МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра теоретической механики и аэродинамики**

В.И. Антонов

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (ДИНАМИКА)

Конспект лекций
и содержание практических занятий

Москва 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

В.И. Антонов

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
# (ДИНАМИКА)

Конспект лекций и содержание практических занятий

для студентов, обучающихся по направлению
подготовки 270800.62 «Строительство»
(квалификация — бакалавр,
форма обучения — очная, очно-заочная)

Москва 2014

УДК 531
ББК 22.2
А 72

**Антонов, В.И.**
**А 72** Теоретическая механика (динамика) : конспект лекций и содержание практических занятий / В.И. Антонов ; М-во образования и науки Росс. Федерациии, Моск. гос. строит. ун-т. — Москва: МГСУ, 2014. — 120 с.

Для студентов (квалификация — бакалавр) очной и очно-заочной форм обучения по направлению подготовки 270800.62 «Строительство».

**УДК 531**
**ББК 22.2**

*Лекция 1 (9)*

# 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## 1.1. Основные понятия. Модели материальных тел

Как известно, под механическим движением понимают изменение с течением времени положения тела в пространстве по отношению к другим телам. Изучая движение какого-либо тела, необходимо указать другое тело — тело отсчета, по отношению к которому рассматривается движение. С телом отсчета жестко связывают систему координат. Тело отсчета, связанная с ним система координат и счетчик времени — часы образуют систему отсчета. В классической механике считается, что время не зависит от движения и одинаково во всех точках пространства и во всех системах отсчета.

Дадим определения основных моделей, используемых в теоретической механике.

> ***1. Материальное тело, размерами и различием в движении отдельных точек которого можно пренебречь в рамках рассматриваемой задачи, называется материальной точкой.***
>
> ***2. Любое множество взаимодействующих материальных точек называется механической системой.***
>
> ***3. Если расстояние между любыми двумя точками механической системы не изменяется при любых механических взаимодействиях, то такая механическая система называется геометрически неизменяемой.***

Фундаментальным понятием механики является сила, которая представляет собой количественную меру механического взаимодействия материальных тел. Сила является причиной изменения движения тела, к которому она приложена.

Кроме внешних воздействий, т.е. сил, характер движения любого тела определяется его инертностью, которая является одним из основных свойств движущейся материи. Это свойство проявляется в способности тела сохранять свое движение при отсутствии сил и изменять его под действием сил не мгновенно, а постепенно, тем медленнее, чем больше вещества содержится в теле. Одной из количественных мер инертности (инерции) тела является масса. Заметим, что масса полностью характеризует инерционные свойства тела при его поступательном движении.

## 1.2. Основные законы механики

**Аксиома 1**

***Существует система отсчета, по отношению к которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы.***

Такая система отсчета называется инерциальной, иногда ее условно называют неподвижной.

**Аксиома 2 (второй закон Ньютона)**

***В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно приложенной к точке силе:***

$$m\vec{W} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

**Аксиома 3 (третий закон Ньютона)**

***Две материальные точки взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны.***

**Аксиома 4 (принцип независимости действия сил)**

***Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то ускорение точки равно сумме векторов ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности.***

## 1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Положение материальной точки в системе отсчета определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}$ . Сила, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т.е. от ее радиуса-вектора $\vec{r}$ (например, упругая сила), скорости точки (например, сила сопротивления) и от времени. Следовательно, основное уравнение динамики материальной точки (1.1) в общем случае можно записать в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right). \tag{1.2}$$

Это равенство, которое представляет собой физический закон, устанавливающий связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно одновременно рассматривать как дифференциальное уравнение, в котором радиус-вектор $r$ является искомой функцией, а время $t$ — аргументом. Это уравнение называется дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.

В зависимости от выбора системы координат можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Записывая уравнение (1.2) в проекциях на оси ортогональной декартовой системы координат, получаем:

$$m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y; \qquad m\ddot{z} = F_z, \tag{1.3}$$

где $x, y, z,$ — координаты точки; $F_x, F_y, F_z$ — проекции на координатные оси приложенной к точке силы.

Если траектория точки заранее известна, удобно использовать оси естественного трехгранника. Напомним, что в этом случае положение точки определяется ее дуговой координатой $s$, а проекция вектора скорости на касательную к траектории $V_\tau$, касательное $W_\tau$ и нормальное $W_n$ ускорения точки определяются по формулам

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}; \qquad W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}; \qquad W_n = \frac{V_\tau^2}{\rho},$$

где $\rho$ — радиус кривизны траектории в данной точке.

Таким образом, дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника имеют вид

$$m\,\frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau; \qquad m\,\frac{V_\tau^2}{\rho} = F_n; \qquad 0 = F_b, \tag{1.4}$$

где $F_\tau, F_n, F_b$ — проекции на оси естественного трехгранника приложенной к точке силы.

## 1.4. Первая основная задача динамики

Эта задача состоит в том, чтобы, зная закон движения точки, т.е. кинематические зависимости

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{1.5}$$

определить силу, действующую на точку, т.е. определить $F_x, F_y, F_z$. Задача, как видно, легко решается при помощи уравнений (1.3) и сводится к вычислению вторых производных по времени от заданных функций (1.5).

## 1.5. Вторая основная задача динамики

Эта задача состоит в том. чтобы, зная приложенную к точке силу, определить закон ее движения, т.е. найти кинематические зависимости (1.5). Решение задачи сводится к интегрированию системы (1.3), т.е. системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки $x$, $y$, $z$, а аргументом время — $t$.

Выполняя интегрирование, получаем координаты точки как функции времени, но решение будет зависеть от шести произвольных постоянных (постоянных интегрирования).

Чтобы сделать соответствующую задачу динамики определенной, необходимо, кроме действующих на точку сил, задать начальные условия, т.е. задать начальное положение точки и ее начальную скорость.

## 1.6. Дифференциальное уравнение относительного движения точки

Всякое движение точки (или тела) рассматривается по отношению к определенной системе отсчета. До сих пор мы рассматривали движение материальной точки по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета, по отношению к которой материальная точка при отсутствии сил может оставаться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно. Инерциальную систему отсчета считают условно неподвижной, а движение по отношению к ней называют абсолютным. Однако во многих случаях возникает необходимость рассматривать движение точки или тела по отношению к системе отсчета, которая также движется по отношению к инерциальной системе отсчета. В таком случае говорят об относительном движении точки (или тела). Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) справедливо только по отношению к инерциальной системе отсчета. Возникает необходимость составить дифференциальное уравнение движения материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета.

Рассмотрим материальную точку $M$ с массой $m$, на которую действует сила $\vec{F}$, являющаяся результатом механического взаимодействия точки с другими материальными телами. Другими словами, сила $\vec{F}$ представляет собой равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке $M$, и всех сил реакций наложенных на точку связей.

Составим дифференциальное уравнение движения точки по отношению к системе отсчета $Oxyz$, произвольно перемещающейся по отношению к инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 1.1).

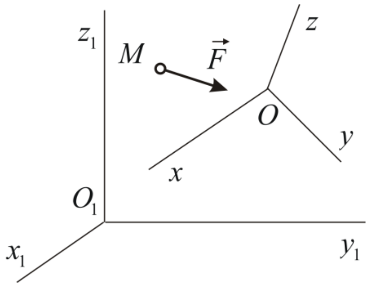


Рис. 1.1

В инерциальной системе отсчета справедлив второй закон Ньютона:

$$m\vec{W}_a = \vec{F}. \qquad (1.6)$$

В соответствии с теоремой Кориолиса абсолютное ускорение точки складывается из ускорения относительного $\vec{W}_r$, ускорения переносного $\vec{W}_e$ и ускорения Кориолиса $\vec{W}_c$

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c, \text{ причем } \vec{W}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r, \qquad (1.7)$$

где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости подвижной системы отсчета. Подставляя (1.7) в (1.6), получаем:

$$m\vec{W}_r + m\vec{W}_e + m\vec{W}_c = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{W}_r = \vec{F} + \left(-m\vec{W}_e\right) + \left(-m\vec{W}_c\right). \qquad (1.8)$$

Обозначая

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_e; \qquad \vec{\Phi}_c = -m\vec{W}_c, \qquad (1.9)$$

получаем:

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \qquad (1.10)$$

Величины $\vec{\Phi}_e$ и $\vec{\Phi}_c$, имеющие размерность силы, называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Уравнение (1.10) называется уравнением относительного движения материальной точки. Как видно, уравнение относительного движения составляется так же, как уравнение абсолютного движения, но к действующим на точку силам необходимо добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Пусть подвижная система отсчета движется по отношению к инерциальной системе поступательно равномерно и прямолинейно. При поступательном движении угловая скорость равна нулю и все точки подвижного пространства движутся одинаково. Ускорение Кориолиса и, следовательно, кориолисова сила инерции обращаются в нуль. Кроме того, поскольку движение прямолинейное и равномерное, то и переносное ускорение, а следовательно, и переносная сила инерции также обращаются в нуль. В таком случае уравнение относительного движения (1.10) совпадает с уравнением абсолютного движения (1.6) и, следовательно, подвижная система отсчета также будет инерциальной. Таким образом, если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то их существует бесчисленное множество. Все они движутся друг относительно друга поступательно равномерно и прямолинейно. Из этого результата в свою очередь вытекает, что

***никаким механическим экспериментом нельзя установить, находится данная система отсчета в покое или движется поступательно равномерно и прямолинейно.***

Сформулированное утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея — Ньютона.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется материальной точкой?
2. Что называется механической системой?
3. В чем состоят основные законы механики (законы Ньютона)?
4. В чем состоят первая и вторая основные задачи динамики материальной точки?
5. Какая система отсчета называется инерциальной?
6. Как выглядит дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки?
7. В чем состоит принцип относительности Галилея?

*Лекция 2 (10)*

# 2. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## 2.1. Постановка задачи

Пусть материальная точка $M$ с массой $m$, в силу наложенных на точку связей, движется по известной траектории, на которой установлена криволинейная система отсчета (рис. 2.1). Начало отсчета дуговой координаты $s$ совместим с положением равновесия точки $O$. Пусть среди сил, действующих на точку, есть восстанавливающая сила. Восстанавливающей называется сила, возникающая при смещении точки из положения равновесия и стремящаяся вернуть точку в равновесное положение. Такая сила всегда направлена в сторону положения равновесия, а ее модуль пропорционален величине смещения точки из положения равновесия. Проекцию восстанавливающей силы на направление касательной к траектории можно записать в виде $F_\tau = -cs$, где $c$ — коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом жесткости.

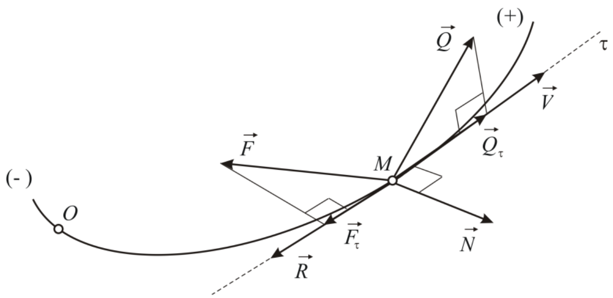


Рис. 2.1

Природа таких сил весьма разнообразна (упругие, архимедовы, гравитационные силы и т.п.). В практическом отношении интересны задачи, в которых кроме восстанавливающей силы на точку действуют сила сопротивления $\vec{R}$ и некоторая сила $\vec{Q}(t)$, которую называют возмущающей силой.

Поскольку траектория точки считается известной, для определения закона движения используем уравнение

$$m\ddot{s} = F_\tau + R_\tau + Q_\tau. \qquad (2.1)$$

Ограничиваясь случаем пропорциональности силы сопротивления первой степени скорости (вязкое трение при малых скоростях), получаем: $R_\tau = -\mu\dot{s}$, где $\mu$ — коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим случай периодической возмущающей силы:

$$Q_\tau = Q_o \sin(pt + \delta); \qquad Q_o,\ p,\ \delta \ - \ const. \qquad (2.2)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения (2.1) принимает вид

$$m\ddot{s} = -cs - \mu\dot{s} + Q_o \sin(pt + \delta) \quad \text{или} \quad \ddot{s} + 2b\dot{s} + k^2 s = q\sin(pt + \delta), \qquad (2.3)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \qquad b = \frac{\mu}{2m}; \qquad q = \frac{Q_o}{m}. \qquad (2.4)$$

Задача состоит в определении решения уравнения (2.3) при заданных начальных условиях:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad s = s_o; \quad \dot{s} = v_o. \tag{2.5}$$

Следует отметить, что многие функции $Q_\tau(t)$ при определенных условиях могут быть представлены на интервале движения разложением в ряд Фурье, т.е. в виде суммы (вообще говоря, бесконечной), каждый член которой имеет вид (2.2). Поскольку уравнение движения линейное, его решение может быть представлено соответствующей суммой решений уравнений вида (2.3). Таким образом, рассматриваемый случай возмущающей силы является довольно общим.

## 2.2. Движение точки под действием восстанавливающей силы

Пусть на точку действует только восстанавливающая сила. Полагая в уравнении (2.3) $b = 0$ и $q = 0$, получаем:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.6}$$

Здесь и в дальнейшем полагаем $s \equiv x$, имея в виду, что в учебной литературе обычно рассматривается случай прямолинейного движения, хотя все полученные результаты справедливы для движения точки по любой криволинейной траектории.

Уравнение (2.6) представляет собой обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$x = A\cos kt + B\sin kt, \tag{2.7}$$

где $A$ и $B$ — постоянные интегрирования.

Дифференцируя решение (2.7) по времени, получаем закон изменения скорости точки:

$$V = \dot{x} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt. \tag{2.8}$$

Для определения постоянных интегрирования $A$ и $B$ подставляем начальные условия, которые в принятых нами обозначениях имеют вид

$$\text{при} \quad t = 0 \qquad x = x_o; \quad \dot{x} = V_o, \tag{2.9}$$

в уравнения (2.7) и (2.8). Получаем: $A = x_o; \quad B = V_o k,$ так что общее решение уравнения (2.6) принимает вид:

$$x = x_o \cos kt + V_o k \sin kt \tag{2.10}$$

или

$$x = a\sin(kt + \alpha). \tag{2.11}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

**Антонов** Виктор Иванович

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (ДИНАМИКА)


Редактор *И.Н. Фофанова*
Компьютерная правка и верстка *Н.В. Макаровой*

Подписано в печать 20.03.2014 г. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
И-49. Уч.-изд. 3,3. Усл.-печ. л. 7. Тираж 1000 экз. Заказ № 103

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный строительный университет»
Издательство МИСИ — МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95,
e-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru
Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44
129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26