№ 1522

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра высшей математики

Кашапов И.А., Кашапова Р.Ф., Орлов М.И., Софиева В.Ф.

Одобрено
методическим
советом института

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИА

Разделы: *кратные интегралы, векторный анализ, ряды, элементы комплексного анализа*

Учебное пособие
для практических занятий студентов специальностей 200100 и 200200 и направлений 553100, 551600, 550700

МОСКВА, 1999

АННОТАЦИЯ

Настоящее издание представляет собой сборник задач по курсу «Высшая математика» для студентов второго курса факультета ПМП. Эти задачи предназначены для разбора практических занятий в третьем семестре, а также для самостоятельного решения.

Методическое пособие поможет студентам второго курса познакомиться и освоить основы специальных разделов высшей математики, являющихся фундаментом математического аппарата математической и теоретической физики. Представленное пособие восполняет собой пробел в имеющейся учебно-методической и теоретической литературе по указанным разделам математики и может оказаться полезным также и преподавателям математики, ведущим практические занятия в группах факультета ПМП.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал данного пособия соответствует программе, лекционному курсу, а также реальным временным затратам, необходимым для усвоения полученных на лекциях теоретических сведений, и для приобретения практических умений и навыков по специальным разделам курса «Высшая математика»: кратные интегралы, векторный анализ, числовые и функциональные ряды, элементы комплексного анализа, операционное исчисление, ряды Фурье.

В течение 24 практических занятий третьего семестра изучаются следующие 4 темы:

1) кратные интегралы и векторный анализ /16 часов/;
2) числовые и функциональные ряды /8 часов/;
3) элементы комплексного анализа /24 часа/;
4) ряды Фурье /4 часа/.

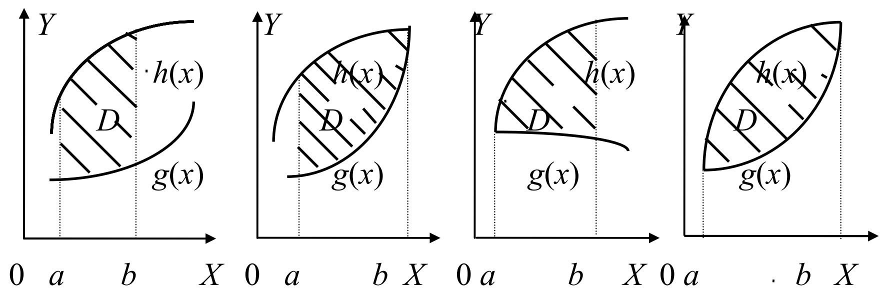
Предложенные для решения задачи сгруппированы по темам практических занятий, систематизированы внутри тем и снабжены примерами решения типовых стандартных задач, указаниями к их решению и необходимыми теоретическими сведениями.

1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.1. Вычисление интеграла в декартовых координатах

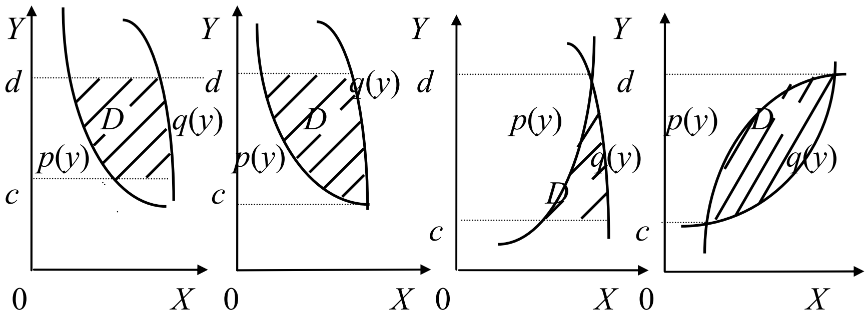
Определение 1. Плоская фигура D называется элементарной относительно оси OX, если она ограничена снизу и сверху графиками непрерывных функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, а слева и справа отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.



Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ вычисляется как повторный:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx .$$

Определение 2. Плоская фигура D называется элементарной относительно оси OY, если она ограничена слева и справа графиками непрерывных функций $x = p(y)$ и $x = q(y)$, а снизу и сверху отрезками прямых $y = c$ и $y = d$.



Тогда двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ вычисляется как повторный

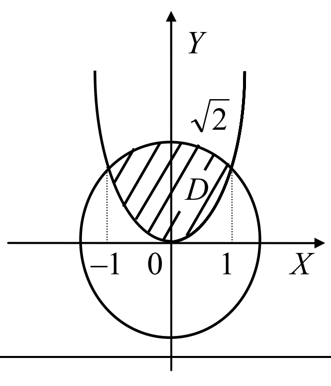
$$\int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{p(y)}^{q(y)} f\big(x,y\big)dx\right)dy\,.$$

Пример 1.1

Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D} x^2 ydxdy$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 2$ и $y = x^2$ $(y \geq x^2)$.

Решение.

1 способ.



Линии пересекаются в точках (1; 1) и (–1; 1). Линия $x^2 + y^2 = 2$ îãðàíè÷èâàåò круг. Парабола $y = x^2$ делит его на две части. Неравенство $y \geq x^2$ уточняет, что область D – верхняя часть круга. Область D ýëåìåíòàðна относительно оси OX: $x \in [-1;1]$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

Тогда

$$\iint\limits_D x^2 y dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \left. \frac{x^2 y^2}{2} \right|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx = .$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} \left(\left(2 - x^2 \right) - x^4 \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{34}{105}$$

<u>2 способ.</u>

Область D элементарна и относительно оси OY: $y \in \left[0, \sqrt{2} \right]$,

$$q(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{2 - y^2}, & 0 \le y \le \sqrt{2} \end{cases}, \; p(y) = -q(y).$$

Тогда

$$\iint\limits_D x^2 y dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} x^2 y dx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\left. \frac{x^3 y}{3} \right|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\left. \frac{x^3 y}{3} \right|_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} y \left(2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} dy = \left. \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right|_0^1 - \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \left(2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} d\left(2 - y^2 \right) =$$

$$= \frac{4}{21} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \left. \left(2 - y^2 \right)^{\frac{5}{2}} \right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{21} + \frac{2}{15} = \frac{34}{105}.$$

Задачи

1.1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$ двумя способами, если

а) область D – прямоугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2,1)$, $C(0, 1)$;
б) область D – треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$;
в) область D – трапеция с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$;

г) область D – параллелограмм с вершинами $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(2, 7)$, $F(1, 5)$;

д) область D – круг с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом $R = 1$;

е) область D – круговой сектор OAB с центром в точке $O(0, 0)$, у которого концы дуги AB находятся в точках $A(1, 1)$ и $B(-1, 1)$;

ж) область D – круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $r = 1$ и $R = 2$ с общим центром $O(0, 0)$;

з) область D ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и окружностью $y^2 - x^2 = 9$ $\left(y^2 - x^2\right) \le 1$.

1.2. Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f\left(x, y\right) dy$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f\left(x, y\right) dy$; в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$;

г) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$; д) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0)$.

1.3. Вычислить следующие двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D x dx dy$, где область D – треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 1)$;

б) $\iint\limits_D x dx dy$, где область D ограничена прямой, проходящей через точки $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, и меньшей дугой окружности радиуса 1 с центром в точке $C(0, 1)$, отсекаемой этой прямой;

в) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, где область D – криволинейный треугольник, ограниченный параболой $y^2 = x$ и прямыми $x = 0$ и $y = 1$;

г) $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где область D – параболический сегмент, ограниченный

параболой $y=\frac{x^2}{2}$ и прямой $y = -x$;

1.1.2. Замена переменных в двойном интеграле

Перейдем в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от переменных x, y к переменным u, v.

Пусть функции $x = g(u, v)$ è $y = h(u, v)$ îñóùåñòâëÿþò âçàèìíî îäíîçíà÷íîå непрерывно дифференцируемое отображение области D на область D_1. Якобиан перехода –

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f\big(g(u,v),\, h(u,v)\big)|J|dudv\,. \qquad (1.1)$$

Формулы перехода от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (r, φ):

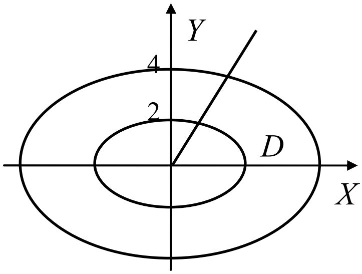
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

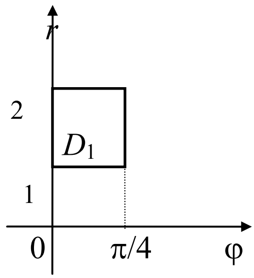
В этом случае якобиан перехода $J = r$.

Пример 1.2

Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{4x^2+9y^2}\,dxdy$, где область D задана неравенствами $1 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 4, \quad y \le \dfrac{2}{3}x, \quad y \ge 0$.

Решение.





Перейдем к новым координатам (r, φ): $\begin{cases} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда прямая $y = \dfrac{2}{3}x$ имеет уравнение $\sin\varphi = \cos\varphi$, $\mathrm{tg}\varphi = 1$, а уравнения эллипсов имеют вид $r = 1$ и $r = 2$.

Якобиан перехода $J = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3r\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r$.

$$\iint\limits_D \sqrt{4x^2 + 9y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \sqrt{36r^2}\,6r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{D_1} 36r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^2 36r^2\,dr = \int\limits_0^{\pi/4} 12r^3\Big|_1^2\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} 12\cdot 7\,d\varphi = 21\pi.$$

Пример 1.3

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$\gamma_1\text{: } (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \text{ и } \gamma_2\text{: } x^2 + y^2 = 2x.$$

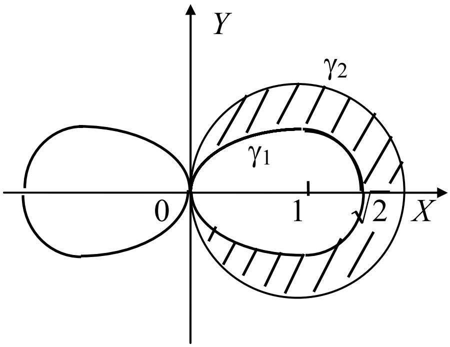
Решение.

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Уравнение кривой γ_1: $r^4 = 2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = \sqrt{2\cos\varphi}$

Уравнение кривой γ_2: $r^2 = 2r\cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$ – окружность.



Искомая площадь равна $S = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D_1} r dr\, d\varphi =$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2\cos 2\varphi}}^{2\cos\varphi} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{2\cos 2\varphi}}^{2\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\cos^2\varphi - 2\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 2\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\varphi = \pi$$

Задачи

1.4. Переходя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

а) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D ограничена окружностью

$x^2+y^2=2ax\ (a>0)$;

б) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – нижний полукруг радиуса a с центром в начале координат;

в) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – область, ограниченная лепестком лемнискаты $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), x \ge 0, a > 0$.

1.5. Найти площадь плоской фигуры D, если D ограничена:

а) параболами $y^2 = 10x + 25$ и $y^2 = -6x + 9$;

б) кривыми $r = a(1 + \cos\varphi)$ и $r = a\cos\varphi\ (a > 0)$;

в) кривой $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$;

г) эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

д) эллипсом $\left(x - 2y + 3\right)^2 + \left(3x + 4y - 1\right)^2 = 1$.

1.6. Найти центр масс однородной пластинки $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1, y \ge 0$ плотностью $\rho \equiv 1$.

1.7. Переходя в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2 + y^2\right)} dxdy$ к полярным координатам, доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

1.1.3. Формула Грина

Пусть D – ограниченная область на плоскости. Ее граница $\Gamma = \Gamma(D)$ – конечное число кусочно-гладких кривых.