



В. Д. Черненко

# Расчет средств непрерывного транспорта



Электронный аналог печатного издания: Черненко В. Д. Расчет средств непрерывного транспорта : учебное пособие. — СПб. : Политехника, 2008. — 386 с. : ил.

УДК 621.867.212.7  
ББК 22.11  
Ч-49



**ПОЛИТЕХНИКА**  
**ИЗДАТЕЛЬСТВО**  
Санкт-Петербург 2011

[www.polytechnics.ru](http://www.polytechnics.ru)

*Допущено УМО вузов РФ по образованию  
в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по специальности «Подъемно-транспортные, строительные,  
дорожные машины и оборудование» направления подготовки  
«Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы»*

*Рецензенты:*

Кафедра «Горная механика и транспорт» Московского государственного горного университета (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор **В. И. Галкин**, доктор технических наук, профессор **В. Г. Дмитриев**); **В. Н. Смирнов**, доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (кафедра «Транспортные и технологические системы»)

**Черненко, В. Д.**

Ч-49 Расчет средств непрерывного транспорта : учебное пособие. — СПб. : Политехника, 2011. — 386 с. : ил.

ISBN 978-5-7325-0670-5

В учебном пособии изложены методы расчета различных средств непрерывного транспорта, основанные на рассмотрении напряженно-деформированного состояния сыпучих грузов с позиций статистической теории предельного равновесия Кулона—Мора, а напряженно-деформированного состояния конвейерных лент — по теории первоначально-напряженных движущихся орто-тропных оболочек.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов вузов, обучающихся по специальности «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование». Может быть использована научными и инженерно-техническими работниками горнодобывающей, машиностроительной, химической и других отраслей промышленности.

УДК 621.867.212.7

ББК 22.11

© В. Д. Черненко, 2011

© Издательство «Политехника»,  
лит. обработка, графика,  
оригинал-макет, 2011

ISBN 978-5-7325-0670-9

## Оглавление

Введение .....	7
<b>Глава 1</b>	
<b>Основные понятия теории деформаций и напряжений .....</b>	<b>10</b>
1.1. Деформации и перемещения. Тензор конечных деформаций . . .	–
1.2. Поле скоростей сыпучего груза. Условия сплошности .....	17
1.3. Тензор напряжений .....	21
1.4. Условия предельного равновесия сыпучих грузов .....	24
1.5. Зависимость между напряжениями и деформациями .....	29
<b>Глава 2</b>	
<b>Статистическая механика сыпучих грузов .....</b>	<b>34</b>
2.1. Механические свойства сыпучих грузов .....	–
2.2. Уравнения состояния сыпучих грузов .....	47
2.3. Дифференциальные уравнения равновесия и движения .....	52
2.4. Граничные и начальные условия .....	55
2.5. Некоторые методы решения задач механики сыпучих грузов .	57
2.5.1. Приближенные аналитические методы расчета .....	–
2.5.2. Обоснование методов расчета распределения напряжений в сыпучем грузе .....	67
2.5.3. Численные методы расчета .....	72
<b>Глава 3</b>	
<b>Общая теория расчета конвейерных лент .....</b>	<b>83</b>
3.1. Деформация конвейерной ленты и ее срединной поверхности .	–
3.2. Геометрия деформированной конвейерной ленты .....	87
3.3. Равновесие элемента деформированной конвейерной ленты в усилиях и моментах .....	95
3.4. Соотношения между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности .....	98
3.5. Общие уравнения теории деформированной конвейерной ленты для динамического случая и возможные упрощения .....	101
<b>Глава 4</b>	
<b>Обратные задачи геометрически нелинейных конвейерных лент . .</b>	<b>106</b>
4.1. Расчет нагрузки от изгиба ленты на рабочем участке конвей- еров с лентой повышенной желобчатости и трубчатых конвейеров	–
4.2. Расчет нагрузки от изгиба лент на криволинейном участке двухленточных конвейеров .....	114
4.3. Определение нагрузки от изгиба ленты на криволинейном участке трубчатого конвейера .....	116
4.4. Расчет нагрузки от изгиба разномодульной конвейерной ленты на рабочем участке в цилиндрическую оболочку произвольной формы .....	119
<b>Глава 5</b>	
<b>Расчет конвейерных лент на рабочем участке .....</b>	<b>126</b>

5.1. Расчет общей прочности конвейрной ленты . . . . .	126
5.2. Расчет плоских конвейрных лент . . . . .	130
5.3. Расчет желобчатых конвейрных лент . . . . .	137
5.4. Динамика ленточных конвейров . . . . .	140
5.4.1. Продольные колебания конвейрной ленты . . . . .	—
5.4.2. Поперечные колебания конвейрной ленты . . . . .	143
5.5. Расчет конвейрных лент с поперечными перегородками . . . . .	147
5.6. Расчет ленты на участке загрузки трубчатого конвейра . . . . .	151

## **Глава 6**

### **Устойчивость сыпучего груза на рабочем полотне**

<b>крутонаклонных конвейров . . . . .</b>	<b>155</b>
6.1. Расчет устойчивости сыпучего груза на рабочем полотне конвейров с прижимной лентой . . . . .	—
6.2. Расчет устойчивости сыпучего груза на полотне движущейся ленты . . . . .	172
6.3. Расчет устойчивости груза на рабочей ветви трубчатого конвейра с обжатием . . . . .	176
6.4. Расчет устойчивости сыпучего груза на рабочем полотне крутонаклонного конвейра с прижимными лентами . . . . .	181
6.5. Расчет устойчивости сыпучего груза на полотне двухленточного крутонаклонного конвейра с подпором транспортируемого материала на загрузочном участке . . . . .	184
6.6. Расчет устойчивости сыпучего груза на рабочем полотне трубчатого конвейра с подпором транспортируемого материала на загрузочном участке . . . . .	189

## **Глава 7**

### **Распределение давления от сыпучего груза . . . . .**

7.1. Определение поля напряжений в сыпучем грузе на рабочем полотне ленточно-цепных конвейров . . . . .	—
7.2. Исследование распределения напряжений в сыпучем грузе на рабочем участке скребковых конвейров . . . . .	200
7.3. Определение давления от сыпучего груза по перегородке и ленте крутонаклонных конвейров с перегородками . . . . .	206
7.4. Теоретические исследования распределения напряжений в бункерных установках . . . . .	208
7.5. Расчет бункерных установок конической формы . . . . .	213

## **Глава 8**

### **Расчет оптимальных геометрических параметров**

<b>рабочего полотна крутонаклонных конвейров . . . . .</b>	<b>217</b>
8.1. Выбор геометрических характеристик рабочей ветви ленточных конвейров . . . . .	—
8.2. Плоская лента с перегородками . . . . .	220
8.3. Плоская лента с вертикальными продольными бортами и	

перегородками . . . . .	224
8.4. Расчет геометрических параметров желобчатой ленты с перегородками . . . . .	231
8.5. Расчет V-образной конвейерной ленты . . . . .	236
8.6. Расчет геометрических характеристик ленты повышенной желобчатости . . . . .	238
8.7. Расчет ленты с перегородками, изгибающейся по окружности . . . . .	242
<b>Глава 9</b>	
<b>Расчет ленточных конвейеров различных типов . . . . .</b>	<b>247</b>
9.1. Ленточные конвейеры . . . . .	—
9.1.1. Общее устройство . . . . .	—
9.1.2. Тяговый расчет ленточных конвейеров. Определение мощности привода . . . . .	251
9.1.3. Расчет прочности ленты . . . . .	254
9.2. Конвейеры с прижимной лентой . . . . .	257
9.2.1. Конструктивные особенности конвейеров с прижимной лентой . . . . .	—
9.2.2. Тяговый расчет конвейеров с прижимной лентой . . . . .	261
9.3. Двухленточные конвейеры . . . . .	268
9.3.1. Конструктивные особенности и принцип работы двухленточных конвейеров . . . . .	—
9.3.2. Расчет устойчивости штучного груза на крутонаклонном участке . . . . .	270
9.3.3. Тяговый расчет двухленточных конвейеров . . . . .	273
9.4. Трубчатые конвейеры . . . . .	277
9.4.1. Конструктивные схемы и особенности работы трубчатых конвейеров . . . . .	—
9.4.2. Тяговый расчет трубчатых конвейеров . . . . .	278
9.5. Ленточные конвейеры с перегородками . . . . .	282
9.5.1. Принцип действия и конструктивные особенности конвейеров с перегородками . . . . .	—
9.5.2. Тяговый расчет конвейеров с перегородками . . . . .	283
9.6. Ленточно-цепные конвейеры . . . . .	285
9.6.1. Конструкция и принцип действия ленточно-цепных конвейеров . . . . .	—
9.6.2. Тяговый расчет ленточно-цепных конвейеров . . . . .	287
<b>Глава 10</b>	
<b>Специальные машины непрерывного транспорта . . . . .</b>	<b>292</b>
10.1. Пластинчатые конвейеры . . . . .	—
10.1.1. Конструктивные особенности пластинчатых конвейеров . . . . .	—
10.1.2. Расчет пластинчатых конвейеров . . . . .	294

10.2. Скребокковые конвейеры . . . . .	298
10.2.1. Конструктивные особенности и принцип работы скребокковых конвейеров . . . . .	–
10.2.2. Расчет скребокковых конвейеров . . . . .	299
10.3. Подвесные конвейеры . . . . .	305
10.3.1. Общая характеристика . . . . .	–
10.3.2. Расчет подвесных конвейеров . . . . .	307
10.3.3. Подвесные толкающие конвейеры . . . . .	310
10.4. Конвейеры без гибкого тягового органа . . . . .	313
10.4.1. Роликовые конвейеры . . . . .	–
10.4.2. Приводные роликовые конвейеры . . . . .	316
10.4.3. Наклонные плоскости (шлюзы) . . . . .	317
10.4.4. Гравитационные устройства . . . . .	318

### **Глава 11**

<b>Надежность подъемно-транспортных машин . . . . .</b>	<b>322</b>
11.1. Основные понятия надежности . . . . .	–
11.2. Надежность простой системы . . . . .	326
11.3. Надежность резервированной системы . . . . .	328
11.4. Надежность резервированной линии транспортирующих машин . . . . .	331
11.5. Эксплуатационная надежность подъемно-транспортных машин . . . . .	336
11.6. Учет зависимости отказов при оценке надежности . . . . .	340

### **Глава 12**

<b>Логистика транспортирующих систем . . . . .</b>	<b>342</b>
12.1. Общие понятия логистики . . . . .	–
12.2. Основная задача линейного программирования. Симплекс- метод . . . . .	345
12.3. Табличный алгоритм отыскания оптимального решения . . . . .	349
12.4. Оптимизация размещения погрузочно-разгрузочных узлов на промышленном предприятии . . . . .	353
12.5. Транспортная задача транспортирующих систем . . . . .	358
12.6. Решение транспортной задачи транспортирующих систем методом потенциалов . . . . .	363
12.7. Транспортная задача с неправильным балансом . . . . .	368
12.8. Транспортная задача по критерию времени . . . . .	370
12.9. Задача нахождения кратчайшего пути . . . . .	372
12.10. Алгоритм определения максимального грузопотока . . . . .	378
Заключение . . . . .	383
Литература . . . . .	384

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

### 1.1. Деформации и перемещения. Тензор конечных деформаций

Под *деформацией тела* будем понимать изменение расстояния между его точками при движении. Если изменение расстояний отсутствует, то тело движется как абсолютно жесткое.

Положения точек некоторого тела в недеформированном состоянии определяются их проекциями  $x, y, z$  на оси прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$ . В результате деформации точки тела получают по координатным осям перемещения  $u, v, w$ . Тогда окончательное положение некоторой точки в декартовой системе определится следующими координатами [24]:

$$\begin{aligned}\xi &= x + u(x, y, z); \\ \eta &= y + v(x, y, z); \\ \zeta &= z + w(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где функции  $u, v, w$  в силу непрерывности деформаций будем считать непрерывными вместе со всеми частными производными по  $x, y, z$ .

Из формул (1.1) следует, что координаты точек тела до деформации  $x, y, z$  для деформированного состояния будут криволинейными, т. е. система координат  $x, y, z$  при деформации как бы увлекается волокнами тела и деформируется. При этом координаты рассматриваемых точек недеформированного тела

совпадают (численно) с координатами деформированного тела.

Пусть элемент тела  $MN$  (рис. 1.1) с декартовыми координатами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , квадрат длины которого равен

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.2)$$

в результате деформации займет положение элемента  $M_1N_1$  с декартовыми координатами  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$ , квадрат длины которого равен

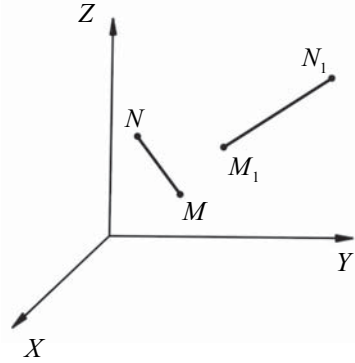


Рис. 1.1

$$ds_2^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2. \quad (1.3)$$

Рассматривая координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  (1.1) как функции переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , находим их дифференциалы:

$$d\xi = dx + du; \quad d\eta = dy + dv; \quad d\zeta = dz + dw, \quad (1.4)$$

где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz;$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Составляя разность квадратов  $ds_2^2$  и  $ds_1^2$  и подставляя в (1.3) значения (1.4),

$$ds_2^2 - ds_1^2 = 2(\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz), \quad (1.5)$$

где

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right];$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}; \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Параметры  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  называются *компонентами тензора деформации* и полностью характеризуют деформацию в некоторой точке тела

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{array} \right\}. \tag{1.7}$$

В координатной форме любой компонент тензора конечных деформаций имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + g^{mn} u_{im} u_{nj}), \tag{1.8}$$

где  $u_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_k \Gamma_{ij}^k$ ;  $u_i$  — ковариантные компоненты вектора смещений;  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля второго рода;  $g^{mn}$  — составляющие контравариантного фундаментального тензора [30].

Компоненты контравариантного фундаментального тензора определяются зависимостями

$$g^{ij} = \frac{G_{ij}}{g}, \tag{1.9}$$

где  $G_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $g_{ij}$  в фундаментальном определителе  $g$ ;

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Символы Кристоффеля второго рода определяются формулами

$$\Gamma_{mn}^k = g^{kl} \Gamma_{l, mn}, \quad (1.11)$$

где в правой части по одинаковым верхним и нижним индексам ведется суммирование;  $\Gamma_{n, km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} \right)$  называются символами Кристоффеля первого рода.

Следует заметить, что функции  $\Gamma_{mn}^k$  симметричны относительно перестановки нижних индексов, т. е.  $\Gamma_{mn}^k = \Gamma_{nm}^k$ .

Используя ковариантные компоненты фундаментального тензора, формулы связи символов Кристоффеля первого и второго рода имеют вид

$$\Gamma_{k, mn} = g_{kl} \Gamma_{mn}^l. \quad (1.12)$$

Приведем значения компонентов фундаментального тензора и символов Кристоффеля для цилиндрической и сферической систем координат.

Формулы связи между декартовыми  $(x, y)$  и цилиндрическими  $(r, \varphi)$  координатами имеют вид

$$x + iy = \rho(r, \varphi) + i\theta(r, \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.13)$$

Отсюда ковариантные компоненты фундаментального тензора равны:

$$g_{11} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 = 1; \quad g_{22} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 = r^2; \quad (1.14)$$

$$g_{33} = 1; \quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0.$$

Числовые индексы 1, 2, 3 в соотношениях (1.14) соответствуют координатным направлениям  $r, \theta$  и  $z$  соответственно.

Контравариантные компоненты фундаментального тензора будут иметь вид

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}; \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}; \quad g^{33} = 1. \quad (1.15)$$

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,21} = -\Gamma_{1,22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = r; \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -r. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Формулы связи между декартовыми и сферическими координатами  $r, \varphi, \theta$  имеют вид:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta; \quad y = r \sin \varphi \sin \theta; \quad z = r \cos \theta. \quad (1.17)$$

Ковариантные компоненты фундаментального тензора равны

$$g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{33} = r^2; \quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0. \quad (1.18)$$

Здесь индексам 1, 2, 3 соответствуют координатные направления  $r, \varphi, \theta$ .

Символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,21} = -\Gamma_{1,22} &= r; \quad \Gamma_{3,13} = -\Gamma_{1,33} = r^2 \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{3,23} = -\Gamma_{2,33} &= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta; \quad \Gamma_{22}^1 = -r; \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В случае малой деформации компоненты  $\varepsilon_{ij}$  малы по сравнению с единицей. Если малы и углы поворота, то в формулах (1.8) произведениями  $u_{im}u_{nj}$  можно пренебречь, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}). \quad (1.20)$$

Отсюда, на основании формул (1.11), (1.13) — (1.16), компоненты деформации (1.20) в цилиндрической системе координат составляют:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \varepsilon_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Используя зависимости (1.11), (1.17) — (1.19), получим компоненты деформации (1.20) в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; & \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \\ &+ \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}; & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Нетрудно заметить, что относительное изменение объема равно

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad (1.23)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Поскольку всякая деформация может быть осуществлена растяжением (сжатием) по трем взаимно перпендикулярным направлениям, которые обычно называют главными направлениями, то тензор деформации (1.7), как симметричный тензор  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , может быть приведен к главным осям

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{array} \right\}, \quad (1.24)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — главные удлинения.

Разности

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1; \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (1.25)$$

принято называть главными сдвигами.

С другой стороны, главные удлинения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.26)$$

Запишем кубическое уравнение (1.26) в виде

$$\lambda^3 - J_1(T_\varepsilon)\lambda^2 + J_2(T_\varepsilon)\lambda - J_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (1.27)$$

Коэффициенты кубического уравнения (1.27) не меняются при переходе к другой прямоугольной системе координат, т. е. инвариантны, и имеют вид:

$$J_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz};$$

$$J_2(T_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix}; \quad (1.28)$$

$$J_3(T_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Главные удлинения также не зависят от выбора системы координат.

Инварианты тензора деформации (1.28) в главных осях имеют вид:

$$J_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon;$$

$$J_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \quad (1.29)$$

$$J_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Тензоры деформации, у которых первый инвариант равен нулю, называются девиаторами деформации. Любой тензор деформации может быть представлен в виде суммы шарового тензора и девиатора деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon I + D_\varepsilon, \quad (1.30)$$

где  $I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$  — единичный тензор;

$$D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}\varepsilon \end{Bmatrix}; \quad (1.31)$$

шаровой тензор  $\frac{1}{3}\varepsilon I$  характеризует объемное расширение, а девиатор деформации — изменение формы элемента среды.

Особую роль в теории деформации играет второй инвариант девиатора деформаций, который характеризует суммарный показатель изменения формы

$$J_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} \left[ (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 3(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2) \right]. \quad (1.32)$$

Радикус из второго инварианта девиатора деформаций называется интенсивностью деформаций сдвига.

## 1.2. Поле скоростей сыпучего груза. Условия сплошности

Движение сыпучего груза в фиксированной части пространства характеризуется векторным полем скоростей частиц. В кинематике сыпучей среды скорость произвольной частицы в

потоке испытывает жесткое перемещение, определяемое поступательной скоростью  $\bar{v}$  и вращением с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}.$$

Обозначим составляющие скорости частицы на оси декартовой системы координат через  $v_x, v_y, v_z$ . Компоненты вектора ускорения  $\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}$  движущейся частицы в переменных Эйлера будут равны:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Кроме жесткого смещения элементарный объем сыпучего груза за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  испытывает бесконечно малую деформацию. Разделив компоненты тензора деформации на  $dt$ , получим тензор скорости деформации

$$T_{\dot{\epsilon}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{\epsilon}_{xx} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{yy} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{xz} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{yz} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{array} \right\}. \quad (1.34)$$

Компоненты тензора скорости деформации  $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, \dot{\epsilon}_{zz}$  характеризуют скорости удлинений линейных элементов в направлении координатных осей, а компоненты  $\dot{\epsilon}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz}, \dot{\epsilon}_{xz}$  характеризуют скорости сдвигов, т. е. определяют скорости изменения первоначально прямых углов.

В прямоугольной системе координат компоненты тензора скорости деформации имеют вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{v_k (\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik})}{\sqrt{g_{ii} g_{jj} g_{kk}}} \right], \quad (1.35)$$

где  $\Gamma_{i,jk}$  — символы Кристоффеля первого рода;  $g_{ij}$  — ковариантные компоненты фундаментального тензора.

В дальнейшем довольно часто будут встречаться компоненты тензора скорости деформаций в прямоугольной системе координат, поэтому приведем их здесь:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

В случае цилиндрической системы координат компоненты тензора скорости деформации будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi z} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}; \\ \dot{\varepsilon}_{rz} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

В сферических координатах  $r, \varphi, \theta$  компоненты тензора скорости деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{v_r}{r}; \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\theta \operatorname{ctg} \varphi \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}; \\ \dot{\varepsilon}_{\theta r} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}; \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Скорость относительного объемного расширения равна

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij} \delta_{ij} = \operatorname{div} \bar{v}. \quad (1.39)$$



Для несжимаемой сыпучей среды получим

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) представляет собой условие неразрывности (сплошности) потока в декартовой системе координат. Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (1.41)$$

а в сферической системе координат —

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (1.42)$$

Инварианты тензора скорости деформаций  $T_{\dot{\varepsilon}}$  и дивергента  $D_{\dot{\varepsilon}}$  могут быть получены формально простой заменой в выражениях (1.28), (1.29), (1.32)  $\varepsilon_{ij}$  на  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ . В случае несжимаемой среды  $\dot{\varepsilon} = 0$  интенсивность скоростей деформаций сдвига равна

$$\sqrt{J_2(D_{\dot{\varepsilon}})} = \left( \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.43)$$

Поскольку шесть скалярных функций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  выражаются через три  $v_i$ , то между  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  должны существовать соотношения. Именно компоненты скорости деформации удовлетворяют шести условиям совместности скоростей деформации, аналогичным условиям совместности Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{xy}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{xz}}{\partial x \partial z}; \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{yz}}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\epsilon}_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\epsilon}_{xz}}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\epsilon}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\epsilon}_{xy}}{\partial z} \right).$$

Соотношения (1.44) легко доказываются подстановкой в них выражений (1.36).

### 1.3. Тензор напряжений

Под действием внешних сил между частицами тела возникают внутренние силы взаимодействия. Интенсивность внутренних сил называют *напряжением*. Мерой интенсивности внутренних сил принято считать отношение растягивающих (сжимающих) усилий к площади поперечного сечения, на которое они действуют.

Пусть в сечении тела на произвольно ориентированной площадке с нормалью  $\bar{n}$  (рис. 1.2) действует вектор напряжения  $\bar{P}_n$ . Проекцию вектора  $\bar{P}_n$  на нормаль к площадке называют *нормальным напряжением* и обозначают  $\bar{\sigma}_n$ , проекцию на касательную называют *касательным напряжением* на данной площадке и обозначают  $\bar{\tau}_n$ .

Напряжение в некоторой точке тела на любой площадке определено, если известны напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_{xx} \cos \widehat{nx} + \tau_{xy} \cos \widehat{ny} + \tau_{xz} \cos \widehat{nz}; \\ P_{ny} &= \tau_{xy} \cos \widehat{nx} + \sigma_{yy} \cos \widehat{ny} + \tau_{yz} \cos \widehat{nz}; \\ P_{nz} &= \tau_{xz} \cos \widehat{nx} + \tau_{yz} \cos \widehat{ny} + \sigma_{zz} \cos \widehat{nz}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

где  $P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$  — проекции напряжения  $\bar{P}_n$  на координатные оси  $x, y, z$ ;  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  — нормальные, а  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям  $x, y, z$ .

Напряженное состояние в данной точке тела характеризуется симметричным тензором напряжения  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ :

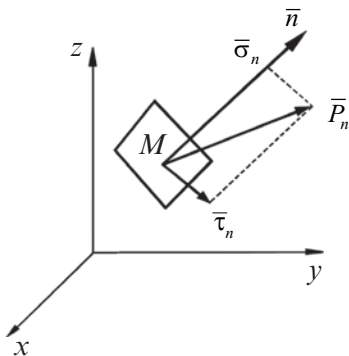


Рис. 1.2

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.46)$$

Здесь  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — компоненты тензора напряжений. Теория напряженного состояния при условии, что компонентами тензора деформаций (1.7) являются не сами сдвиги, а половины сдвигов, оказывается совершенно подобной теории деформированного состояния.

Проектируя вектор  $\bar{P}_n$  на направление нормали к площадке, нормальное напряжение  $\sigma_n$ , выраженное через компоненты тензора напряжений, имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \widehat{nx} + \sigma_{yy} \cos^2 \widehat{ny} + \sigma_{zz} \cos^2 \widehat{nz} + 2\tau_{xy} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{ny} + 2\tau_{xz} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{nz} + 2\tau_{yz} \cos \widehat{ny} \cos \widehat{nz}. \quad (1.47)$$

Касательное напряжение  $\tau_n$  на данной площадке равно

$$\tau_n = \left( P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2 - \sigma_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.48)$$

Нормали к трем взаимно перпендикулярным площадкам, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными направлениями тензора напряжений. Соответствующие напряжения называются главными нормальными напряжениями и обозначаются  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Тензор напряжений, отнесенный к главным осям напряжений, имеет вид

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.49)$$

Физическая интерпретация в данном случае состоит в том, что напряженное состояние в рассматриваемой точке вызвано растяжением (сжатием) окрестности точки в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

В сечениях, проходящих через главные оси и делящих углы между главными направлениями пополам, касательные напряжения достигают экстремальных значений и называются глав-

ными касательными напряжениями

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1); \quad \tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (1.50)$$

При  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  касательное напряжение принимает наибольшее значение  $\tau_{\max} = -\tau_2$  на площадке, проходящей через ось  $\sigma_2$ , и называется максимальным касательным напряжением.

Инварианты тензора напряжений находят аналогично инвариантам (1.29) и в главных осях определяются коэффициентами кубического уравнения

$$\lambda^3 - J_1(T_\sigma)\lambda^2 + J_2(T_\sigma)\lambda - J_3(T_\sigma) = 0, \quad (1.51)$$

т. е.

$$\begin{aligned} J_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \equiv 3\sigma; \\ J_2(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ J_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Тензор напряжений может быть представлен в виде суммы шарового тензора  $\sigma I$ , соответствующего среднему (гидростатическому) давлению в точке, и девиатора напряжений  $D_\sigma$ , характеризующего касательные напряжения в точке

$$\sigma_{ij} = \sigma I + D_\sigma, \quad (1.53)$$

где  $I$  — единичный тензор;

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{Bmatrix}. \quad (1.54)$$

Инварианты девиатора напряжений (1.54) определяются аналогично инвариантам тензора напряжений. В дальнейшем нам понадобится первый инвариант тензора напряжений  $J_1(T_\sigma)$ , который характеризует среднее, или гидростатическое давление в точке, и второй инвариант девиатора напряжений

$$\begin{aligned} J_2(D_\sigma) &= \frac{1}{6} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + \\ &+ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2. \end{aligned} \quad (1.55)$$