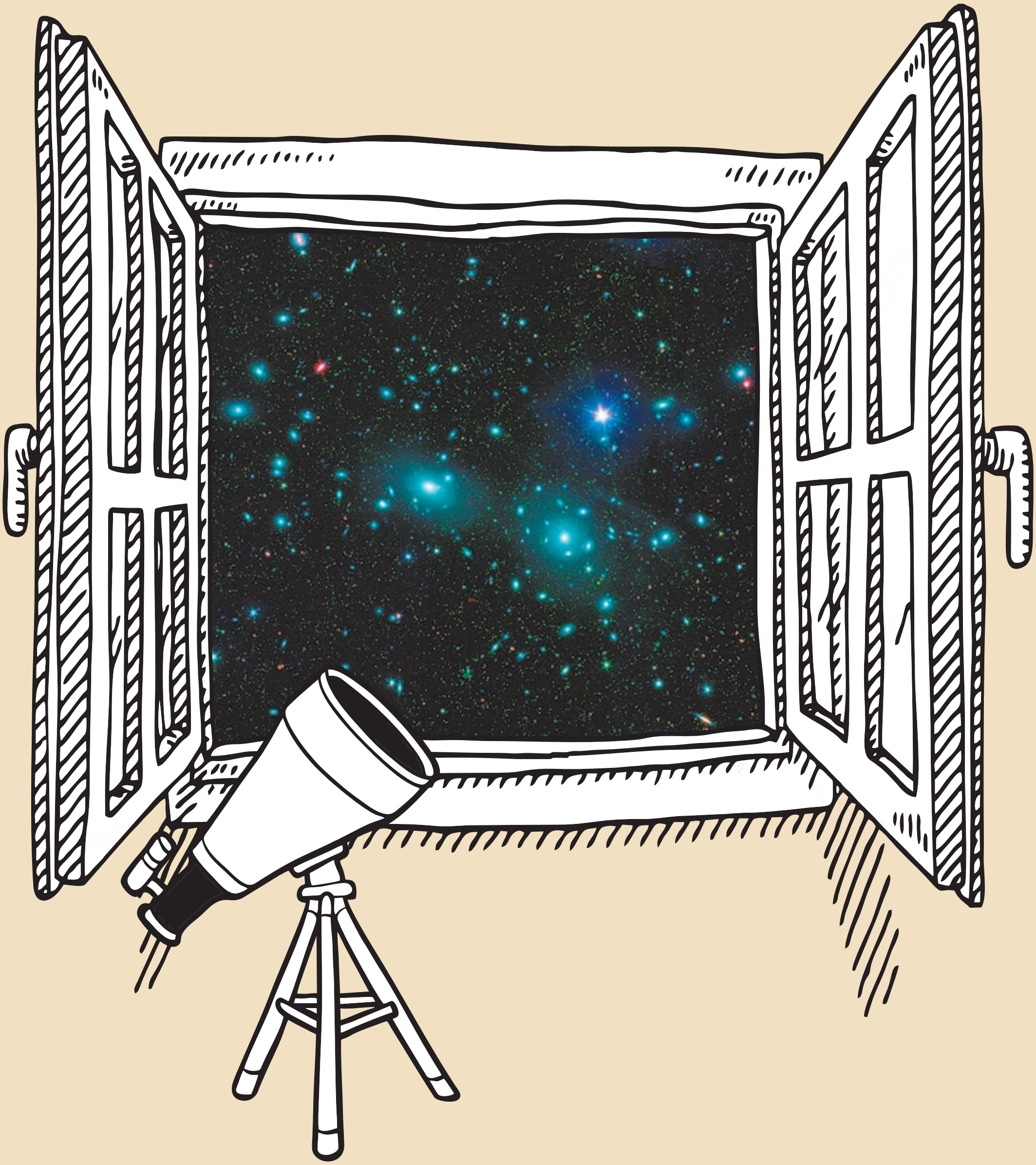
ОКТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2017 · № 10

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КВАНТ ОКТЯБРЬ 2017 №10

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Теорема Шаля в трех лицах

С.КУЗНЕЦОВ

Вернемся к вычислению композиции двух симметрий, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$.

Итак, на плоскости Лобачевского возможны три случая: (1) прямые a и b пересекаются; (2) прямые a и b параллельны; (3) прямые a и b расходятся.

В случае (1), как и в евклидовой теореме Шаля, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ – поворот на угол, в два раза больший угла между прямыми a и b (рис.16). Точки при этом движутся по

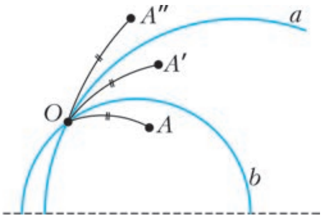


Рис. 16

окружностям с центром в точке O (рис.17). Заметим, что в модели Пуанкаре окружность в смысле Лобачевского оказалась

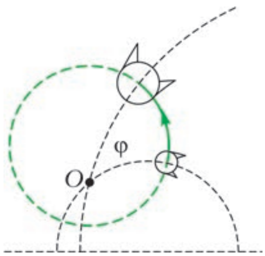


Рис. 17

евклидовой окружностью – однако «в лоб» это доказать не получится: центры в смысле Евклида и в смысле Лобачевского не совпадают. Доказать это можно с помощью одного из эквивалентных определений окружности; мы оставим это читателю в качестве упражнения (решение приведено в конце журнала).

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

В случае (2) сначала рассмотрим ситуацию, когда прямые a и b особые. Тогда, с евклидовой точки зрения, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть параллельный перенос вдоль абсолюта (рис.18). Таким образом, при этом преобразовании точки движутся вдоль прямых,

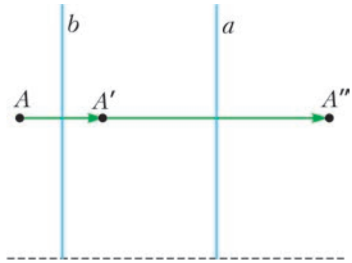


Рис. 18

параллельных абсолюту (рис.19). В геометрии Лобачевского эта траектория называется *орициклом*, т.е. предельным поло-

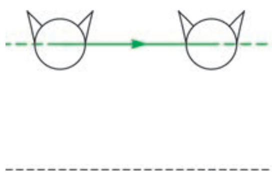


Рис. 19

жением окружностей, «окружностью бесконечно большого радиуса». Здесь мы имеем дело с семейством орициклов, перпендикулярных прямым a и b, т.е. наше движение есть *сдвиг по семейству орициклов*.

Ситуация, когда прямые a и b неособые, сводится к уже рассмотренной с помощью симметрии, переводящей их в особые. При этом «особый» орицикл, выглядящий как прямая, параллельная абсолюту, переходит в «неособый» – евклидову окружность, касающуюся абсолюта (рис.20). Этот орицикл, хотя и изображается окружностью, незамкнут (как и исходный): точка

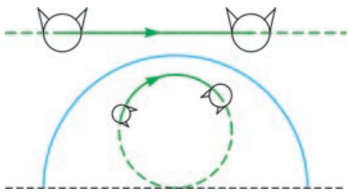


Рис. 20

касания с абсолютом лежит вне плоскости Лобачевского. Движение $\mathcal{F}'$ по новому орициклу *сопряжено* с движением $\mathcal{F}$ по исходному орициклу: $\mathcal{F}' = \mathbf{S}_l^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathbf{S}_l$. Здесь $\mathbf{S}_l^{-1}$ обозначает преобразование, обратное преобразованию $\mathbf{S}_l$; в данном случае это та же симметрия.

Сопряжение с помощью симметрии или с помощью другого изометрического преобразования – это как бы новый взгляд на ту же модель. Когда мы занимаемся геометрией на обычной евклидовой плоскости, мы можем вертеть листок с чертежом, выбирая более удобную точку зрения. Точно так же и здесь мы можем повернуть модель удобной к нам стороной – например, чтобы интересующая нас прямая оказалась особой. При сопряжении с помощью некоторого преобразования $\mathcal{D}$ движение $\mathcal{F}$ переходит в движение $\mathcal{F}'$ того же вида, но с другими параметрами. Например, симметрия $\mathbf{S}_l$ переходит в симметрию относительно другой прямой: $\mathcal{D}^{-1} \circ \mathbf{S}_l \circ \mathcal{D} = \mathbf{S}_{\mathcal{D}^{-1}(l)}$, поворот переходит в поворот относительно другого центра: $\mathcal{D}^{-1} \circ R_A^{\varphi} \circ \mathcal{D} = R^{\varphi}_{\mathcal{D}^{-1}(A)}$, и так далее.

Случай (3), когда прямые a и b расходятся, немного хитрее. Для начала докажем, что у любых двух расходящихся прямых есть общий перпендикуляр. Пусть расходящиеся прямые a и b неособые и выходят на абсолют в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2 соответственно, как показано на рисунке 21 (другие случаи расположения прямых a и b сводятся к этому с помощью инверсии). Проведем прямые через P_1 и P_2 и через Q_1 и Q_2; они пересекутся в точке O. Поскольку прямые a и b центрально симметричны относительно O, перпендикуляры, опущенные на них из O, образуют одну прямую. Эта прямая и есть искомый общий перпендикуляр h.

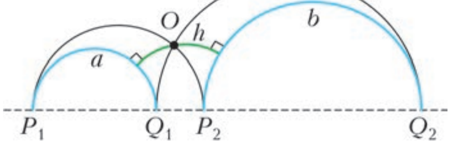


Рис. 21

Теперь применим симметрию, чтобы общий перпендикуляр h оказался особой прямой. Тогда a и b изобразятся концентрическими окружностями, а композиция симметрий (инверсий) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ станет гомотетией с центром в точке O (рис.22).

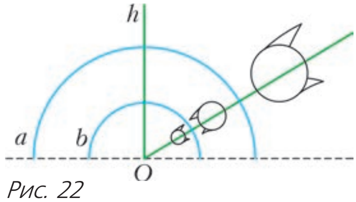


Рис. 22

Действительно, если при $\mathbf{S}_b$ точка A переходит в A', а при $\mathbf{S}_a$ точка A' переходит в A'', то

$$OA'' = R_2^2 / OA' =$$

$$= R_2^2 \Big/ \left(R_1^2 / OA \right) = \left(R_2^2 / R_1^2 \right) \cdot OA,$$

где R_1 и R_2 – радиусы (в евклидовом смысле) полуокружностей a и b.

Опять посмотрим на траектории, по которым движутся точки при этой гомотетии. Это будут лучи, исходящие из точки O на абсолюте. Если взять две точки на одном таком луче и опустить перпендикуляры (в смысле Лобачевского) на особую прямую (рис.23), то эти перпендикуляры будут равны в смысле Лобачевского, так как совмещаются движением. Значит, все точки этой линии равноудалены от данной особой прямой. Поэтому эта линия назы-

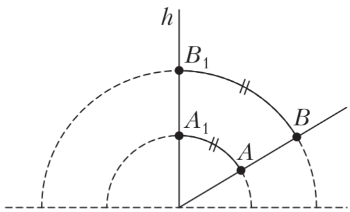


Рис. 23

вается *эквидистантой*, что значит «линия равных расстояний».

Как и в случае с движением по орициклу, к ситуации с неособой h можно перейти с помощью подходящей симметрии (рис.24).

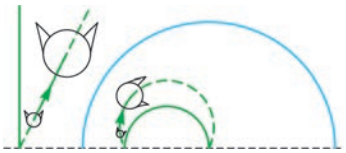


Рис. 24

Для краткости назовем движение по семейству эквидистант *скольжением*. Как мы знаем, скольжение вдоль прямой h есть композиция симметрий относительно двух прямых (a и b), перпендикулярных h. Понятие скольжения мы будем использовать и в двух других геометриях. В евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос вдоль прямой h (рис.25);

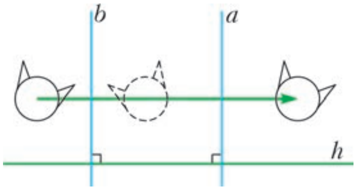


Рис. 25

роль эквидистант играют прямые, параллельные h. На сфере же скольжение оказывается поворотом. Это удобно представлять себе в «географических» терминах: если h считать экватором, то прямые a и b будут меридианами, а композиция $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ – поворотом вокруг северного (или, что то же самое, южного) полюса (рис.26). Роль эквидистант играют параллели (рис.27).

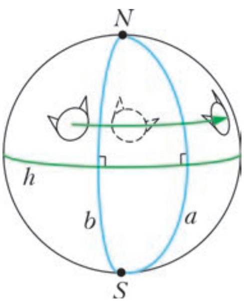


Рис. 26

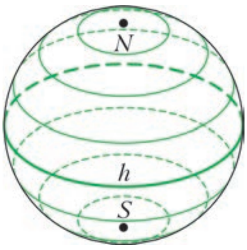


Рис. 27

Итак, на плоскости Лобачевского *композиция двух симметрий – это либо поворот, либо сдвиг по семейству орициклов, либо скольжение.* В евклидовом случае остаются только поворот и скольжение, а в сферическом и эти два случая совпадают и остается только поворот.

Заметим, что в каждом из трех случаев движение можно представить в виде композиции двух симметрий не единственным образом. Действительно, поворот $\mathbf{R}_A^\varphi$ равен $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ для *любых* двух прямых a и b, пересекающихся в точке A под углом $\varphi/2$ (напомним, что угол считается со знаком: важно, в каком порядке взяты его стороны). Следовательно, в качестве прямой a можно взять произвольную прямую, проходящую через точку A. Вторая прямая при этом определяется однозначно. То же самое происходит и в случаях (2) и (3). Для (2), перейдя с помощью сопряжения к особому случаю, мы можем взять в качестве a любую особую прямую, тогда b будет особой прямой на данном расстоянии от a. Для (3) в качестве a можно взять любую прямую, перпендикулярную h.

Для единообразия назовем то множество, из которого мы можем выбирать прямую a, *пучком* прямых. В случае (1) пучок состоит из прямых, проходящих через данную точку; в случае (2) – из параллельных прямых; наконец, в случае (3) – из прямых, перпендикулярных данной прямой h. Для евклидовой плоскости случаи (2) и (3) совпадают: пучок параллельных прямых и есть пучок прямых, перпендикулярных данной. На сфере же возможен только случай (1). Таким образом, во всех трех геометриях верно следующее утверждение.

Лемма о замене симметрий: *Композицию $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ можно записать также в виде $\mathbf{S}_{a_1} \circ \mathbf{S}_{b_1}$, где одна из прямых a_1 и b_1 выбирается произвольно из пучка, содержащего прямые a и b (другая прямая определяется однозначно).*

Эта лемма пригодится нам для вычисления **композиции трех симметрий**, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$. Постараемся провести рассуждения единообразно для всех трех геометрий: мы будем пользоваться только возможностью опускать перпендикуляр из данной точки на данную прямую, возможностью проводить прямую через две точки и сформулированной выше леммой о замене симметрий.

Сначала заменим прямые b и c на b_1 и c_1 так, что $\mathbf{S}_{b_1} \circ \mathbf{S}_{c_1} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ и прямые a и b_1 пересекаются. Для этого достаточно взять на прямой a произвольную точку и выбрать из пучка, содержащего прямые b и c, прямую b_1, проходящую через эту точку (в любом пучке, независимо от его вида, найдется прямая, проходящая через данную точку). Теперь выберем в пучке, содержащем прямые a и b_1, прямую b_2, перпендикулярную c_1 – иначе говоря, опустим перпендикуляр из точки пересечения прямых a и b_1 на прямую c_1 (рис. 28).

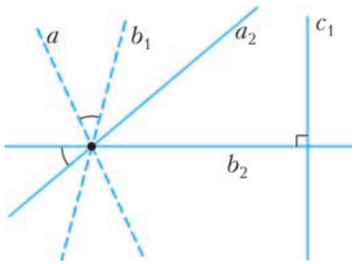


Рис. 28

После этого заменим прямые a и b_1 на прямые a_2 и b_2 с сохранением композиции первых двух симметрий ($\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{b_2} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_{b_1}$). Наконец, заменим прямые b_2 и c_1 на прямые b_3 и c_3, где b_3 – перпендикуляр, опущенный из точки пересечения прямых b_2 и c_1 на прямую a_2 (рис.29). Заметим, что угол между прямыми при этом не меняется: b_3 по-прежнему перпендикулярна c_3.

Итак, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c = \mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{b_3} \circ \mathbf{S}_{c_3}$, где $a_2 \perp b_3$ и $b_3 \perp c_3$, т.е. b_3 – общий перпендикуляр прямых a_2 и c_3. Напоследок воспользуемся тем фактом, что симметрии относительно перпендикулярных прямых перестановочны (рис.30). Действительно,

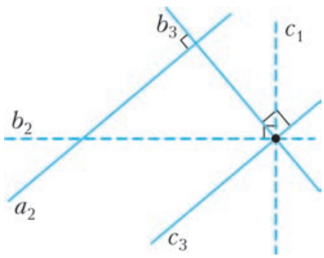


Рис. 29

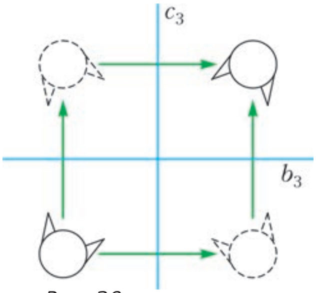


Рис. 30

их композиция есть поворот на 180° относительно их точки пересечения, а для угла 180° не имеет значения, в каком направлении его откладывать. Значит, наша композиция трех симметрий преобразуется в $\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{c_3} \circ \mathbf{S}_{b_3}$, причем $\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{c_3}$ как композиция симметрий относительно прямых с общим перпендикуляром b_3 есть скольжение вдоль b_3.

Как отмечено выше, эти рассуждения верны во всех трех геометриях (напомним, что в евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос, а в сферическом – поворот). Значит, во всех трех геометриях композиция трех симметрий представляется как композиция симметрии и скольжения вдоль той же прямой, т.е. является *скользящей симметрией*.

Как и в евклидовом случае, обычная симметрия является частным случаем скользящей: если прямые a_2 и c_3 совпадают, то скольжения на самом деле нет.

Скользящая симметрия плоскости Лобачевского изображена на рисунках 31 и 32

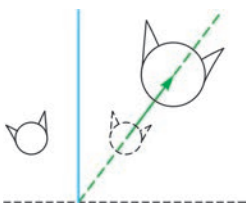


Рис. 31

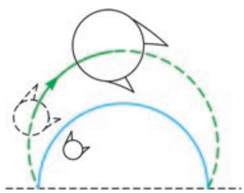


Рис. 32

(Продолжение см. на с. 10)

Принцип 80 : 20 в биологии

А.МИНЕЕВ

Принцип 80:20 широко известен и «работает» в самых разных областях человеческой деятельности, хотя и носит оттенок таинственности, загадки и парадокса. Другое его название – принцип Парето, по имени итальянского социолога и экономиста. В самом конце XIX века, обрабатывая статистические данные, он обнаружил, что 20% населения владеют 80% всех материальных ресурсов. Соответственно, 80% населения принадлежат оставшиеся 20% ресурсов. Дальше – больше. Выяснилось, что 20% покупателей приносят 80% прибыли, 80% пользователей посещают 20% сайтов и так далее и тому подобное. В попытках использования этого принципа дошли до того, что крупнейшие производители программного обеспечения (IBM, Apple, Microsoft, Lotus), обнаружив в свое время, что 80% времени затрачивается на обработку 20% команд, решились на существенную переделку своего программного обеспечения. Обратив особое внимание на скорость обработки 20% наиболее используемых команд, они повысили общую производительность (так называемые RISC-процессоры). А за счет упрощения обработки оставшихся 80 % команд сделали компьютеры более дешевыми и простыми в обращении.

Классическое правило 80:20 гласит: «80% работы выполняют 20% сотрудников и наоборот». К этому шутливому высказыванию есть и соответствующее дополнение: «80% считают, что они входят в те самые 20% наиболее ценных». Наверное, что-то и в этом есть, но такую тему развивать не решимся, к физике и биологии она имеет малое отношение…

Проявления подобного принципа (в чуть иной пропорции) обнаружились и «в мировом масштабе» – как вырвавшись во вселенские просторы, так и спрятавшись в глубь генома. При этом и в попытках познать структуру Вселенной, и при расшифровке генома человека было обнаружено нечто совсем загадочное и бросающее вызов, столкнувшись даже не с 80:20, а с подавляющим 95:5.