№ 1560

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Орлов М.И., Софиева В.Ф.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Разделы:
линейная алгебра,
функции многих переменных,
дифференциальные уравнения, поверхности в трехмерном пространстве

Учебное пособие

МОСКВА, 2000

№ 1560

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра математики

Орлов М.И., Софиева В.Ф.

Одобрено
методическим
советом института

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Разделы:
линейная алгебра,
функции многих переменных,
дифференциальные уравнения, поверхности в трехмерном пространстве

Учебное пособие
для студентов специальностей 2001.00, 2002.00
и направлений 5531.00, 5516.00, 5507.00

МОСКВА, 2000

АННОТАЦИЯ

Учебное пособие поможет студентам второго курса познакомиться и освоить основные разделы высшей математики, а также основы специальных разделов, являющихся фундаментом математического аппарата математической и теоретической физики. Представленное пособие восполняет собой пробел в имеющейся учебно-методической литературе по указанным разделам математики и может оказаться полезным также и преподавателям математики, ведущим практические занятия в группах факультета ПМП.

Материал пособия соответствует программе, лекционному курсу, а также реальным временным затратам, необходимым для усвоения полученных на лекциях теоретических сведений, и для приобретения практических умений и навыков по специальным разделам курса «Высшая математика». В течение 25 практических занятий третьего семестра изучаются следующие 4 темы:

1) линейная алгебра и тензорная алгебра (15 часов);
2) функции многих переменных (11 часов);
3) дифференциальные уравнения (16 часов);
4) поверхности в трехмерном пространстве (9 часов).

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и определители

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрицей* A называется упорядоченная таблица чисел

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1...n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – *элементы матрицы.*

Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной*, в противном случае – *прямоугольной.*

Действия с матрицами

1. *Суммой* матриц A и B размеров $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ размера $m \times n$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i, j.
2. *Произведением матрицы* A размера $m \times n$ *на число* α называется матрица $C = \alpha A$ размера $m \times n$ такая, что $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех i, j.
3. *Произведением* матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $n \times p$ называется матрица $C=AB$ размера $m \times p$ такая, что $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ для всех i, j.
4. Матрица A^{T} размера $n \times m$ называется *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, если $a^{\mathrm{T}}_{ij} = a_{ji}$.

Задачи

1.1. Вычислить $A^{\mathrm{T}}B - C$ и $B^{\mathrm{T}}A + 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Вычислить $AB - BA$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3. Вычислить A^n, если

а) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определитель* квадратной матрицы A

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма $n!$ произведений $(-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$, каждое из которых соответствует одному из $n!$ упорядоченных множеств k_1, k_2,

..., k_n, полученных p транспозициями элементов множества 1, 2, …, n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Минором* M k-го порядка матрицы A Размером $n \times n$ называется определитель матрицы состоящей из элементов, стоящих на пересечении произвольных k столбцов и k строк матрицы A.

Соответствующим ему *алгебраическим дополнением* называется произведение минора M на $(-1)^s$, где s – сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор M, равная

$$s = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k.$$

Например: M_{ik} – минор элемента a_{ik}, т. е. определитель матрицы, получаемой из исходной вычеркиванием i-ой строки и k-ого столбца, A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Пусть в определителе n-го порядка произвольно выбраны k строк, $k < n$. Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Определитель матрицы A можно вычислить с помощью рекуррентной формулы разложения по любой строке (столбцу).

При разложении по i-ой строке

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} ,$$

т. е. определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Аналогично пишется разложение по j-му столбцу.

Свойст ва определит еля

1. $D^{\mathrm{T}} = D$.
2. При перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный.
3. При умножении всех элементов какой-либо строки на число определитель умножается на это число.
4. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на общий множитель.
5. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \,.$$

6. $\det(AB) = \det A \det B$.

Задачи

1.4. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ двумя способами: разложением по строке и приведением к треугольному виду.

1.5. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,