

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В СРЕДЕ MS EXCEL

Уникальная подборка
прикладных задач
оптимизации всех классов

Примеры практического
решения типовых задач
в среде MS Excel

Оригинальные схемы
популярных алгоритмов
в нотации языка UML

Авторские решения
по графическому
представлению результатов

Листинги программ
на VBA, Delphi и C++,
расширяющих
функциональность MS Excel



Александр Леоненков

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ОПТИМИЗАЦИИ
В СРЕДЕ MS EXCEL**

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Л47

Леоненков А. В.

Л47 Решение задач оптимизации в среде MS Excel. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 704 с.: ил.

ISBN 5-94157-503-3

Рассматриваются методы и алгоритмы практического решения типовых задач оптимизации всех основных классов. Подробно описываются теоретические основы и практические особенности постановки и решения соответствующих задач. Для типовых задач оптимизации предлагаются несколько способов их решения и приводятся рекомендации по выбору наиболее эффективного из них. Представлены пошаговые инструкции по выполнению практических действий, связанных с подготовкой исходных данных и последующего решения прикладных задач оптимизации всех основных классов. Содержится доступное введение в программирование на языке VBA и приводятся листинги программ, расширяющих функциональность MS Excel.

Для широкого круга пользователей

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. гл. редактора	<i>Евгений Рыбаков</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Татьяна Лапина</i>
Компьютерная верстка	<i>Натальи Караваевой</i>
Корректор	<i>Виктория Пиотровская</i>
Дизайн серии	<i>Инны Тачиной</i>
Оформление обложки	<i>Игоря Цырульниковца</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 20.05.05.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 56,76.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

Оглавление

Предисловие	1
Структура книги	3
Рекомендации по изучению книги.....	5
Благодарности.....	5
ЧАСТЬ I. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА	7
Глава 1. Общая характеристика задач оптимизации	9
1.1. Природа и особенности задач оптимизации	9
1.2. Примеры типовых задач оптимизации	14
1.2.1. Задача о коробке максимального объема	14
1.2.2. Задача о пожарном ведре	15
1.2.3. Задача об оптимальной диете	16
1.2.4. Транспортная задача.....	16
1.2.5. Задача о минимальном пути в графе.....	18
1.2.6. Задача коммивояжера.....	19
1.2.7. Задача о рюкзаке	20
1.2.8. Задача о назначении.....	21
1.2.9. Задача о минимальном покрывающем дереве в графе.....	23
1.2.10. Задача о максимальном потоке в сети	24
1.2.11. Задача водопроводчика	26
1.3. Методология системного моделирования.....	27
1.4. Процесс постановки и решения задач оптимизации.....	32
1.4.1. Анализ проблемной ситуации.....	33
1.4.2. Построение математической модели	34
1.4.3. Анализ модели.....	35
1.4.4. Выбор метода и средства решения.....	36
1.4.5. Выполнение численных расчетов	38

1.4.6. Анализ результатов расчетов.....	38
1.4.7. Применение результатов расчетов	39
1.4.8. Коррекция и доработка модели	40
1.5. Математическая модель задач оптимизации	40
1.5.1. Понятие математической модели и ее основные элементы	41
1.5.2. Характеристика переменных	41
1.5.3. Характеристика ограничений	42
1.5.4. Характеристика целевой функции	44
1.5.5. Общая классификация задач оптимизации	46
1.6. Основные подходы к решению задач оптимизации.....	48
1.6.1. Понятие оптимального решения задачи оптимизации.....	48
1.6.2. Проблема существования и единственности решения задач оптимизации	49
1.6.3. Понятие о методах и алгоритмах решения задач оптимизации	53
1.6.4. Структура описания задач оптимизации	56

Глава 2. Основные приемы практической работы в среде MS Excel 58

2.1. Общая характеристика программы электронных таблиц MS Office Excel 2003	59
2.2. Основные элементы рабочего интерфейса MS Office Excel 2003	60
2.2.1. Главное меню	61
2.2.2. Стандартная панель инструментов	62
2.2.3. Панель инструментов Форматирование	65
2.2.4. Строка ввода и редактирования формул	67
2.2.5. Область рабочего листа.....	67
2.2.6. Область задач	68
2.3. Основные приемы работы с электронной таблицей	69
2.3.1. Ввод и форматирование данных.....	71
2.3.2. Копирование и перенос данных ячеек и рабочих листов	75
2.3.3. Ввод, редактирование и копирование формул.....	77
2.4. Основные виды диаграмм в программе MS Excel и приемы их построения	87
2.4.1. Построение графика функции одной переменной.....	88
2.4.2. Построение графика функции двух переменных.....	93

ЧАСТЬ II. ЗАДАЧИ НЕПРЕРЫВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ 101

Глава 3. Задачи нелинейного программирования..... 103

3.1. Общая характеристика задачи нелинейного программирования	103
3.1.1. Математическая постановка задачи нелинейного программирования	104

3.1.2. Основные методы решения задач нелинейного программирования	105
3.2. Задача о коробке максимального объема.....	107
3.2.1. Математическая постановка задачи о коробке максимального объема	107
3.2.2. Решение задачи о коробке максимального объема с помощью программы MS Excel	109
3.2.3. Аналитическое решение задачи о коробке максимального объема	118
3.3. Задача о пожарном ведре.....	119
3.3.1. Математическая постановка задачи о пожарном ведре	119
3.3.2. Решение задачи о пожарном ведре максимального объема с помощью программы MS Excel	121
3.3.3. Аналитическое решение задачи о пожарном ведре.....	125
3.4. Задача о строительстве универсама.....	126
3.4.1. Содержательная постановка задачи о строительстве универсама.....	126
3.4.2. Математическая постановка задачи о строительстве универсама.....	127
3.4.3. Решение задачи о строительстве универсама с помощью программы MS Excel	128
3.5. Тестовые задачи нелинейного программирования	131
3.5.1. Задача оптимизации с целевой функцией Розенброка и ее решение с помощью программы MS Excel.....	131
3.5.2. Задача оптимизации с целевой функцией Пауэлла и ее решение с помощью программы MS Excel.....	134
3.5.3. Задача оптимизации с двумерной экспоненциальной целевой функцией и ее решение с помощью программы MS Excel.....	135
3.6. Упражнения.....	137
3.6.1. Задача Тартальи	137
3.6.2. Задача Ферма.....	138
3.6.3. Задача Кеплера	138
3.6.4. Обобщенная задача Кеплера.....	138
3.6.5. Задача Евклида.....	138
3.6.6. Обобщенная задача Евклида.....	138
3.6.7. Задача Зенодора	138
3.6.8. Задача Архимеда	138
3.6.9. Задача Герона	139
3.6.10. Задача Аполлония для эллипса.....	139
3.6.11. Задача Аполлония для параболы.....	139
3.6.12. Задача Аполлония для гиперболы.....	139
3.6.13. Задача о вписанном прямоугольнике.....	139

3.6.14. Задача о вписанном треугольнике.....	139
3.6.15. Задача о вписанном конусе.....	139
3.6.16. Задача о вписанном тетраэдре.....	139
3.6.17. Задача о треугольнике.....	139
3.6.18. Задача об угле и точке.....	140
3.6.19. Задача о трех точках.....	140
3.6.20. Обобщенная задача о точках.....	140

Глава 4. Задачи линейного программирования..... 141

4.1. Общая характеристика задачи линейного программирования.....	142
4.1.1. Математическая постановка задачи линейного программирования.....	142
4.1.2. Основные методы решения задач линейного программирования.....	145
4.2. Задача об оптимальной диете.....	146
4.2.1. Математическая постановка задачи об оптимальной диете.....	147
4.2.2. Решение задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel.....	148
4.3. Задача о производстве красок.....	154
4.3.1. Общая постановка задачи производственного планирования.....	154
4.3.2. Математическая постановка задачи о производстве красок.....	156
4.3.3. Графическое решение задачи о производстве красок.....	157
4.3.4. Решение задачи о производстве красок с помощью симплекс-метода.....	165
4.4. Двойственная задача линейного программирования.....	175
4.4.1. Математическая формулировка двойственной задачи линейного программирования.....	176
4.4.2. Математическая постановка двойственной задачи о красках.....	177
4.4.3. Решение двойственной задачи о красках с помощью программы MS Excel.....	178
4.5. Транспортная задача линейного программирования.....	181
4.5.1. Математическая постановка транспортной задачи.....	181
4.5.2. Решение транспортной задачи с помощью программы MS Excel.....	183
4.5.3. Решение транспортной задачи с помощью метода потенциалов.....	188
4.6. Упражнения.....	199
4.6.1. Задача о производстве клея.....	199
4.6.2. Задача об оптимальной диете.....	200
4.6.3. Транспортная задача.....	201

ЧАСТЬ III. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ И КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	203
Глава 5. Задачи целочисленного линейного программирования.....	205
5.1. Общая постановка задачи целочисленного линейного программирования.....	205
5.1.1. Математическая постановка задачи целочисленного линейного программирования.....	206
5.1.2. Основные методы решения задач целочисленного линейного программирования.....	209
5.2. Задача о рюкзаке.....	211
5.2.1. Математическая постановка одномерной задачи о рюкзаке.....	211
5.2.2. Решение одномерной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel.....	212
5.2.3. Аналитическое решение одномерной задачи о рюкзаке.....	219
5.3. Задача об изготовлении часов.....	221
5.3.1. Математическая постановка задачи об изготовлении часов.....	221
5.3.2. Графическое решение задачи об изготовлении часов.....	222
5.4. Задача о планировании перевозок пассажиров.....	227
5.4.1. Математическая постановка задачи о планировании перевозок пассажиров.....	228
5.4.2. Решение задачи о планировании перевозок пассажиров с помощью программы MS Excel.....	229
5.5. Задача об изготовлении стержней.....	232
5.5.1. Содержательная постановка задачи.....	232
5.5.2. Математическая постановка задачи об изготовлении стержней.....	234
5.5.3. Решение задачи об изготовлении стержней с помощью программы MS Excel.....	235
5.6. Транспортная задача целочисленного линейного программирования.....	238
5.6.1. Математическая постановка транспортной задачи.....	239
5.6.2. Решение многопродуктовой целочисленной транспортной задачи с помощью программы MS Excel.....	240
5.7. Упражнения.....	247
5.7.1. Задача о погрузке автомобиля.....	247
5.7.2. Задача об изготовлении обуви.....	248
5.7.3. Задача об изготовлении мебели.....	249
5.7.4. Многопродуктовая транспортная задача.....	249

Глава 6. Задачи оптимизации с булевыми переменными.....	252
6.1. Общая постановка задачи оптимизации с булевыми переменными	252
6.1.1. Математическая постановка задачи оптимизации с булевыми переменными	253
6.1.2. Основные методы решения задач оптимизации с булевыми переменными.....	254
6.2. Задача о рюкзаке с булевыми переменными	256
6.2.1. Математическая постановка одномерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными	256
6.2.2. Решение одномерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными с помощью программы MS Excel	257
6.2.3. Решение задачи о рюкзаке с помощью метода динамического программирования	262
6.3. Задача водопроводчика.....	266
6.3.1. Математическая постановка задачи водопроводчика.....	266
6.3.2. Решение задачи водопроводчика с помощью программы MS Excel	268
6.3.3. Аналитическое решение задачи водопроводчика.....	273
6.4. Задача о назначении	275
6.4.1. Математическая постановка задачи о назначении	275
6.4.2. Решение задачи о назначении с помощью программы MS Excel	277
6.4.3. Решение задачи о назначении с помощью венгерского метода.....	283
6.5. Упражнения.....	291
6.5.1. Двумерная задача о рюкзаке.....	291
6.5.2. Задача водопроводчика	292
6.5.3. Задача о назначении.....	293
Глава 7. Задачи оптимизации на графах	294
7.1. Общая характеристика задач оптимизации на графах.....	295
7.1.1. Математическая постановка задачи оптимизации на графах.....	295
7.1.2. Основные методы решения задач оптимизации на графах	296
7.2. Задача о минимальном покрывающем дереве в графе	297
7.2.1. Математическая постановка задачи.....	297
7.2.2. Решение задач о минимальном и максимальном покрывающем дереве в графе с помощью программы MS Excel	300
7.2.3. Решение задачи о максимальном покрывающем дереве в графе с помощью программы MS Excel	305
7.2.4. Решение задач о максимальном и минимальном покрывающем дереве с помощью жадного алгоритма	308
7.3. Задача о минимальном пути в графе	313

7.3.1. Математическая постановка задачи.....	313
7.3.2. Решение задачи о минимальном пути в ориентированном графе с помощью программы MS Excel	315
7.3.3. Решение задачи о минимальном пути в графе с помощью алгоритма пометок Дейкстры.....	321
7.4. Задача нахождения максимального пути в ориентированном графе.....	328
7.4.1. Содержательная постановка задачи нахождения критического пути выполнения бизнес-процесса.....	328
7.4.2. Математическая постановка задачи.....	331
7.4.3. Решение задачи нахождения критического пути в сетевом графе с помощью программы MS Excel	332
7.4.4. Решение задачи нахождения критического пути в сетевом графе с помощью алгоритма расстановки постоянных пометок.....	336
7.5. Задача о максимальном потоке в сети.....	342
7.5.1. Математическая постановка задачи.....	342
7.5.2. Решение задачи о максимальном потоке в сети с помощью программы MS Excel	343
7.5.3. Решение задачи о максимальном потоке в сети с помощью алгоритма пометок Форда — Фалкерсона	350
7.6. Упражнения.....	356
7.6.1. Задача о минимальном и максимальном покрывающем дереве в графе.....	356
7.6.2. Задача о минимальном и максимальном пути в ориентированном графе	356
7.6.3. Задача о максимальном потоке в сети	357
Глава 8. Задачи комбинаторной оптимизации	358
8.1. Общая характеристика задач комбинаторной оптимизации.....	358
8.1.1. Математическая постановка задачи комбинаторной оптимизации	359
8.1.2. Основные методы решения задач комбинаторной оптимизации	360
8.2. Задача коммивояжера.....	361
8.2.1. Математическая постановка задачи.....	362
8.2.2. Решение задачи коммивояжера с помощью программы MS Excel.....	365
8.2.3. Решение задачи коммивояжера с помощью алгоритма динамического программирования	372
8.3. Задача о разбиении	377
8.3.1. Содержательная постановка задачи.....	377
8.3.2. Математическая постановка задачи.....	378

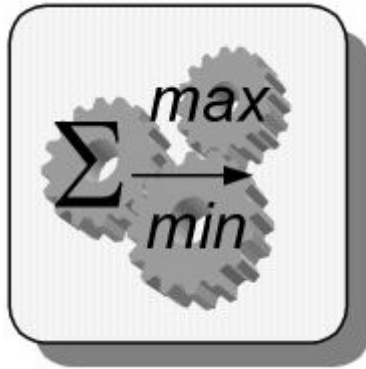
8.3.3. Решение задачи о разбиении с помощью программы MS Excel	380
8.3.4. Решение задачи о разбиении с помощью алгоритма динамического программирования	388
8.4. Упражнения.....	394
8.4.1. Задача коммивояжера.....	395
8.4.2. Задача о разбиении	395
ЧАСТЬ IV. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	397
Глава 9. Задачи многокритериального линейного и целочисленного программирования.....	399
9.1. Общая характеристика задач многокритериальной оптимизации	399
9.1.1. Математическая постановка задачи многокритериальной оптимизации	400
9.1.2. Основные подходы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	404
9.1.3. Метод уступок для решения задач многокритериальной оптимизации	407
9.1.4. Метод минимального отклонения от идеальной точки	410
9.2. Задача об оптимальной диете с двумя целевыми функциями.....	412
9.2.1. Математическая постановка задачи и подходы к ее решению	412
9.2.2. Решение многокритериальной задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel методом уступок.....	413
9.2.3. Решение двухкритериальной задачи о диете с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения	421
9.2.4. Решение двухкритериальной задачи о диете с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки	426
9.3. Задача о производстве красок с двумя целевыми функциями.....	428
9.3.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи о производстве красок	429
9.3.2. Графический способ построения множества Парето для двухкритериальной задачи о производстве красок	430
9.4. Двухкритериальная задача о рюкзаке	436
9.4.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи о рюкзаке	436
9.4.2. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом уступок	437
9.4.3. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения	443

9.4.4. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки	447
9.5. Упражнения.....	449
9.5.1. Двухкритериальная задача о производстве клея	450
9.5.2. Двухкритериальная задача о погрузке автомобиля.....	450
9.5.3. Двухкритериальная задача об изготовлении обуви.....	451
Глава 10. Задачи многокритериальной булевой оптимизации.....	452
10.1. Общая характеристика задач многокритериальной оптимизации с булевыми переменными.....	452
10.2. Задача водопроводчика с двумя целевыми функциями.....	453
10.2.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи водопроводчика.....	454
10.2.2. Решение двухкритериальной задачи водопроводчика с помощью программы MS Excel методом уступок.....	455
10.2.3. Решение двухкритериальной задачи водопроводчика с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения	461
10.2.4. Решение двухкритериальной задачи водопроводчика с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки.....	465
10.3. Двухкритериальная задача о назначении	468
10.3.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи о назначении	468
10.3.2. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом уступок.....	470
10.3.3. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения	477
10.3.4. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки	481
10.4. Двухкритериальная задача о наборе высоты и скорости	484
10.4.1. Содержательная постановка индивидуальной задачи о наборе высоты и скорости летательным аппаратом.....	484
10.4.2. Математическая постановка двухкритериальной задачи о наборе высоты и скорости	485
10.4.3. Решение двухкритериальной задачи о наборе высоты и скорости с помощью программы MS Excel методом уступок.....	487
10.4.4. Решение двухкритериальной задачи о наборе высоты и скорости с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения	494
10.4.5. Решение двухкритериальной задачи о наборе высоты и скорости с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки	499

10.5. Упражнения.....	502
10.5.1. Двухкритериальная задача о рюкзаке.....	502
10.5.2. Двухкритериальная задача водопроводчика.....	503
10.5.3. Двухкритериальная задача о назначении.....	504
ЧАСТЬ V. ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В СРЕДЕ EXCEL.....	505
Глава 11. Алгоритмы и программы решения задач оптимизации на графах.....	507
11.1. Особенности разработки пользовательских программ в среде MS Excel.....	508
11.1.1. Среда и язык программирования Visual Basic For Applications.....	508
11.1.2. Создание пользовательской функции для вычисления двумерной экспоненциальной функции.....	517
11.1.3. Построение графика функции двух переменных.....	520
11.1.4. Программа изображения структуры неориентированного графа.....	523
11.2. Минимальное покрывающее дерево графа и его графическое изображение.....	529
11.2.1. Программа нахождения минимального покрывающего дерева графа.....	530
11.2.2. Программа изображения минимального покрывающего дерева графа.....	534
11.3. Максимальное покрывающее дерево графа и его графическое изображение.....	539
11.3.1. Программа нахождения максимального покрывающего дерева графа.....	539
11.3.2. Программа изображения максимального покрывающего дерева графа.....	542
11.4. Путь минимальной длины и его графическое изображение.....	546
11.4.1. Программа нахождения минимального пути в ориентированном графе.....	546
11.4.2. Программа изображения минимального пути в ориентированном графе.....	551
11.5. Путь максимальной длины и его графическое изображение.....	556
11.5.1. Программа нахождения критического пути в сетевом графе.....	556
11.5.2. Программа изображения критического пути в сетевом графе.....	559
11.6. Упражнения.....	565
11.6.1. Максимальный поток в сети.....	565
11.6.2. Графическое изображение максимального потока в сети.....	565

Глава 12. Алгоритмы и программы решения задач комбинаторной оптимизации.....	566
12.1. Задача коммивояжера и ее решение с помощью VBA	566
12.1.1. Алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера	567
12.1.2. Программа приближенного решения задачи коммивояжера	569
12.1.3. Программа изображения полного замкнутого пути в ориентированном графе	575
12.2. Задача о разбиении и ее решение с помощью VBA	580
12.2.1. Алгоритм приближенного решения задачи о разбиении.....	580
12.2.2. Программа приближенного решения задачи о разбиении.....	584
12.3. Использование программ на языке VBA в книгах MS Excel	591
12.3.1. Экспорт и импорт модулей с текстами программ на VBA	591
12.3.2. Использование шаблонов с текстами программ на VBA.....	592
12.3.3. Создание и использование надстроек пользователя с текстами программ на VBA	594
12.4. Внешние программы и их использование в среде MS Excel.....	595
12.4.1. Разработка внешней функции в среде Borland Delphi и ее использование в среде MS Excel.....	596
12.4.2. Разработка внешней функции в среде MS Visual Studio .NET и ее использование в среде MS Excel.....	603
12.4.3. Разработка функции нахождения минимального пути в среде Borland Delphi и ее использование в среде MS Excel	611
12.5. Упражнения.....	618
12.5.1. Модификация программы приближенного решения задачи коммивояжера	618
12.5.2. Модификация программы приближенного решения задачи о разбиении.....	618
12.5.3. Разработка программы нахождения максимального покрывающего дерева	619
12.5.4. Разработка программы нахождения критического пути.....	619
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	621
Приложение 1. Основные понятия теории множеств, теории графов и комбинаторного анализа	623
Множество и способы его задания	623
Основные теоретико-множественные операции	629
Булеан или множество всех подмножеств	636
Отношения и способы их задания	637

Операции над бинарными отношениями	647
Отображение	649
Свойства бинарных отношений, заданных на одном базисном множестве	650
Некоторые специальные виды бинарных отношений, заданных на одном базисном множестве	652
Отношение строгого частичного порядка	653
Отношение толерантности	653
Отношение эквивалентности	654
Перестановка	655
Сочетание	656
Размещение	656
Приложение 2. Назначение операций главного меню программы электронных таблиц MS Office Excel 2003	658
Приложение 3. Назначение операций главного меню редактора Visual Basic пакета MS Office System 2003	671
Список литературы	683
Предметный указатель	689



Часть I

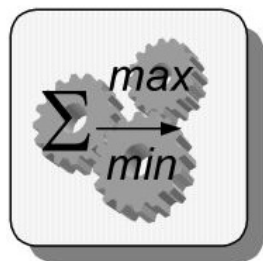
Задачи оптимизации и их основные свойства

Глава 1. Общая характеристика
задач оптимизации

Глава 2. Основные приемы практической
работы в среде MS Excel

Принято считать, что с той или иной задачей оптимизации каждый человек хотя бы однажды сталкивался в своей жизни. Если эта встреча имела явный характер, то, по всей видимости, приходилось выполнять некоторые численные расчеты. Если же проблема возникала в неявной форме, то и решение принималось интуитивно, на основе здравого смысла или опыта. При этом часто по прошествии времени оказывалось, что принятое решение приводит вовсе не к тому результату, какой хотелось бы получить. Как избежать разочарований, а то и печальных последствий от далеко не лучших вариантов развития событий, предусмотреть, по возможности, все аспекты и альтернативы, выработать систематический взгляд на способы решения задач оптимизации — обо всем этом рассказывается на страницах этой книги.

Глава 1



Общая характеристика задач оптимизации

Настоящая глава является введением в проблематику постановки и решения задач оптимизации. В ней рассматриваются и особенности природы подобных задач, приводятся примеры типовых задач оптимизации, которые являются предметом детального изучения в следующих главах книги. Далее в этой главе дается краткая характеристика основных этапов процесса постановки и решения задач оптимизации и приводится общая классификация этих задач. В заключение представлены основные подходы к решению задач оптимизации, которые нашли отражение в книге.

1.1. Природа и особенности задач оптимизации

Начиная разговор о задачах оптимизации, обычно всегда упоминают об исключительно широком распространении этих задач, а также о том, что их история восходит к зарождению человеческой цивилизации. Действительно, трудно найти человека, который хотя бы раз не попадал в ситуацию необходимости выбора одной из нескольких возможностей. Вполне очевидно, что в подобной ситуации всегда следует выбирать наилучший вариант. Более сложный вопрос заключается в точном определении того, какой смысл следует вкладывать в понятие "наилучшее решение".

Как оптимально распорядиться семейным бюджетом или за минимальное время добраться до нужной точки в городе, как наилучшим образом спланировать деловые встречи и минимизировать риски капитальных вложений, есть ли смысл воспользоваться страховым полисом или это неоправданные финансовые затраты, как наиболее эффективно организовать работу персонала компании или определить оптимальные запасы сырья на складе — это лишь

небольшая часть проблем, в которых желательно принять не просто какое-то решение, а наилучшее из всех потенциально возможных решений.

В более простых, на первый взгляд, ситуациях, когда, например, речь заходит о покупке новой вещи в быту, вряд ли у кого не возникает желание иметь вещь наилучшего качества, надежности, внешнего вида или комфорта. Однако, с одной стороны, в подобных случаях выбор может быть ограничен имеющимися в наличии доступными средствами. Тем самым на принятие решения оказывают влияние некоторые ограничивающие обстоятельства, которые из всех потенциально возможных вариантов исключают не удовлетворяющие определенным ограничениям. С другой стороны, введение в рассмотрение нескольких характеристик для оценки наилучшего варианта приводит к задачам оптимизации в многокритериальной постановке, которые с концептуальной точки зрения считаются наиболее трудными для решения.

Что касается истории систематического изучения задач оптимизации, то ее начало относится к эпохе зарождения математики как науки. Известно, что одними из первых математических задач, которые были сформулированы и решены античными математиками, были задачи нахождения геометрических фигур максимальной площади и тел максимального объема при ограничениях на периметр и площадь поверхности, соответственно.

Задачи, в которых требуется найти значения одной или нескольких переменных и при этом максимизируется или минимизируется значение некоторой непрерывной функции, занимают в математике особое место. Для их решения был разработан классический метод, связанный с нахождением нулей первой производной целевой функции и проверки их на экстремум. Этот метод, получивший название *аналитического* способа решения задач оптимизации, вполне подходит для решения простых задач. Его характерной особенностью является установление или нахождение решения в форме некоторой функциональной зависимости между исходными данными и решением.

Интенсивное развитие экономики и производства в XX в. привело к появлению целого ряда новых типов задач оптимизации, которые не могли быть решены классическими методами и потребовали разработки специальной математической теории — теории решения задач оптимизации. В рамках этой теории были разработаны не только методологические основы постановки и анализа задач оптимизации, но и вычислительные методы и алгоритмы их решения. Хотя по-прежнему некоторые неклассические задачи оптимизации могут быть решены аналитически, однако акцент исследований смещается в сторону поиска *вычислительного* способа решения для целых классов задач оптимизации.

Таким образом, для задач оптимизации характерно наличие нескольких возможностей для выбора альтернативных решений и наличие некоторой

оценочной функции для количественного выражения наилучшего выбора. В случае отсутствия альтернатив или соответствующей оценочной функции задача оптимизации теряет свой смысл. Что касается наличия некоторых дополнительных, ограничивающих выбор условий, то последние не являются обязательным атрибутом классических задач оптимизации. Однако большинство, если не все неклассические задачи оптимизации имеют дополнительные ограничения, формирующие в своей совокупности множество допустимых альтернатив.

Несколько слов о самом подходе к решению задач оптимизации. Ранее уже были упомянуты аналитический и вычислительный способы. Однако из всех методов решения задач оптимизации с конечным множеством допустимых альтернатив имеется один, который представляется универсальным средством решения задач любого класса. Речь идет о методе *полного перебора* и сравнения альтернативных возможностей с целью выбора наилучшего из них. Появление высокопроизводительных персональных компьютеров создает у многих пользователей ложное впечатление о потенциальной возможности решения любой задачи оптимизации простым перебором всех возможностей для выбора из них наилучшей.

Казалось бы, для этого вполне достаточно написать соответствующую компьютерную программу, которая будет последовательно рассчитывать значения оценочной функции для каждой из возможных альтернатив, сохранять текущий рекорд, а после окончания своей работы сообщит сохраненный результат пользователю. Этот способ представляется настолько многообещающим, что для значительной части современных программистов был потерян сам смысл изучения других вычислительных алгоритмов, разработанных для решения задач оптимизации.

Увы, это впечатление настолько обманчиво, что даже не требует серьезных аргументов для опровержения. Достаточно взять реальную задачу комбинаторной оптимизации, например, задачу коммивояжера с 11—12 городами, чтобы на многие часы, а может быть и сутки, ввести Pentium-IV в состояние глубочайшей задумчивости со 100%-ной загрузкой процессора. А ведь в реальных ситуациях может потребоваться решить подобную задачу с гораздо большим количеством городов для обхода. Данный класс задач и эффективные методы их решения рассматриваются в *главах 8 и 12*. Применение метода полного перебора для непрерывных задач оптимизации вообще теряет смысл, поскольку в подобных задачах множество исходных альтернатив бесконечно по своей природе.

Другая распространенная ошибка среди пользователей и аналитиков — считать какие-нибудь новомодные методы, например, генетические или нейросетевые алгоритмы, универсальным средством решения задач оптимизации.

Об этом можно прочитать в рекламных проспектах релизов тех или иных программ. Однако сознательно или нет, разработчики соответствующих программных пакетов не указывают, что эти алгоритмы, действительно обладая известной универсальностью, по своему характеру являются всего лишь *приближенными* методами поиска оптимальных решений. Это значит, что в общем случае нет никаких оснований считать полученное с их помощью решение действительно наилучшим из всех возможных. Полученное решение будет всего лишь *близким* к оптимальному, насколько же близко — это уже другой вопрос, точный ответ на который соизмерим со сложностью решения исходной задачи оптимизации.

Наконец, несколько слов следует сказать о средствах решения задач оптимизации. В простейших случаях для этого может оказаться достаточным наличие ручки и листа бумаги. А вот в более сложных... Здесь уже у аналитика появляется выбор, который зависит от наличия персонального компьютера. Действительно, существуют специальные математические программы, например, MATLAB и Mathcad, которые имеют встроенные средства решения задач оптимизации. Очевидное неудобство для пользователя может быть связано с необходимостью дополнительных затрат на их приобретение и времени на изучение их особенностей. А если ни того, ни другого в данный момент нет?

Оказывается, в большинстве случаев для решения типовых задач оптимизации может оказать эффективную помощь программа электронных таблиц MS Excel. Неоспоримое ее достоинство заключается в том, что она не требует дополнительных затрат на приобретение, поскольку офисный пакет от Microsoft практически всегда устанавливается сразу после установки операционной системы MS Windows®. Что касается времени на изучение программы электронных таблиц MS Excel, то оно существенно меньше за счет единообразного рабочего интерфейса офисных программ. С другой стороны, от большинства пользователей, которые пишут в своем резюме "опытный пользователь ПК", требуется умение работать в среде MS Excel на уровне редактирования рабочих листов и манипулирования содержимым ячеек. Значит, изучение материала книги для таких читателей послужит приобретению дополнительных навыков практической работы с одной из самых "математических" программ офисного пакета.

Примечание

Как это ни покажется парадоксальным, использование для решения задач оптимизация других технических средств — калькулятора или ставшей уже реликтом логарифмической линейки — может потребовать от аналитика более серьезных усилий и квалификации. Действительно, чтобы правильно выполнить все расчетные действия с помощью этих инструментов, необходимо

хорошо знать детали того или иного вычислительного алгоритма. Учитывая высокую вероятность ошибки пользователя при выполнении промежуточных расчетов, а также невысокую точность второго инструмента, оба эти средства вряд ли могут считаться базовыми при решении задач оптимизации. В то же время нельзя их полностью исключить из рабочего арсенала аналитика, поскольку они по-прежнему используются для ручной проверки правильности вычислительных алгоритмов в простейших случаях.

Конечно, программа электронных таблиц MS Excel, содержащая встроенные средства для решения задач оптимизации, является далеко не универсальной. Современные задачи оптимизации настолько разнообразны по своему характеру, что разработка универсального метода или средства для их решения представляется практически невозможной. Однако существуют типовые классы задач оптимизации, которые могут быть успешно решены с помощью программы электронных таблиц MS Excel. Именно рассмотрению этих задач и особенностей методов их решения уделяется основное внимание на страницах книги.

В то же время отдельные классы интересных задач оптимизации либо не могут быть вовсе решены с помощью программы MS Excel, либо их решение связано со значительным неудобством и затратами времени. В подобных случаях пользователь или аналитик оказывается в ситуации выбора. С одной стороны, обладая некоторым опытом программирования, можно воспользоваться встроенным языком VBA (Visual Basic for Applications) для написания собственных программ, реализующих те или иные алгоритмы оптимизации.

С другой стороны, электронные таблицы MS Excel позволяют вызывать пользовательские функции из внешних библиотек динамической компоновки (DDL), которые, в свою очередь, могут быть созданы с помощью специальных сред визуального программирования, таких как MS Visual C++ .NET® и Borland Delphi 7® и их предыдущих версий. Подобные задачи оптимизации, методы и алгоритмы их программного решения рассматриваются в заключительной части книги.

Примечание

На всем протяжении книги под программой электронных таблиц MS Excel будет подразумеваться последняя на момент написания книги локализованная версия MS Office Excel 2003. В то же время, практически весь изложенный материал оказывается справедливым для предыдущих версий этой программы, начиная с версии MS Excel 97. Более того, как это ни покажется парадоксальным, возможностью вызова пользовательских функций из библиотек динамической компоновки реально обладает именно версия MS Excel 97. Поскольку эта возможность используется только в заключительной части книги, на указа-

ние версии программы электронных таблиц MS Excel в этом случае будет акцентировано дополнительное внимание.

Таким образом, для правильной постановки и решения практических задач оптимизации необходимо знать особенности отдельных классов этих задач и возможности программы электронных таблиц MS Excel. Далее рассматриваются примеры типовых задач оптимизации, которые послужили прообразом появления целых классов задач оптимизации и источником разработки специальных алгоритмов для их решения.

1.2. Примеры типовых задач оптимизации

Понятие типовой задачи оптимизации является в некоторой степени условным и определяется исключительно соображениями удобства анализа и классификации соответствующих задач. Из всего разнообразия задач оптимизации и их модификаций были выбраны только те, которые имеют наглядный характер и не требуют для понимания своих особенностей специальных знаний из той или иной предметной области. В следующих главах книги рассматриваются математические формулировки этих задач и методы их практического решения.

1.2.1. Задача о коробке максимального объема

Данная задача формулируется следующим образом. Имеется квадратная заготовка из некоторого гибкого материала, например, картона или жести, причем размеры этой заготовки фиксированы для конкретной ситуации (рис. 1.1, *а*). Из этой заготовки следует вырезать четыре равных квадрата по ее углам, а полученную фигуру (рис. 1.1, *б*) согнуть так, чтобы получилась коробка без верхней крышки (рис. 1.1, *в*). При этом необходимо так выбрать размер вырезаемых квадратов, чтобы получилась коробка максимального объема.

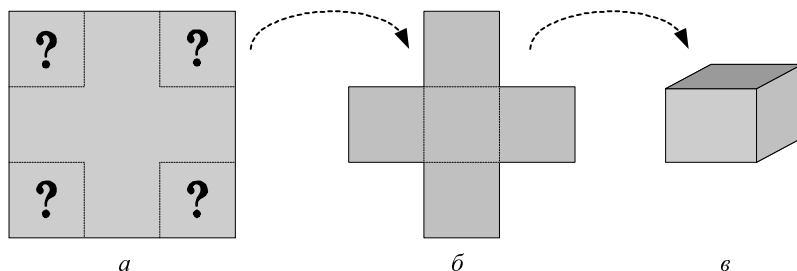


Рис. 1.1. Схема изготовления коробки из прямоугольной заготовки фиксированного размера

На примере данной задачи можно проиллюстрировать все элементы постановки задач оптимизации. Оценочной функцией в данной задаче служит объем изготовленной коробки. Проблема выбора заключается в выборе размера вырезаемых квадратов. Действительно, если размер вырезаемых квадратов будет слишком мал, то будет получена широкая коробка малой высоты, а значит, и ее объем окажется невелик. С другой стороны, если размер вырезаемых квадратов будет слишком большой, то будет получена узкая коробка большой высоты, а значит, и ее объем также окажется невелик.

В то же время на выбор размера вырезаемых квадратов оказывает влияние ограничение размера исходной заготовки. Действительно, если вырезать квадраты со стороной, равной половине стороны исходной заготовки, то задача теряет смысл. Сторона вырезаемых квадратов также не может превышать половину стороны исходной заготовки, поскольку это невозможно из практических соображений. Из этого следует, что в постановке данной задачи должны присутствовать некоторые ограничения.

Задача о коробке максимального объема имеет не только наглядную интерпретацию, но и достаточно простое аналитическое решение. Она относится к классу задач нелинейной оптимизации, методы решения которых подробно рассматриваются в *главе 3*.

1.2.2. Задача о пожарном ведре

Данная задача по своему характеру похожа на предыдущую задачу о коробке и формулируется следующим образом. Имеется заготовка в форме круга из некоторого гибкого и влагостойкого материала, например, жести или алюминия, причем размеры заготовки фиксированы для конкретной ситуации (рис. 1.2, *а*). Из заготовки следует вырезать некоторый сектор так, чтобы, согнув полученную фигуру (рис. 1.2, *б*) и сварив шов, можно было бы получить конус без основания. Если к этому конусу добавить ручку из согнутого стержня или проволоки, то получится ведро, которое вполне можно использовать для тушения пожара (рис. 1.2, *в*), откуда и произошло название задачи. Необходимо так выбрать размер вырезаемого сектора, чтобы пожарное ведро оказалось максимального объема.

На примере данной задачи также можно проиллюстрировать все элементы постановки задач оптимизации. Оценочная функция и ограничивающие условия оказываются аналогичными предыдущей задаче. Хотя данная задача имеет наглядную интерпретацию, однако ее аналитическое решение уже не является простым. Она относится к классу задач нелинейной оптимизации и более подробно рассматривается в *главе 3*.

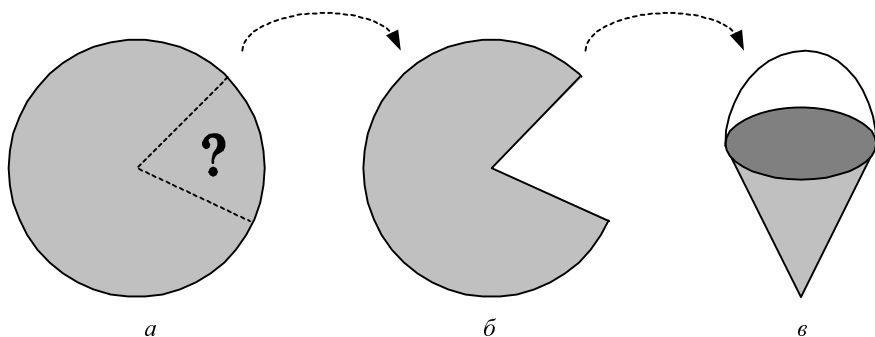


Рис. 1.2. Схема изготовления ведра из круглой заготовки фиксированного размера

1.2.3. Задача об оптимальной диете

Данная задача не имеет столь наглядного характера, как предыдущие, и допускает некоторую неоднозначность в своей постановке. Однако это не влияет на особенности ее анализа и решения. В общем случае задача об оптимальной диете формулируется следующим образом.

Имеется конечное число видов продуктов питания, например, хлеб, крупа, мясо, рыба, в которых содержится конечное число типов питательных веществ, например, белки, жиры, углеводы, витамины А, Б, С. В каждом виде продуктов питания содержится известное количество питательных веществ каждого из типов. Задана минимальная суточная потребность человека, например, спортсмена или пациента больницы, в каждом из видов питательных веществ. Задана также калорийность каждого типа продукта.

Требуется определить такой состав рациона питания, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем суточную потребность человека, а при этом суммарная калорийность рациона была минимальной.

Данная задача известна в литературе также как задача об оптимальной смеси или рационе питания. Оценочной функцией в ней является суммарная калорийность рациона, а ограничениями служат минимальная суточная потребность человека в каждом из видов питательных веществ. Задача об оптимальной диете является одной из классических задач линейного программирования, методы решения которых подробно рассматриваются в *главе 4*.

1.2.4. Транспортная задача

В некотором географическом регионе имеется фиксированное число пунктов производства и хранения некоторого однородного продукта и конечное число

пунктов потребления этого продукта (рис. 1.3). В качестве продукта может выступать, например, нефть, уголь, песок, цемент и т. п. Для каждого из пунктов производства и хранения известен объем производства продукта или его запаса. Для каждого пункта потребления задана потребность в продукте в этом пункте потребления. Известна стоимость перевозки или транспортировки одной единицы продукта из каждого пункта производства в любой из пунктов потребления.

Требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребности во всех пунктах потребления были удовлетворены, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными.

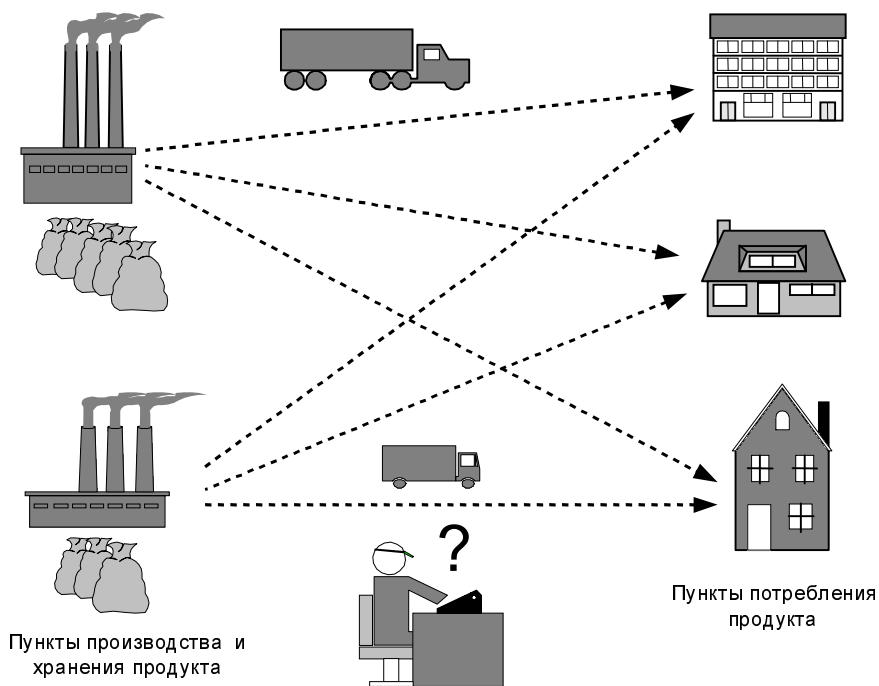


Рис. 1.3. Иллюстрация транспортной задачи для двух пунктов производства и трех пунктов потребления

Очевидно, оценочной функцией в данной задаче являются суммарные затраты на транспортировку всей продукции, а ограничениями служат объемы производства продукта в каждом пункте производства и потребности в продукте в каждом пункте потребления.

Данная задача также является одной из классических задач линейного программирования, методы ее решения рассматриваются в *главе 4*. В бизнес-