ISSN 0130-2221
НОЯБРЬ
2017 · №11

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

КВАНТ НОЯБРЬ 2017 №11

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Сколько времени длится причаливание?

С.ДВОРЯНИНОВ, З.КРАУТЕР, В.ПРОТАСОВ

Как причалить на лодке к берегу? Что за странный вопрос! Нужно снизить скорость и аккуратно пристать. Скорость желательно снизить до нуля – иначе лодка ударится о пристань. Тормозить (веслами) нужно начать заранее, поскольку, в отличие от парковки автомобиля, мы не можем тормозить резко. Итак, надо постепенно и плавно довести скорость до нуля. Поразительно, но эта простая на вид задача, строго говоря, неразрешима! И мы это сейчас покажем. А как же тогда причаливают лодки, корабли, космические аппараты? За этим стоит целая теория, основанная на большом разделе математики – дифференциальных уравнениях. Перед тем как с ними познакомиться, мы разберем нескольких важных и известных задач. Задача о причаливании – первая из них.

Задача о причаливании

Наша лодка находится на расстоянии 1 метр от берега и приближается к нему со скоростью 1 м/с. Обозначим скорость лодки на расстоянии x от берега через $f(x)$. Тогда $f(1) = 1$ и $f(0) = 0$ (скорость у берега равна нулю). Какую функцию скорости $f(x)$ можно выбрать? Попробуем $f(x) = x$, она удовлетворяет обоим условиям.

Задача 1. *Сколько времени длится причаливание со скоростью $f(x) = x$, где x – расстояние от лодки до берега?*

Решение. Первые полметра до берега лодка пройдет за время, большее 1/2 (полсекунды), потому что скорость лодки в каждой точке будет меньше 1. Следующие четверть метра лодка идет со скоростью, меньшей $1/2$, а значит, вновь потратит времени больше, чем полсекунды. И на

следующие $1/8$ метра потратит больше, чем полсекунды, и т.д. Так мы можем сложить по полсекунды сколь угодно много раз. Следовательно, **лодка будет причаливать бесконечно долго**.

Другими словами, она не причалит никогда! А что же делать? Увеличение скорости в тысячу раз (т.е. $f(x) = 1000x$) не поможет: время уменьшится в тысячу раз, но по-прежнему останется бесконечным. А если использовать совсем другую функцию? Например, $f(x) = x^2$? Да нет, снова не поможет. В самом деле, поскольку при $x < 1$ выполнено неравенство $x^2 < x$, скорость $f(x)$ будет меньше, чем x. Поэтому причаливание будет длиться даже дольше, чем со скоростью x. На этом пути выхода нет: никакой гладкой функции $f(x)$ для причаливания придумать не получится.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема (т.е. имеет производную) в точке $x = 0$, то причаливание длится бесконечно долго.*

Доказательство. Если $f(x)$ дифференцируема в нуле, то существует число $C > 0$ и маленький промежуток $[0; a]$, на котором $f(x) \le Cx$. Значит, причаливание будет длиться дольше, чем со скоростью $f(x) = Cx$. А это, как мы знаем, займет бесконечное время (просто заменим 1000 на C в нашем рассуждении выше).

Итак, *причаливание со скоростью, гладко зависящей от расстояния до берега, невозможно.*

Неожиданно! Вот как писал про этот феномен Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010), один из величайших математиков XX века, вспоминая дискуссию с другим видным математиком и астрономом Михаилом Львовичем Лидовым (1926–1993):

«Автоматическое причаливание, в соответствии с общими принципами теории управления, основано на обратной связи: наблюдая оставшееся до причала расстояние x, управление выбирают так, чтобы скорость причаливания плавно уменьшать до нуля (как функцию от x). Естественно, эта функция – гладкая, т.е. при малых расстояниях x скорость будет убывать с x приблизительно линейно. ...Время причаливания будет бесконечным при любом таком механизме гладкой обратной связи. Чтобы причалить за конечное время, нужно либо отказаться от принципа регулирования (с гладкой обратной связью), заменив управление скоростью корабля работой матроса с чалкой, либо согласиться на удар корабля о причал в заключительной стадии причаливания (для чего и обвешивают край пристани отслужившими автомобильными покрышками)».

Так как же причаливать? Ну ладно, на лодке или маленьком пароходике мы согласны удариться об «отслужившую автомобильную покрышку». Но как причаливать океанским лайнерам или, скажем, космическим аппаратам? Ответ подсказывает теорема 1. Надо попробовать взять функцию $f(x)$, не дифференцируемую в нуле. А такие бывают? Из числа «хороших» функций? Да. Например, $f(x) = \sqrt{x}$. Для этой функции отношение $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ стремится к бесконечности при $x \to 0$, поэтому производной в точке $x = 0$ не существует. Пробуем.

Задача 2. *Сколько времени длится причаливание со скоростью $f(x) = \sqrt{x}$, где x – расстояние от лодки до берега?*

Решение. Разделим весь путь, т.е. отрезок $[0; 1]$, точками $1/4$, $1/16$, $1/64$, ... (в знаменателях стоят квадраты степеней двойки). Скорость на первом промежутке (от 1 до $1/4$) больше $f(1/4) = 1/2$, а его длина меньше 1, поэтому лодка пройдет его меньше чем за 2 секунды.

Скорость на втором промежутке (от $1/4$ до $1/16$) больше $f(1/16) = 1/4$, а его длина меньше $1/4$, поэтому лодка пройдет его меньше чем за 1 секунду. Третий промежуток – меньше чем за $1/2$ секунды и т.д. Итоговое время меньше чем $2(1 + 1/2 + 1/4 + \ldots) = 4$. Итак, **лодка причалит меньше чем за 4 секунды**.

(На самом деле, точное время причаливания равно 2 секунды, см. пример 2 в конце статьи.)

Упражнения

1. Оцените время причаливания для скорости $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

2. Пусть материальная точка движется по числовой прямой из точки $x = 0$ в точку $x = 1$ и торможение осуществляется по закону $v=\sqrt{1-x^2}$. Оцените время причаливания.

Указание. Сведите задачу к случаю движения из точки $x = 1$ в точку $x = 0$ с помощью замены x на $1 - x$.

В обеих задачах, даже не имея уравнения движения лодки, мы смогли оценить время причаливания! Для этого мы разбили пройденный путь особым образом: на отрезки, пропорциональные степеням двойки. Попробуем развить успех на других задачах. Первое, что мы сделаем, – перейдем от причаливания к преследованию.

Одна задача о преследовании

В декабре 1966 года в газете «Комсомольская правда» были опубликованы задачи математической олимпиады. Интернета в то время не было, и только благодаря газете информация об олимпиаде была доступна школьникам. Одна из задач, о двух мальчиках, убегающих один от другого, стала потом очень популярной. Так, в книге Н.Б.Васильева, А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад» (1968) она была повторена в чуть более «озорной» формулировке: там уже ученик убегал от учителя.

Задача 3. *Ученик плавает в центре круглого бассейна. На краю бассейна стоит учитель, который не умеет плавать, но бегает в четыре раза быстрее, чем плавает ученик. Сможет ли ученик убежать от учителя, если он бегает быстрее, чем учитель?*

Итак, ученик плавает со скоростью v, а учитель не умеет плавать, но бегает со скоростью $4v$. Радиус бассейна примем за единицу. Первая естественная попытка убежать от учителя – плыть к краю бассейна прямо в точку B, диаметрально противоположную начальному положению учителя. Тогда ученику предстоит преодолеть расстояние 1, на это потребуется время, равное $\frac{1}{v}$. Однако учитель сможет добежать до точки B раньше: ему нужно будет пробежать половину окружности, т.е. расстояние $\pi = 3{,}1415\ldots$, и на это уйдет время, равное $\frac{\pi}{4v}<\frac{1}{v}$.

Значит, ученик не сможет убежать? Оказывается, сможет! Но для этого понадобится более сложная стратегия. Ученик добивается, чтобы он находился на значительном расстоянии от центра «в оппозиции» с учителем, т.е. на одном диаметре с учителем по разные стороны от центра (рис.1). И только после этого он плывет прямо в точку B. Реализуем этот план.

Решение. *Этап 1 – выход на окружность радиуса 1/4.* Разложим скорость ученика по двум направлениям (рис.2). Пусть величина скорости вдоль радиуса бассейна равна a, а величина скорости, перпендикулярной радиусу, равна b.

Пока ученик находится на расстоянии $r<\frac{1}{4}$ от центра, он может поддерживать оппозицию с учителем: на каждое движение учителя со скоростью $4v$ он отвечает движением по окружности радиусом r в

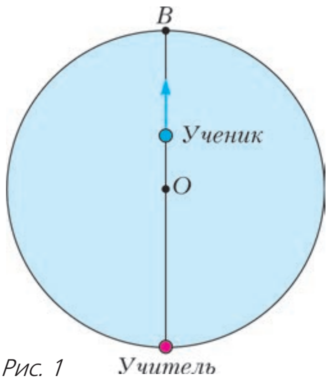

Рис. 1

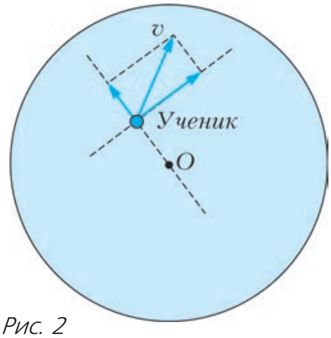

Рис. 2

противоположную сторону со скоростью $b = 4vr$ (из подобия окружностей). Так как $r < \frac{1}{4}$, то $b < v$. Следовательно, ученик может не только поддерживать оппозицию к учителю, двигаясь со скоростью b перпендикулярно радиусу, но и «включить» вторую компоненту скорости a, чтобы удаляться от центра окружности. Вторая компонента будет маленькая, чтобы выполнялось неравенство $a^2 + b^2 \le v^2$, но все же ненулевая. И пока $r < \frac{1}{4}$, ученик может удаляться от центра бассейна, постоянно оставаясь в оппозиции к учителю.

Этап 2 – полный вперед! Как только ученик попадет на окружность радиуса $\frac{1}{4}$, ему останется плыть дистанцию $\frac{3}{4}$ до точки B, и он это сделает быстрее учителя, поскольку $\frac{3}{4v} < \frac{\pi}{4}$.

Задача решена! Да нет, не совсем… Внимательный читатель, памятуя задачи 1 и 2, сразу заметит подвох: а не будет ли «причаливание» ученика к окружности радиуса $\frac{1}{4}$ длиться бесконечно долго? Причаливание происходит со скоростью $a = \sqrt{v^2 - b^2} = v\sqrt{1 - (4r)^2}$. Предлагаем читателю завершить рассуждение в следующем упражнении.

Упражнение 3. Воспользовавшись упражнением 2, докажите, что ученик выйдет на окружность радиуса $\frac{1}{4}$ за конечное время.

В задаче 3 есть и более простой способ обойти тонкие вопросы со временем причаливания. Достаточно выйти на окружность радиуса чуть меньше $\frac{1}{4}$, тогда скорость a удаления от центра будет все время больше положительной константы, и поэтому время выхода на эту окружность конечно!

Упражнения

4. Постройте траекторию выхода ученика на окружность радиуса $\frac{1}{4}$, если учитель все время бежит вокруг бассейна по часовой стрелке со скоростью $4v$.

5. Собачка бегает по большому кругу арены цирка со скоростью v. Как лев, находящийся в центре арены, может ее догнать (за конечное время!), если его максимальная скорость тоже равна v?

Замечание. Интересен вопрос, внешне сходный с упражнением 5:

Пусть собачка и лев могут двигаться со скоростью, не превышающей v, каким угодно образом внутри арены. Сможет ли лев догнать собачку за конечное время?

Забавно, что, в отличие от упражнения 5, лев не всегда сможет догнать собачку. Подробнее об этой задаче и близких интересных вопросах можно прочитать в статье Белы Боллобаша «The Lion and the Christian, and Other Pursuit and Evasion Games» (сборник «An Invitation to Mathematics»).

Задача о жучке на стебле бамбука

Эта задача в некотором смысле «о причаливании к бесконечности». Замечательна она не только сама по себе, но и по составу именитых ученых, когда-либо ее решавших. В заметке «Три эпизода» (журнал «Природа», №8 за 1990 г.) физик, академик Лев Борисович Окунь (1929–2015) вспоминает свои встречи с выдающимся ученым и человеком Андреем Дмитриевичем Сахаровым (1921–1989). На Международной конференции по физике в 1976 году в кулуарах Л.Б.Окунь предложил А.Д.Сахарову одну занимательную задачку (приводим условие с небольшими изменениями).

Задача 4. *В основании ростка бамбука длиной 1 метр сидит жучок. Бамбук постоянно растет (стебель при этом равномерно растягивается) со скоростью 1 метр в день. Жучок ползет по нему вверх с гораздо меньшей скоростью – 1 мм в день (относительно бамбука). Доползет ли он когда-нибудь до вершины?*

Казалось бы, ответ очевидно отрицательный: вершина будет каждый день удаляться от жучка почти на метр. Тем не менее, оказывается, что он доползет, причем за конечное время! Как такое возмож-

$a/h(2) = a/3$. Таким образом, отношение $x(2)/h(2)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$. Аналогично, после третьего дня отношение $x(3)/h(3)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$, и т.д. Таким образом, по прошествии k дней отношение $x(k)/h(k)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}\right)$.

На первый взгляд может показаться, что сумма в скобках невелика и множитель $a = 1/1000$ делает все произведение маленьким. Но это не так! В скобках – частичная сумма знаменитого *гармонического ряда* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, которая с ростом количества слагаемых растет до бесконечности. В самом деле, первое число ряда равно $\frac{1}{2}$, сумма следующих двух чисел больше $\frac{1}{2}$, сумма следующих 4 чисел снова больше $\frac{1}{2}$ (поскольку это 4 числа, каждое из которых больше $1/8$), далее идут 8 чисел, больших $1/16$, поэтому их сумма вновь больше $1/2$, и т.д. Так мы группируем числа в «пачки» с суммой больше $1/2$ в каждой. Следовательно, сумма всего ряда бесконечна! Поэтому найдется такое k, при котором отношение $x(k)/h(k)$ станет больше 1. Это означает, что по истечении этой k-й секунды наш неутомимый жучок точно доползет до вершины!

но? Поневоле вспомнишь слова Л.Д.Ландау, что наука позволяет человеку «понять вещи, которые он уже не в силах вообразить». Вот что пишет сам Л.Б.Окунь:

«И до, и после этого вечера я давал задачу разным людям. Одним для ее решения требовалось около часа, другим сутки, третьи оставались твердо убеждены, что жучок не доползет. Андрей Дмитриевич переспросил условие и попросил кусочек бумаги. Я дал ему пригласительный билет на банкет, и он тут же без всяких комментариев написал на обороте решение задачи. На все ушло около минуты».

А.Д.Сахаров придумал короткое решение с использование интегралов. Мы приведем другое решение с оценкой времени «причаливания».

Решение. Положим для краткости $a = 1/1000$ м, через h обозначим высоту бамбука (в данный момент времени), а через x обозначим высоту, на которой находится жучок. Таким образом, $x(0) = 0$, $h(0) = 1$. После первого дня длина бамбука станет равна $h(1) = 2$, а $x(1) > a$ (поскольку жучок не только ползет сам, но и поднимается за счет того, что растет бамбук). Поэтому отношение $x(1)/h(1)$ больше $a/2$. Если бы в этот момент жучок остановился, то отношение x/h далее бы не менялось. Но за счет того, что за второй день жучок вновь проползет a, отношение x/h увеличится не меньше чем на

Задача решена! И уж точно никакого подвоха нет: жучок достигнет вершины за конечное время. Но и здесь все не так просто! Нет, не ищите ошибок в решении, мы с вами все сделали верно. Дело в другом. В конце статьи (пример 3) мы получим точную формулу движения жучка. Оказывается, что он достигнет вершины примерно за $5 \cdot 10^{431}$ лет (пятерка и 431