№ 1666

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2001

№1666

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
для студентов всех специальностей

Под редакцией Б.Г. Разумейко

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института в качестве учебного пособия

МОСКВА 2001

УДК 514.12+516.64
П40

Плужникова Е.Л., Разумейко Б.Г. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб.-метод. пособие. /Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 2001. – 226 с.

Содержит справочный материал по курсу «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», решение типовых задач по этому курсу, варианты домашнего задания, типовые варианты контрольных работ и варианты тестов, предназначенных для проверки усвоения пройденного материала.

Подробно разобраны методы решения типовых задач домашнего задания.

Предназначено для студентов всех специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В *первой части* пособия приведены основные формулы и понятия аналитической геометрии и линейной алгебры, а также разобрано большое количество типовых задач по этим темам.

Вторая часть пособия содержит условия домашнего задания по курсу аналитической геометрии и линейной алгебры. Также во второй части подробно рассмотрен образец решений домашнего задания. Большинство расчетов домашнего задания требует применения микрокалькуляторов.

Третья часть содержит типовые варианты контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса.

Отчет о выполнении домашнего задания должен содержать

1. Стандартный титульный лист.
2. Формулировку решаемой задачи.
3. Подробное решение со всеми промежуточными выкладками.

Некоторые стандартные обозначения, которые встречаются в работе:

$\Rightarrow$ – следует

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда

$\forall$ – любой

$\exists$ – существует

=| |= комментарии к проводимым действиям.

1. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Аналитическая геометрия

1.1.1. Векторы

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление (рис. 1.1). О любом отрезке $\overline{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет собой вектор $\overline{a}$, и получен приложением вектора $\overline{a}$ к точке A.

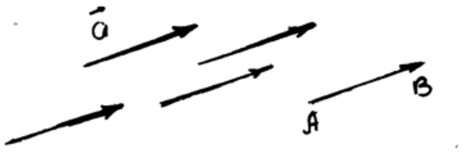

Рис. 1.1

$\overline{O}$ – нулевой вектор, т. е. вектор, длина которого равна 0.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой (*сонаправленными*, если их направления совпадают; *противоположнонаправленными*, если их направления противоположны).

Три вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

$|\overline{a}|$ – длина вектора $\overline{a}$.

Действия с векторами

1. Сумма векторов.

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которые приложены к одной точке. *Суммой* этих *векторов* $\overline{a} + \overline{b}$ называется вектор (рис. 1.2), идущий по диагонали параллелограмма из их общего начала (используем правило параллелограмма):

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}.$$

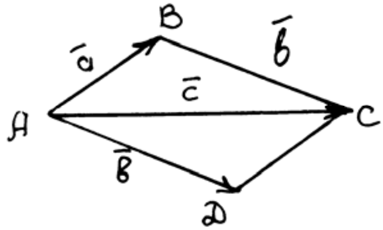

Рис. 1.2

Замечания

1. Сложить два вектора также можно по правилу треугольника (см. рис. 1.2). Если начало вектора $\overline{b}$ приложено к концу вектора $\overline{a}$, то сумма векторов $\overline{a} + \overline{b}$ – есть вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго. Результат при этом не изменится, так как $\overline{BC} = \overline{AD}$):

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}.$$

2. Чтобы построить сумму векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$, нужно к концу вектора $\overline{a_1}$ приложить вектор $\overline{a_2}$, затем к концу вектора $\overline{a_2}$ приложить вектор $\overline{a_3}$, и т.д., пока не дойдем до вектора $\overline{a_n}$. Тогда суммой векторов $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_n}$ будет вектор, соединяющий начало первого вектора $\overline{a_1}$ с концом последнего $\overline{a_n}$ (рис. 1.3):

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_n} = \overline{A_1 A_{n+1}}.$$

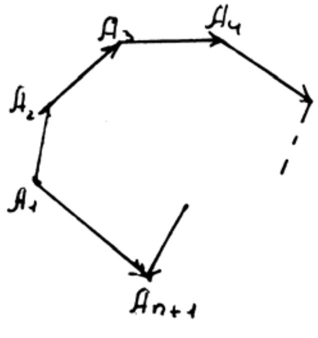

Рис. 1.3

2. Разность векторов.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приложены к одной точке, то *разность этих векторов* $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ – это вектор, соединяющий конец второго вектора с началом первого (рис. 1.4):

$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}\,.$$

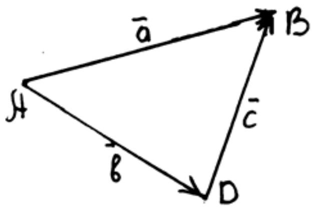

Рис. 1.4

3. Произведение вектора на число.

Произведением вектора $\overline{a}$ на *число* α называется вектор $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, такой что:

1) $|\overline{b}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$ (сонаправлены), если $\alpha > 0$;
$\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ (противоположнонаправлены), если $\alpha < 0$;
$\overline{b} = 0$, если $\alpha=0$.

Проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$

Проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется число, определяемое по формуле:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})\,.$$

Проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ может быть отрицательной, если угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ тупой.

Координаты вектора

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат (рис. 1.5). $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – ортонормированный базис в пространстве R^3; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – взаимоперпендикулярные векторы единичной длины.

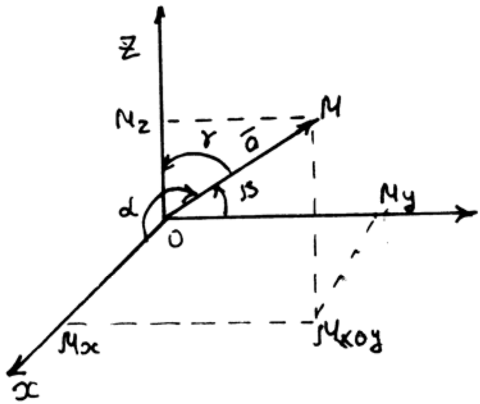

Рис. 1.5

Пусть x – проекция вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на ось OX, т. е. $x = |OM_x|$;

y – проекция вектора $\bar{a}$ на ось OY, т. е. $y = |OM_y|$;

z – проекция вектора $\bar{a}$ на ось OZ, т. е. $z = |OM_z|$.

Тогда разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где (x, y, z) – координаты вектора $\bar{a}$, равные

$$x = |\bar{a}|\cos\alpha;\ b = |\bar{a}|\cos\beta;\ c = |\bar{a}|\cos\gamma,$$

здесь α – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OX;

β – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OY;

γ – угол между вектором $\bar{a}$ и осью OZ.

Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ можно вычислить по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|},$$

где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Для нахождения длины вектора $\bar{a}$ используется формула:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в пространстве заданы 2 точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) -$$

координаты вектора AB.

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда координаты вектора $\bar{c}$, являющегося суммой $\bar{a}$ и $\bar{b}$, находят по формуле:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

координаты вектора $\bar{d}$, являющегося разностью $\bar{a}$ и $\bar{b}$, –

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{d} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);$$

координаты вектора $\bar{q}$, являющегося произведением вектора $\bar{a}$ на число α –

$$\alpha\bar{a} = \overline{q} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Условие коллинеарности векторов:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Два вектора совпадают, т. е. $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется число, равное

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}).$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0$;

2) $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$;

3) $(\alpha\overline{a},\overline{b}) = \alpha(\overline{a},\overline{b}), \forall\alpha \in R$;

4) $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c})$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\overline{a}\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overline{b}\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то скалярное произведение находится по формуле:

$$(\overline{a}\,,\overline{b}\,) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

а угол $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)$ между этими векторами –

$$\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right) = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, если выполняется условие:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пример 1.1.1. Даны три вектора $\overline{a}\,(1, 0, –1)$ $\overline{b}\,(–1, 2, 1)$ $\overline{c}\,(0, 3, 4)$.

Найти: а) $(\overline{a}-\overline{c}\,,\overline{b}\,)$;

б) $\text{пр}_{\overline{b}}(2\overline{a}+3\overline{c})$.

Решение

а) Найдем координаты вектора $\overline{a}-\overline{c}$:

$\overline{a}-\overline{c}$ = (1 – 0, 0 – 3, –1 – 4) = (1, –3, –5).

Координаты вектора $\overline{b}$: $\overline{b}\,(–1, 2, 1)$.

Тогда $(\overline{a}-\overline{c}\,,\overline{b}\,)$ = 1(–1) + (–3)2 + (–5)1 = –1 – 6 – 5 = **–12**.

б) Найдем координаты вектора $2\overline{a}+3\overline{c}$:

$2\overline{a} = (2, 0, -2)$;

$3\overline{c} = (0, 9, 12)$;

$2\overline{a}+3\overline{c} = (2 + 0, 0 + 9, -2 + 12) = (2, 9, 10)$.

Вычислим проекцию:

$$\text{пр}_{\overline{b}}(2\overline{a}+3\overline{c}) = \left|2\overline{a}+3\overline{c}\right|\cos(2\overline{a}+3\overline{c},\overline{b}) =$$

$$= \left|2\overline{a}+3\overline{c}\right|\frac{(2\overline{a}+3\overline{c},\overline{b})}{\left|2\overline{a}+3\overline{c}\right|\left|\overline{b}\right|} = \frac{(2\overline{a}+3\overline{c},\overline{b})}{\left|\overline{b}\right|};$$

$$(2\overline{a}+3\overline{c},\overline{b}) = 2(-1)+9\cdot 2+10\cdot 1 = -2+18+10 = 26;$$

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6};$$

$$\text{пр}_{\overline{b}}(2\overline{a}+3\overline{c}) = \frac{26}{\sqrt{6}} = \frac{\mathbf{13\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}.$$

Пример 1.1.2. Дано: $\left|\overline{a}\right|=1$ $\left|\overline{b}\right|=2$; $\angle\overline{a},\overline{b} = \dfrac{\pi}{4}$.

Найти: а) $(\overline{a}-\overline{b}, 2\overline{a}+\overline{b})$;

б) $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$;

в) $\text{пр}_{\overline{b}}(\overline{a}-\overline{b})$.

Решение

а) Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$(\overline{a}-\overline{b},2\overline{a}+\overline{b}) = (\overline{a},2\overline{a}+\overline{b}) - (\overline{b},2\overline{a}+\overline{b}) =$$

$$= 2(\overline{a},\overline{a}) + (\overline{a},\overline{b}) - 2(\overline{b},\overline{a}) - (\overline{b},\overline{b}) =$$

$$= 2\left|a\right|^2 - (\overline{a},\overline{b}) - \left|\overline{b}\right|^2 = 2\cdot 1 - \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) - (2)^2 =$$

$$= 2 - 2\cos\frac{\pi}{4} - 4 = -2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{-2-\sqrt{2}}.$$

б) $\left|\overline{a}-\overline{b}\right| = \sqrt{(\overline{a}-\overline{b},\overline{a}-\overline{b})} = \sqrt{(\overline{a},\overline{a}) - 2(\overline{a},\overline{b}) + (\overline{b},\overline{b})} =$

$$= \sqrt{\left|\overline{a}\right|^2 - 2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) + \left|b\right|^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 4} = \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}.$$

в) $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a} - \bar{b}) = \left|\bar{a} - \bar{b}\right| \cos(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b}) =$

$$= \left|\bar{a} - \bar{b}\right| \frac{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b})}{\left|\bar{a} - \bar{b}\right|\left|\bar{b}\right|} = \frac{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{b})}{\left|\bar{b}\right|} = \frac{(\bar{a}, \bar{b}) - (\bar{b}, \bar{b})}{2} =$$

$$= \frac{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right| \cos\frac{\pi}{4} - \left|\bar{b}\right|^2}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{2} - 4}{2}}.$$

Определители 2-го и 3-го порядка

Квадратная таблица, состоящая из четырех чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей 2-го порядка*, $a_{ij}\ (i, j = 1,2)$ – ее элементами, где i – номер строки, j – номер столбца.

Определителем 2-го порядка, соответствующим квадратной матрице A, называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1.1.3. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2(-1) = 3 + 2 = \mathbf{5}.$$

Матрицей 3-го порядка называется квадратная таблица, состоящая из 9 элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Ее элементы – a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), где i – номер строки, j – номер столбца.

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице A, называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Поясним схематически нахождение определителя. Берем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, к нему прибавляем произведение элементов, лежащих на параллели выше этой диагонали и элемента из противоположного угла, а затем вычитаем три слагаемых, которые строятся таким же образом, но относительно побочной диагонали (рис. 1.6).

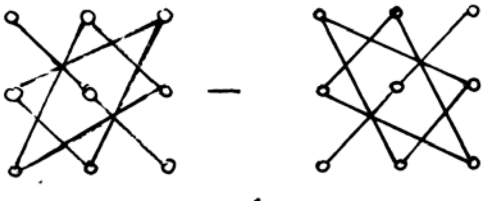

Рис. 1.6.

Пример 1.1.4. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Решение

$$\det A = 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 -$$
$$- 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 6 + 1 + 24 + 18 - 4 + 2 = \mathbf{47}.$$

Также определитель 3-го порядка можно вычислить при помощи разложения по какой-нибудь строке или столбцу, например по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-4) + (2+1) + 3(8+6) = 2 + 3 + 42 = \mathbf{47}.$$

Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора переход от первого ко второму осуществляется против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов – *левая*.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то такая тройка не относится ни к правым тройкам, ни к левым.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{c}$, такой что:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка.

Если хотя бы один из векторов равен $\bar{0}$, то векторное произведение по определению равно $\bar{0}$.

Свойства векторного произведения

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.
2. $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$.
3. $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$.

4. $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \left[\bar{a}, \bar{b}\right] = 0$.

5. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна длине вектора векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S = \left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right|.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение находят по формуле:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\bar{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar{k}.$$

Пример 1.1.5. Даны три вектора $\bar{a}$ (1, 0, –1); $\bar{b}$ (–1, 2,1); $\bar{c}$ (0, 3, 4).
Найти: а) [3 $\bar{a}$, $\bar{b} - \bar{c}$];
б) |[3 $\bar{a}$, $\bar{b} - \bar{c}$]|.

Решение

а) 3 $\bar{a}$ = (3, 0, –3);
$\bar{b} - \bar{c}$ = (–1 – 0, 2 – 3, 1 – 4) = (–1, –1, –3)

$$\left[3\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(0 \cdot (-3) - (-3)(-1)) - \bar{j}(3 \cdot (-3) - (-3)(-1)) +$$

$$+ \bar{k}(3 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)) = \mathbf{-3\bar{i} + 12\bar{j} - 3\bar{k}}.$$

б) $\left|\left[3\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}\right]\right| = \sqrt{(-3)^2 + (12)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 144 + 9} = \sqrt{\mathbf{162}}$.

Пример 1.1.6. Дано: $|\bar{a}|$=1, $|\bar{b}|$=2, $\angle \bar{a}, \bar{b} = \dfrac{\pi}{4}$.

Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} + \bar{b}$ и $2\bar{a} - 4\bar{b}$.

Решение

Пусть $\overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}$;

$$\overline{BC} = 3\overline{a} - 4\overline{b}.$$

Тогда площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a} + \overline{b},\, 3\overline{a} - 4\overline{b}\right]\right| = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{свойствами}\\ \text{векторного}\\ \text{произведения}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a}, 3\overline{a}\right] + \left[\overline{b}, 3\overline{a}\right] - \left[\overline{a}, 4\overline{b}\right] - \left[\overline{b}, 4\overline{b}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|3\left[\overline{a}, \overline{a}\right] + 3\left[\overline{b}, \overline{a}\right] - 4\left[\overline{a}, \overline{b}\right] - 4\left[\overline{b}, \overline{b}\right]\right| = \left|\begin{array}{l}\text{так как } [\overline{a}, \overline{a}] = 0 \text{ и}\\ [\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-3\left[\overline{a}, \overline{b}\right] - 4\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|-7\left[a, b\right]\right| = \frac{7}{2}\left|\left[a, b\right]\right| =$$

$$= \frac{7}{2}\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \mathbf{7} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число $([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$.

Геометрические свойства смешанного произведения

1. $([\overline{c}, \overline{b}], \overline{c}) = \begin{cases} V, \text{ если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - \text{правая тройка},\\ -V, \text{ если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - \text{левая тройка},\end{cases}$

где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

2. Три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \left([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}\right) = 0$.

Основное свойство смешанного произведения:

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = ([\overline{b}, \overline{c}], \overline{a}) = ([\overline{c}, \overline{a}], \overline{b}) =$$
$$= -([\overline{b}, \overline{a}], \overline{c}) = -([\overline{a}, \overline{c}], \overline{b}) = -([\overline{c}, \overline{b}], \overline{a}).$$

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы своими координатами $\overline{a}(x_1, y_1, z_1), \overline{b}(x_2, y_2, z_2), \overline{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение может быть найдено по формуле:

$$\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Принято обозначать $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c})$.

Пример 1.1.7. 1) Установить, образуют ли приведенные ниже векторы в пространстве R^3 базис:

а) $\overline{a}$ (1, 2, 3); $\overline{b}$ (–1, 0, 2); $\overline{c}$ (–1, 3, 2);

б) $\overline{a}$ (2, 1, 1); $\overline{b}$ (5, 3, 5); $\overline{c}$ (7, 4, 6).

Решение

а) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют в R^3 базис тогда и только тогда, когда они некомпланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение не равно 0.

$$(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-9+4(-1)-6+4=-15\neq 0\Rightarrow \text{векторы}$$

не компланарны $\Rightarrow$ они образуют базис в R^3.

б) Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=2(18-20)-(30-35)+(20-21)=-4+5-1=0.$$

$\Rightarrow$ векторы компланарны $\Rightarrow$ они не образуют базис R^3.

Пример 1.1.8. Вычислить объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{a}$ (3, 4, 0), $\overline{b}$ (0, –3, 1), $\overline{c}$ (0, 2, 5).

Решение

$V_{\text{тетр}}=\dfrac{1}{6}V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, равен модулю их смешанного произведения:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(-15-2) = -51;$$

$$V = \left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right| = 51.$$

Объем тетраэдра $V_{\text{тетр}} = \dfrac{1}{6}V$, вычислим его:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}51 = \mathbf{\frac{17}{2}}.$$

1.1.2. Прямая на плоскости

Виды уравнений прямой на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана одним из следующих ниже уравнений.

1. Прямая на плоскости однозначно задается точкой и вектором, перпендикулярным к этой прямой. Такой вектор называется *нормальным* вектором (рис. 1.7).

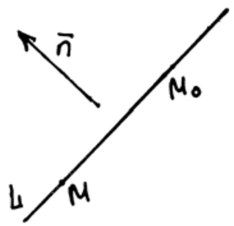

Рис. 1.7

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка, лежащая на прямой L; $\overline{n}\,(A, B)$ – нормальный вектор прямой L. Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на этой прямой, вектор $\overline{M_0M}\,(x - x_0,\ y - y_0)$ будет перпендикулярен вектору $\overline{n}$, а значит их скалярное произведение равно 0:

$$\overline{M_0M} \perp \overline{n} \Rightarrow (\overline{M_0M}\,; \overline{n}) = 0;$$

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} -$$

получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A, B)$.

2. Выведем из полученного выше уравнения общее уравнение прямой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим $(-Ax_0 - By_0) = C$, тогда получаем

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0} -$$

общее уравнение прямой на плоскости.

3. Прямая на плоскости так же однозначно задается точкой и вектором, параллельным этой прямой. Такой вектор называется *направляющим* (рис. 1.8).

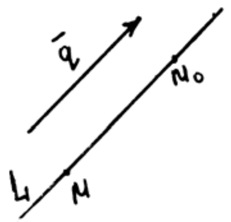

Рис. 1.8

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка, лежащая на прямой L; $\overline{q}\,(l, m)$ – направляющий вектор этой прямой. Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на этой прямой, вектор $\overline{M_0M}\,(x - x_0, y - y_0)$ будет коллинеарен вектору $\overline{q}\,(l, m)$; следовательно, координаты вектора $\overline{M_0M}$ будут пропорциональны координатам вектора $\overline{q}$:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}} -$$

получили каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\overline{q}\ (l, m)$.

4. Получим из канонического уравнения прямой параметрическое уравнение, введя параметр t:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t}\ ;$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases}} -$$

параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overline{q}\ (l, m)$.

5. Если $C \neq 0$, то можно из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ получить уравнение прямой в отрезках. Разделим общее уравнение $Ax + By = -C$ на $(-C)$:

$$-\frac{A}{C}x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1\ .$$

Обозначим: $-\dfrac{C}{A} = a; -\dfrac{C}{B} = b$, тогда

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \ -$$

уравнение прямой в отрезках, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой от координатных осей (рис. 1.9).

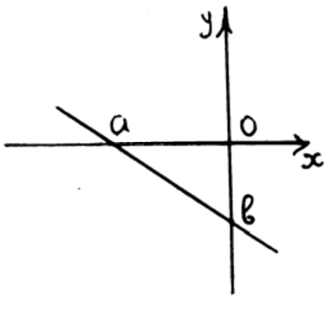

Рис. 1.9

6. Если $B \neq 0$, то можно получить уравнение прямой с угловым коэффициентом. Из общего уравнения $Ax + By + C = 0$ выразим y через x:

$$By = -Ax - C;$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$, тогда

$$\boldsymbol{y = kx + b} \text{ –}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом,
где k – угловой коэффициент прямой, или тангенс угла между прямой и осью OX, $k = \mathrm{tg}\alpha$;
b – ордината точки пересечения прямой с осью OY (рис. 1.10).

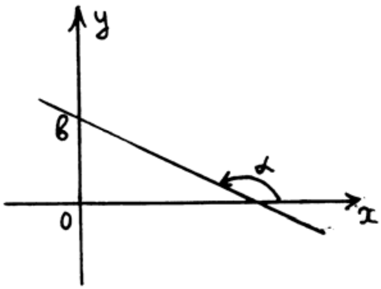

Рис. 1.10

7. Найдем уравнение прямой L, проходящей через 2 точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости. Тогда $\overline{q} = \overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ – направляющий вектор этой прямой, а точка $A(x_1, y_1) \in L$.

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на прямой L, векторы $\overline{AM}$ и $\overline{q}$ должны быть коллинеарны, а значит, их координаты должны быть пропорциональны (рис. 1.11):

$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \text{ –}$$