

№ 1560

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет



Орлов М.И., Софиева В.Ф.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Разделы:

*линейная алгебра,
функции многих переменных,
дифференциальные уравнения, поверхности в трехмерном
пространстве*

Учебное пособие

№ 1560

Кафедра математики

Орлов М.И., Софиева В.Ф.

Одобрено
методическим
советом института

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Разделы:

*линейная алгебра,
функции многих переменных,
дифференциальные уравнения, поверхности в трехмерном
пространстве*

Учебное пособие

для студентов специальностей 2001.00, 2002.00
и направлений 5531.00, 5516.00, 5507.00

АННОТАЦИЯ

Учебное пособие поможет студентам второго курса познакомиться и освоить основные разделы высшей математики, а также основы специальных разделов, являющихся фундаментом математического аппарата математической и теоретической физики. Представленное пособие восполняет собой пробел в имеющейся учебно-методической литературе по указанным разделам математики и может оказаться полезным также и преподавателям математики, ведущим практические занятия в группах факультета ПМП.

Материал пособия соответствует программе, лекционному курсу, а также реальным временным затратам, необходимым для усвоения полученных на лекциях теоретических сведений, и для приобретения практических умений и навыков по специальным разделам курса «Высшая математика». В течение 25 практических занятий третьего семестра изучаются следующие 4 темы:

- 1) линейная алгебра и тензорная алгебра (15 часов);
- 2) функции многих переменных (11 часов);
- 3) дифференциальные уравнения (16 часов);
- 4) поверхности в трехмерном пространстве (9 часов).

© Московский государственный
институт стали и сплавов
(Технологический
университет) (МИСиС) 2000

СОДЕРЖАНИЕ

1. Линейная алгебра	5
1.1. Матрицы и определители	5
1.2. Линейная зависимость векторов	11
1.3. Системы линейных уравнений	12
1.4. Гиперплоскость в n -мерном пространстве. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений	15
1.5. Собственные значения и собственные векторы матрицы линейного преобразования	17
1.6. Квадратичные формы	19
1.7. Тензорная алгебра	21
2. Функции многих переменных	30
2.1. Предел и непрерывность	30
2.2. Частные производные 1-го и 2-го порядка. Дифференциалы	31
2.3. Производная по направлению. Градиент	35
2.4. Формула Тейлора для функций многих переменных	38
2.5. Экстремум функций многих переменных	39
2.6. Задача линейного программирования	43
3. Дифференциальные уравнения	48
3.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводимые к ним	48
3.2. Линейные уравнения первого порядка и приводимые к ним	50
3.3. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	52
3.4. Уравнения, неразрешенные относительно производной ...	55
3.5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка	57
3.6. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами	60
3.7. Особые точки дифференциальных уравнений	62

3.8. Системы дифференциальных уравнений первого порядка	64
4. Поверхности в трехмерном пространстве	70
4.1. Криволинейные координаты и первая основная квадратичная форма поверхности	70
4.2. Уравнения Гаусса и Вейнгартена поверхности в пространстве. Условия совместности Петерсона-Кодацци и теорема Эгрегиум Гаусса	74
4.3. Вторая основная квадратичная форма. Главные кривизны, гауссова и средняя кривизна поверхности. Линии кривизны	77
4.4. Дифференциальные свойства конкретных поверхностей ...	81
4.5. Геодезическая и нормальная кривизна кривой на поверхности. Геодезические линии поверхности	92

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и определители

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицей A называется упорядоченная таблица чисел

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элементы матрицы.

Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной*, в противном случае – *прямоугольной*.

Действия с матрицами

1. Суммой матриц A и B размеров $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ размера $m \times n$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i, j .
2. Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число α называется матрица $C = \alpha A$ размера $m \times n$ такая, что $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех i, j .
3. Произведением матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $n \times p$ называется матрица $C = AB$ размера $m \times p$ такая, что

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ для всех } i, j.$$

4. Матрица A^T размера $n \times m$ называется *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, если $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Задачи

1.1. Вычислить $A^T B - C$ и $B^T A + 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Вычислить $AB - BA$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3. Вычислить A^n , если

а) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определитель* квадратной матрицы A

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма $n!$ произведений $(-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$, каждое из которых соответствует одному из $n!$ упорядоченных множеств $k_1, k_2,$

..., k_n , полученных p транспозициями элементов множества $1, 2, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Минором* M k -го порядка матрицы A размером $n \times n$ называется определитель матрицы состоящей из элементов, стоящих на пересечении произвольных k столбцов и k строк матрицы A .

Соответствующим ему *алгебраическим дополнением* называется произведение минора M на $(-1)^s$, где s – сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор M , равная

$$s = i_1 + j_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k.$$

Например: M_{ik} – минор элемента a_{ik} , т. е. определитель матрицы, получаемой из исходной вычеркиванием i -ой строки и k -ого столбца, A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A , $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Пусть в определителе n -го порядка произвольно выбраны k строк, $k < n$. Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k -го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Определитель матрицы A можно вычислить с помощью рекуррентной формулы разложения по любой строке (столбцу).

При разложении по i -ой строке

$$D = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik},$$

т. е. определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Аналогично пишется разложение по j -му столбцу.

Свойства определителя

1. $D^T = D$.
2. При перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный.
3. При умножении всех элементов какой-либо строки на число определитель умножается на это число.
4. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на общий множитель.
5. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

6. $\det(AB) = \det A \det B$.

Задачи

1.4. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

двумя способами: разложением по строке и приведением к треугольному виду.

1.5. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,