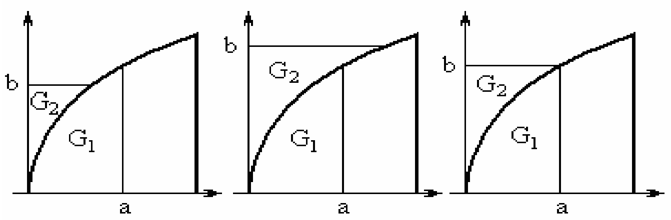

Рис. 1.1 К доказательству неравенства Юнга

Упражнение 1.4. Доказать, что неравенство Юнга обращается в равенство только в том случае, если $a^p = b^q$.

Теорема 1.1. (неравенство Гельдера*)*. Если p и q – сопряжённые показатели, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a_k, b_k \in \mathbb{C}$$

Доказательство. Пусть $A = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$. Если обозначить $a_k^0 = \frac{a_k}{A}$, $b_k^0 = \frac{b_k}{B}$, то, очевидно, будет $\sum_{k=1}^{n} |a_k^0|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k^0|^q = 1$. Согласно неравенству Юнга

$$|a_k^0| \cdot |b_k^0| \le \frac{|a_k^0|^p}{p} + \frac{|b_k^0|^q}{q}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Суммирование полученных неравенств дает

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^0 b_k^0| \le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |a_k^0|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |b_k^0|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Вспоминая определение a_k^0 и b_k^0, получим требуемое неравенство: $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le AB.$

Упражнение 1.5. Доказать, что неравенство Гельдера обращается в равенство, только если выполнены следующие условия**:** 1. при некотором значении $\lambda \ge 0$ будет $|a_k|^p = \lambda |b_k|^q, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$;

2. $\arg\left(a_k b_k\right)$ не зависит от k (например, если $\operatorname{sign}\left(a_k\right) = \operatorname{sign}\left(b_k\right), \forall k$).

Упражнение 1.6. Доказать, что неравенство Гельдера справедливо для бесконечных последовательностей. Это значит, что

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

если только ряды в правой части сходятся (p и q – сопряженные показатели).

Упражнение 1.7. Доказать неравенство Гельдера для интегралов в такой формулировке: если функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$, а p и q – сопряженные показатели, то

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b | f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b | g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Теорема 1.2. (неравенство Минковского*)*. При любом $p \ge 1$, натуральном n и произвольных значениях x_k, y_k

$$\left(\sum_{k=1}^n | x_k + y_k |^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^n | x_k |^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n | y_k |^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Так как $p = 1$ неравенство Минковского сразу следует из того, что$| x_k + y_k |\le| x_k |+| y_k |$, то можно сосредоточиться на случае $p > 1$.

Мы имеем

$$\sum_{k=1}^n | x_k + y_k |^p = \sum_{k=1}^n | x_k + y_k | \cdot | x_k + y_k |^{p-1} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^n | x_k \| x_k + y_k |^{p-1} + \sum_{k=1}^n | y_k \| x_k + y_k |^{p-1}.$$

Пусть $q = \dfrac{p}{p-1}$ – соряженный с p показатель. Тогда последнее выражение ввиду неравенства Гельдера не превосходит

$$\left(\sum_{k=1}^n | x_k |^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n | x_k + y_k |^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^n | y_k |^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n | x_k + y_k |^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$