



Библиотека научных разработок
и проектов НИУ МГСУ

И.Д. Грудев

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ
СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Библиотека научных разработок
и проектов НИУ МГСУ

И.Д. Грудев

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Москва

2012

УДК 624.04
ББК 22.251
Г 90

СЕРИЯ ОСНОВАНА В 2008 ГОДУ

Р е ц е н з е н т ы :

академик РААСН *Н.И. Карпенко*, академик-секретарь отделения строительных наук, заведующий лабораторией НИИСФ РААСН; доктор технических наук *В.А. Савельев*, главный специалист отдела промышленных и гражданских зданий ЗАО ЦНИИСК им. Мельникова

*Монография рекомендована к публикации
научно-техническим советом МГСУ*

Грудев, И.Д.

Г 90 Несущая способность сжатых элементов стержневых конструкций : монография / И.Д. Грудев ; М-во образования и науки Росс. Федерации, ФГБОУ ВПО «Моск. гос. строит. ун-т». Москва : МГСУ, 2012. – 386 с. (Библиотека научных работок и проектов НИУ МГСУ).

ISBN 978-5-7264-0685-5

Разработан компьютерный метод расчета общей и местной устойчивости сжатых упругопластических и хрупких стержневых элементов конструкций. Критическое состояние потери устойчивости определяется по критерию достижения сжимающим усилием своего максимального значения или достижением предела прочности у хрупких материалов. Процесс деформирования прослеживается от начального состояния до закритического. Данный метод позволяет отказаться от использования коэффициента продольного изгиба и от понятия расчетных длин, благодаря чему расчет становится значительно менее трудоемким и более точным. Приведено решение ряда сложных технических задач.

Для научных работников, аспирантов, проектировщиков, а также студентов строительных специальностей, участвующих в исследовательской деятельности.

**УДК 624.04
ББК 22.251**

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	5
Введение	10
1. Постановка задачи.....	14
2. Векторная система определяющих уравнений	16
3. Скалярная форма уравнений	24
4. Уравнения деформаций для различных типов сечений	27
4.1. Строительные стали. Унифицированная диаграмма текучести	31
4.2. Сечения, приводящиеся к прямоугольным.....	33
4.3. Различные двутавровые сечения	39
4.4. Многоступенчатое сечение	44
4.5. Сечения с переменной шириной	50
4.6. Ромбовидное сечение	53
4.7. Треугольное сечение	54
4.8. Круговое сечение	59
4.9. Кольцевое сечение	62
5. Метод решения	65
5.1. Краевые условия	65
5.2. Метод начальных параметров	66
5.3. Алгоритм и программа решения задачи	71
5.4. Точность результатов	83
6. Анализ параметров, определяющих критические состояния	92
6.1. Жесткость защемления концов элемента	91
6.2. Гибкость стержней	98
6.3. Предел упругости материала	102
6.4. Упругопластическая диаграмма	107
6.5. Стрелка начальной погиби	110
6.6. Вид начальной погиби	117
6.7. Сравнение сечений.....	121
6.8. Хрупкие стержни	124
7. Стержни с произвольными нагрузками и переменными сечениями	129
7.1. Сосредоточенные нагрузки в пролете.....	129
7.2. Стержни с переменными по длине сечениями.....	135
7.3. Ступенчатое смещение участков оси стержня.....	138
7.4. Колонна промышленного здания	139
7.5. Пилон вантового моста	150
8. Технические задачи.....	159
8.1. Крестовая решетка	159
8.2. Программа и результаты расчетов.....	165
8.3. Крестовая решетка, уголкового сечения.....	172
8.4. Уголкового сечения. Программа и анализ результатов.....	174
8.5. Высотные здания.....	181
8.6. Расчет сквозных стержней.....	186

9.	Прошелкивание слабоизогнутых стержней.....	191
9.1.	Прошелкивание трехшарнирной арки.....	192
	9.2. Прошелкивание криволинейного стержня под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки.....	195
	9.3. Прошелкивание криволинейного стержня под действием момента, приложенного к одному его концу.....	201
10.	Жесткость защемления концов элементов в стержневых конструкциях.....	206
10.1.	Плоские конструкции.....	207
10.2.	Пространственные конструкции. Основной принцип	222
10.3.	Башня из стержней трубчатого сечения.....	235
10.4.	Несущая способность башни Шухова на Шаболовке в Москве	241
10.5.	Эллипсоид жесткости защемления концов элементов в стержневых конструкциях	259
10.6.	Теоретическое обоснование метода пробных нагрузок для связевых конструкций.....	267
11.	Устойчивость арок.....	274
11.1.	Полуциркулярная арка под снеговой нагрузкой	274
11.2.	Форма оси, конструкция и расчет арки дворца спорта в Хабаровске.....	285
11.3.	Расчет рамы переменного двутаврового сечения	292
11.4.	Несущая способность арочного покрытия из тонкостенного листового профиля.....	302
12.	Местная устойчивость тонкостенных элементов конструкций... ..	314
12.1.	Образование складки в днище мазутного резервуара	314
12.2.	Анализ напряжений в балке двутаврового сечения в условиях поперечного изгиба.....	319
12.3.	Предельное состояние двутавра при изгибе.....	328
13.	Оптимизация строительных конструкций	337
13.1.	Сравнение многоветвевых сечений и круговой трубы.....	338
13.2.	Метод оптимизации трехветвевых стержня.....	345
13.3.	Анализ результатов оптимизации.....	359
	Библиографический список.....	364
	Приложение 5.1. Базовая программа.....	367
	Приложение 8.1. Распечатка программы для крестовой решетки из элементов прямоугольно сечения.....	378
	Приложение 8.2. Распечатка программы для крестовой решетки из равнополочных уголков.....	384

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена разработке нового метода расчета стержневых конструкций, поэтому в качестве предисловия целесообразно поместить выдержки из статьи [40] автора книги и покойного Евгения Петровича Морозова, где анализируются обстоятельства, связанные с надежностью строительных конструкций.

Надежность конструкций, как известно, зависит от проектировщика, изготовителя материалов и конструкций, монтажника, строителя и эксплуатационника. Задача изготовителя, монтажника, строителя и эксплуатационника — строго выполнять поставленную проектом задачу, ничего не меняя без согласования с проектировщиком. Непрофессионалу может показаться, что проектировщик тоже ограничен в своей деятельности заданием заказчика и архитектора, ГО-СТАми и Строительными нормами, обязательными для исполнения. Однако это не совсем так: свобода выбора у проектировщика есть, и она во многом определяет надежность сооружения в целом.

Выбор конструктивной схемы сооружения никакими документами не регламентируется. Выбирая ту или иную схему, проектировщик тем самым определяет уровень «схемной» надежности будущего сооружения, т.е. надежности сооружения в целом, не зависящей от надежности каждого элемента. В тех случаях, когда величину возможных внешних нагрузок и воздействий точно установить не представляется возможным или же ожидаются такие ситуации, при которых могут быть выведены из строя некоторые элементы сооружения, проектировщик старается обеспечить повышенную схемную надежность.

Чтобы избежать простого дублирования элементов и при этом создать надежные строительные конструкции, от проектировщика требуется высокая квалификация, понимание всей картины строительства и последующей эксплуатации, а также изобретательность, чтобы схемная надежность не привела к значительному удорожанию строительства.

В транспортном и промышленно-гражданском строительстве существуют такие виды сооружений, в которых обеспечение схемной надежности имеет исторические корни. Например, в корпусах кораблей для повышения их живучести устраиваются водонепроницаемые отсеки. В антенно-мачтовых сооружениях известен способ дублирования канатов в оттяжках мачт, при этом суммарная площадь сечения обоих канатов определяется из условия расчетной прочности без увеличения их суммарного сечения. Как показывает

практика, отказ одного из канатов в такой оттяжке, прежде всего, зависит от случайных явлений. Дефект в соединительной детали, детали изолятора или в анкерном устройстве может привести к развитию усталостной трещины и отказу одного из канатов, однако при наличии второго каната в оттяжке обрушения мачты не происходит и эксплуатационник получает время для устранения отказа.

Для ответственных сооружений, особенно таких, в которых собирается много людей, проектировщик должен принимать схему со структурной живучестью и более высокой элементной надежностью. В настоящее время этому мешает жесткая рыночная конкуренция, когда мизерная экономия средств при строительстве оборачивается огромными материальными убытками и гибелью людей в случае аварии.

Здесь уместно вспомнить сравнительно недавнее обрушение покрытия испытательного корпуса на Байконуре, у которого очень много общих черт с аварией в «Трансвааль-парке». В первом случае от перегрузки покрытия в одном пролете и в одном локальном месте обрушилось все покрытие в трех пролетах на площади 28,8 тыс. м²! Во втором случае обрушение, начавшееся в одном месте, также распространилось на все покрытие.

Анализ причин аварий показывает, что при планировании будущего строительства допускаются большие организационные просчеты. Так, в техническом задании (ТЗ) на строительство сооружения содержатся требования к его будущему функционированию, а требования к эксплуатации обычно не оговариваются. Почему? Чаще всего потому, что служба эксплуатации нового сооружения создается только после завершения его строительства, или же потому, что заказчик старается не удорожать строительство. Поэтому у проектировщика нет оснований предусматривать в проекте, например, средства доступа к наиболее ответственным узлам сооружения, и он ограничивается записями типа «осмотреть, обследовать» (а как это сделать — забота эксплуатационников). Правильнее было бы указывать в ТЗ полный перечень задач по функционированию и эксплуатации сооружения, поскольку именно этими целями вызвана потребность в его строительстве. Тогда в проекте были бы рассмотрены условия проведения регламентных и ремонтных работ, в частности, предусмотрен доступ к местам обслуживания, а сооружению приданы свойства ремонтпригодности и ремонтприспособленности.

Для сооружений, разрушение которых связано с отягчающими обстоятельствами, приводящими к человеческим жертвам и другим

непоправимым последствиям, в процессе строительства и после сдачи объекта в эксплуатацию осуществляются специальные наблюдения. Помимо технического надзора, организуемого заказчиком, и авторского надзора, проводимого проектировщиком по договору с заказчиком, предусматривается оснащение сооружения приборами для автоматической регистрации нагрузок и воздействий и происходящих при этом деформаций — мониторинг. Если деформации сооружения превышают расчетные значения, проводится специальное обследование, при котором иногда приходится прекращать функционирование сооружения.

Тысячелетний опыт строительства показывает, что абсолютного качества сооружений достичь принципиально невозможно и аварии всегда будут случаться. Вопрос в том, какие уроки мы извлекаем из этого с тем, чтобы уменьшить количество аварий? Ведь каждая из них дает богатейший материал для анализа работы конструкций и взаимодействия людей, связанных со всеми этапами жизни сооружений.

Правила строительства и ответственность за «крепь» построек выработывались с древнейших времен. Без них не обошлись и *«Законы Хаммурапи»*, написанные в древнем Вавилоне в XVIII в. до н.э. В XVIII в. нашей эры требования к качеству строительства и правила производства работ стали издаваться в виде строительных норм, которые являлись квинтэссенцией строительного опыта. Ведь наряду с грамотными строителями всегда были и менее опытные. Поэтому обязательное выполнение требований, содержащихся в строительных нормах, должно было стать основной гарантией прочности, надежности и долговечности сооружений.

Однако разнообразие строительных конструкций и материалов не позволили регламентировать все стороны проектирования. И проектировщику была оставлена большая свобода в его творческой деятельности. В рамках приблизительно одинаковой надежности сооружений возникли различные школы проектирования. Например, немецкая школа тяготеет к статически определимым конструкциям, а российская — отдает предпочтение рамным конструкциям, хотя, конечно, ни та, ни другая школа не придерживается строго какой-то одной схемы.

В статически определимых конструкциях реакции опор определяются исключительно нагрузками и не зависят от внутренних усилий в их элементах. Статически неопределимые конструкции, наоборот, могут иметь большие внутренние напряжения, а реакции опор могут быть определены только из рассмотрения деформаций

этих конструкций. Первые оказываются почти безразличными к непредвиденным осадкам фундаментов и температурным расширениям. Например, в статически определимой трехногой опоре водонапорной башни усилия в ногах в пределах малых просадок фундаментов практически не меняются, в то время как в четырехногой опоре даже при малой просадке одного из четырех фундаментов две опоры по диагонали могут оказаться полностью разгруженными, а две другие примут на себя всю нагрузку, удваивая таким образом собственные напряжения. Однако часто статически неопределимые конструкции оказываются и более экономичными, и более жизнестойкими, поэтому в практике строительства находят применения и те, и другие.

Другой очень важный вопрос, решаемый проектировщиком, — это разделение или совмещение функций отдельных конструкций, составляющих сооружение. Например, колонны промышленных зданий могут одновременно выполнять три функции: нести покрытие, нести стеновое ограждение и служить опорой для подкрановых конструкций. С позиций строительства такое решение представляется оптимальным, а вот в конструкциях нескольких цехов, спроектированных В.Г. Шуховым, для подкрановых конструкций были сделаны специальные эстакады, не связанные с ограждающими конструкциями. За долгий период эксплуатации цехов технология производства неоднократно менялась, и внутреннее оборудование перестраивалось так, что выпуск продукции увеличивался в десятки раз, при этом ограждающие конструкции не изменялись, что обеспечило суммарную экономию средств в расчете на весь период эксплуатации сооружений.

Все это позволяет утверждать, что у проектировщика есть свобода выбора схемы сооружения, которой он пользуется для того, чтобы спроектировать надежные и безопасные сооружения.

Но уж если авария произошла, она должна быть самым тщательным образом проанализирована. Кроме того, она должна стать стимулом для проведения научных исследований, разработки более совершенных конструкций и методов их расчета, уточнения строительных норм и правил.

Существует несколько причин, препятствующих объективному анализу аварий. И главная из них — понимание членами комиссий, расследующих аварии, непреднамеренности действий всех участников строительства в создании аварийной ситуации. Например, при проектировании водонапорной башни на заводе «Амурсталь», авторами проекта была выбрана новая конструктивная форма опирания

резервуара на линейные элементы, расположенные вдоль образующих конической оболочки. Такая схема не обеспечивала устойчивости оболочки, и в результате незначительных и неизбежных отклонений от идеальной геометрической формы уже при первом испытании резервуара он потерял устойчивость и обрушился. Последующий анализ показал, что авторы проекта и по своей квалификации, и по техническим возможностям, бывшим в их распоряжении в то время, просто не могли предусмотреть потери устойчивости конической оболочки этого вида. Чтобы выгородить проектировщиков, ответственность была «поделена» между всеми участниками строительства.

Представляется, что в любом случае следует публиковать объективный анализ причин аварий, на основе этого разрабатывать уточненные методы расчета и как окончательный результат совершенствовать нормативные документы.

Именно разработке уточненного метода расчета сжатых элементов стержневых конструкций и посвящена эта книга.

ВВЕДЕНИЕ

Строительные конструкции, как правило, испытывают нагрузки, связанные с силой тяжести, поэтому значительная часть стержневых элементов оказывается сжатой в продольном направлении и проверяется на устойчивость. Но даже в тех конструкциях, для которых горизонтальные нагрузки являются определяющими, например башни, нагруженные ветровыми нагрузками, очень многие элементы также оказываются сжатыми и проверяются на устойчивость.

Термин «устойчивость» для определения «несущей способности» сжатых стержней нельзя признать удачным, так как при продольном сжатии стержень, имеющий неизбежную малую начальную погибь, начинает изгибаться, увеличивая плечо, на котором действует сила, и, обладая свойством пластичности, может быть согнут пополам. При этом процесс является детерминированным и может быть рассчитан вполне корректно.

Наоборот, растянутый стержень при деформировании уменьшает начальную погибь, его деформации становятся одинаковыми как по сечению, так и по длине, поэтому он мог бы деформироваться очень сильно. Однако при не таком уж большом удлинении (порядка 20 %) однородное пластическое течение становится неустойчивым, образуется шейка и стержень разрывается. Но ведь при этом никто не говорит о потере устойчивости.

Не вдаваясь в терминологические споры, в настоящей книге будут употребляться оба термина: и традиционный «устойчивость», и более корректный «несущая способность».

В современной проектной практике при проверке элементов на общую устойчивость традиционно используются два понятия: коэффициент продольного изгиба во многих модификациях и расчетная длина элемента. В книге предложен нетрадиционный метод расчета несущей способности сжатых стержневых элементов, основанный на естественном критерии «нулевой отпорности», т.е. на условии достижения сжимающим усилием своего максимального значения. При этом оказалось необходимым рассчитать весь процесс нагружения, включая докритическое и закритическое деформирование.

Возможности современных компьютеров позволили не только осуществить эту задачу, но выполнить ее быстро и в очень строгой постановке. В результате была достигнута точность, значительно превышающая потребности инженерной практики. Кроме того, предлагаемый метод позволил рассчитывать такие сложные задачи, которые традиционным способом решались или очень приближенно,

или не решались вовсе. Полученные результаты оказались весьма наглядными, а сам процесс определения несущей способности сжатых стержневых элементов оказался полностью автоматизированным.

По сравнению с растянутыми элементами, расчет сжатых элементов требует значительно большей исходной информации. Во-первых, необходимо описать геометрические характеристики стержня: длину, форму поперечного сечения и форму оси, которая имеет малую начальную погибь. Во-вторых, необходимо задать упруго-пластическую диаграмму материала. И, в-третьих, необходимо описать условия прикрепления концов элемента к остальной конструкции.

Начиная с работ Эйлера [7] и заканчивая многими современными программными комплексами, задачи об устойчивости стержней решаются, как задачи о бифуркации состояния равновесия, что в лучшем случае годится для упругих систем и совсем не годится для расчета несущей способности стержневых элементов строительных конструкций. Результаты многочисленных расчетов наглядно показали, что процесс исчерпания несущей способности сжатыми стержневыми элементами металлических строительных конструкций или хрупких стержней является строго детерминированным и ничего похожего на бифуркацию не происходит.

В процессе проектирования вычислительные программы используются для расчета силовых факторов в элементах конструкций (усилий и моментов), а проверку несущей способности сжатых элементов производят при помощи коэффициента продольного изгиба φ , который только косвенно учитывает пластические свойства строительных сталей. Не менее слабым местом при проверке устойчивости сжатых элементов является традиционно используемое понятие расчетной длины. Оно определяется как расстояние между двумя ближайшими нулевыми точками на эпюре моментов и рассчитывается на основании решения задач в рамках упругости при заданной жесткости защемления концов элементов. Однако жесткость защемления концов элементов до написания книги [16] оставалась практически неизученной, поэтому величины расчетных длин назначались весьма грубо.

Решение задачи, предлагаемое ниже, основывается на численном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих нелинейный процесс деформирования стержня. Такой подход позволил рассчитывать стержни любого сечения с любыми нагрузками, приложенными как по концам, так и в промежуточных сечениях по длине, и с любыми эксцентриситетами. Так же легко рассчитываются

стержни переменного и ступенчатого сечений.

В книге подробно описан алгоритм решения задачи и приведены компьютерные программы, реализующие этот алгоритм. Проведен анализ точности результатов, определяемых как точностью исходных данных, так и точностью вычислительного алгоритма.

Отдельная глава посвящена анализу факторов, определяющих несущую способность стержней. К ним относятся следующие:

- величина и форма начальной погиби оси стержня,
- вид поперечного сечения,
- вид диаграммы $\sigma - \varepsilon$,
- жесткость защемления концов элемента в конструкции.

Несущая способность сжатых элементов существенно зависит от начальной погиби стержней. Термин «погибь» применяется ниже для обозначения небольшой начальной искривленности оси стержня, достаточно малой, чтобы говорить о его начальной кривизне. Погибь характеризуется стрелкой погиби и характером изменения величины погиби по длине стержня. Погибь как исходная данность принципиально отличается от прогиба, который получает стержень в процессе нагружения. Вопрос о влиянии стрелки погиби на несущую способность элемента исследовался неоднократно [7], но только в предположении об упругом характере работы материала и синусоидальной форме начальной погиби, что, конечно, недостаточно для исчерпания вопроса. В книге ось стержня принимается криволинейной произвольного очертания, при этом вид начальной погиби задается из соображений возможного изгиба при транспортировке или при изготовлении, но ни в коем случае не из соображений облегчения решения.

Рассмотрены различные виды поперечных сечений стержней: прямоугольное, тавровое, двутавровое, круговое и кольцевое, кроме того, разработан общий метод, при помощи которого можно рассмотреть и другие виды сечений.

Диаграмма упругопластической работы материала принимается в виде так называемой «унифицированной диаграммы», которая с удовлетворительной точностью описывает упругие и небольшие пластические деформации многих марок строительных сталей [2]. Для сравнения используется и упругопластическая диаграмма Прандтля. Вообще при выборе упругопластических диаграмм нет ограничений, и может быть принята любая.

Проблема определения жесткости защемления концов элементов в конструкции оказалась наименее изученной. Для ее решения предложен способ, использующий возможности современных расчетных

комплексов типа SCAD или NASTRAN. Решение для плоских конструкций, например ферм, оказалось принципиально (но не технически) простым, а расчет жесткости защемления концов элементов в пространственных конструкциях оказался существенно более громоздким и сложным. Однако при помощи методов аналитической геометрии и эта задача оказалась решенной вполне удовлетворительно.

Приведены многочисленные примеры решения как простых задач, иллюстрирующих те или иные особенности, так и сложных из строительной практики. Особое внимание уделено работе крестовой решетки, когда параллельно рассчитываются два взаимодействующих раскоса: растянутый и сжатый.

Разработанный метод обобщен на задачи устойчивости арок и однопролетных рам, потеря устойчивости которых связана с боковым уходом в закритическом состоянии даже в случае симметричных нагрузок. Кроме того, удалось найти подходы к решению задач о местной (локальной) потере устойчивости.

Рассматриваемый в настоящей книге метод расчета устойчивости стержней довольно сильно отличается от традиционных подходов, поэтому изложение материала сделано по возможности последовательным с минимальными ссылками на литературные источники, при этом предполагается знакомство читателя с основами строительной механики, а также с принципами программирования на алгоритмических языках.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основной целью настоящей книги является изложение метода расчета несущей способности стержней при их продольном сжатии. При этом считаются заданными начальная геометрия стержня: форма поперечного сечения, стрелка начальной погиби, форма начальной погиби, условия опирания концов стержня, а также упругопластические свойства материала и вид нагрузки, которая может изменяться как вдоль оси, так и в процессе нагружения.

В большинстве задач ниже будет рассматриваться один стержень с малой начальной погибью, и для определенности он будет располагаться горизонтально, а его концы в процессе нагружения (деформирования) всегда будут лежать на оси OX . Криволинейная ось стержня, как в начальном состоянии, так и в процессе деформирования всегда будет предполагаться плоской кривой, расположенной в плоскости XOY . Стрелка начальной погиби направлена вверх, в сторону положительного направления оси OY , поэтому в процессе деформирования под действием продольной силы N_x прогиб также будет увеличиваться в сторону возрастания Y , как показано на рис. 1.1.

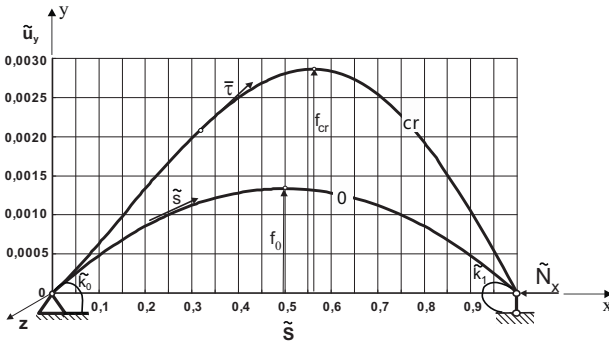


Рис. 1.1. Начальная погибь и прогиб в критическом состоянии, упругое защемление концов: $k_0 = 1000$, $k_1 = 0$

Чаще всего на практике стержень при продольном сжатии выгибается в плоскости наименьшей изгибной жесткости, причем, как правило, в этой же плоскости лежит и начальная погибь, поэтому принятые выше правила расположения стержня в пространстве не являются какими-то ограничениями, а лишь задают положение стержня по отношению к выбранной системе координат. Влияние дополнительной погиби, лежащей в плоскости наибольшей жесткости, на процесс деформирования в этой плоскости, несомненно, представляет большой интерес, но данный вопрос выходит за рамки настоящей книги. Задачи, в которых на стержень наложены дополнительные связи, как, например,

в случае крестовой решетки, и он теряет устойчивость не в плоскости наименьшей жесткости, будут рассмотрены более подробно.

Как правило, большинство элементов стержневых конструкций испытывают узловые нагрузки, т.е. усилия и моменты, приложенные к их концам и меняющиеся пропорционально внешним нагрузкам на конструкцию, поэтому ниже в большинстве задач нагрузки принимаются в виде двух сосредоточенных сил, приложенных к концам стержня навстречу друг к другу. Однако рассматриваемый метод позволяет рассчитывать несущую способность элементов конструкций при самых экзотических видах нагрузок, как, например, в случае пилонов вантовых мостов, когда к консольному стержню в верхней части приложено несколько сил, направленных к его нижней опоре, а сам он изгибается из плоскости вант.

Ниже несущая способность элемента конструкции определяется по критерию достижения параметром нагрузки максимального (стационарного) значения, при котором конструкция находится в состоянии безразличного равновесия. Это состояние называется критическим или «состоянием с нулевой отпорностью», хотя при этом только сжимающая сила достигает своего максимума, а прогибы, углы поворота, моменты продолжают монотонно возрастать почти во всех точках, как по длине, так и по сечению. В такой ситуации, конечно, нельзя принимать сжимающее усилие в качестве аргумента процесса, а следует выбрать для этой цели монотонно возрастающий параметр. По аналогии с растянутыми элементами, для которых в качестве такого параметра всегда выбирается его удлинение, для сжатых элементов естественно взять его укорочение, а точнее величину сближения его концов. Считая левый (нулевой) конец стержня неподвижным, в качестве аргумента процесса следует принять горизонтальное перемещение правого конца $u_x(L)$, где L — длина оси стержня. После этого следует говорить не о шагах нагружения стержня, а о шагах его деформирования. Таким образом, все функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние стержня, рассчитываются в зависимости от сближения его концов, поэтому расчет предкритического, критического и даже закритического состояний не вызывает никаких трудностей.

Для хрупких материалов, таких, например, как стекло, несущая способность определяется разрушением от растягивающих напряжений. При этом предел прочности на растяжение у таких материалов обычно очень низок, а при сжатии слабо изогнутых стержней возникает изгибающий момент и напряжения от изгиба обгоняют напряжения от сжатия, в результате возникают растягивающие напряжения, от которых и разрушается хрупкий стержень при продольном сжатии.

2. ВЕКТОРНАЯ СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Искомые функции, определяющие напряженно-деформированное состояние стержня, являются функциями двух переменных: пространственной координаты и времени, или другого параметра, изменяющегося пропорционально времени. В силу того, что в любой момент времени должны удовлетворяться граничные условия, заданные на концах стержня, возможен только один способ решения задачи, а именно: расчет напряженно-деформированного состояния стержня в данный момент времени с учетом граничных условий и переход на следующий временной уровень. Таким образом, процесс деформирования рассчитывается шагами (ступенями) по времени или другому параметру, причем величина шага определяет точность решения и выбирается экспериментально путем проб и последующей корректировки для обеспечения необходимой точности. На каждом шаге рассчитываются величины приращений поперечного прогиба оси u_y , продольного перемещения — u_x , угла поворота оси стержня — θ , момента в сечении — M , горизонтальной силы — N_x , вертикальной силы — N_y , а также средней по сечению деформации — ε_0 и линейной составляющей деформации — ε_1 в зависимости от длины дуги оси S , отсчитываемой от левого, нулевого конца. Касательный к оси стержня орт $\bar{t}(t_x, t_y)$ образует с осью OX угол θ и определяется направляющими косинусами $t_x = \cos\theta$, $t_y = \sin\theta$.

В отличие от приращений искомых функций на шаге деформирования, значения самих этих функций, накопленные к данному шагу, обозначаются теми же буквами с нуликами вверху: u_x^o , u_y^o , θ^o , M^o , N_x^o , N_y^o , ε_0^o , ε_1^o , t_x^o , t_y^o . Величины этих функций на k -м шаге деформирования рассчитываются по очевидным формулам:

$$u_{x,k}^o = u_{x,k-1}^o + u_x, \quad u_{y,k}^o = u_{y,k-1}^o + u_y, \dots,$$

$$\varepsilon_{1,k}^o = \varepsilon_{1,k-1}^o + \varepsilon_1, \quad t_{x,k}^o = \cos\theta_k^o, \quad t_{y,k}^o = \sin\theta_k^o.$$

В большинстве задач начальное состояние считается ненапряженным, т.е. продольное перемещение, момент, обе компоненты усилия, средняя и линейная деформации полагаются нулевыми, а начальная погибь и угол наклона оси стержня по отношению к оси OX задаются как функции длины дуги оси S .

Потеря устойчивости стержня по определению происходит при нагружении его сжимающими силами или силами, близкими к сжимающим, например, приложенными с эксцентриситетом относительно его оси. В любом случае при деформировании стержня его

отпорность уменьшается, как правило, монотонно, вплоть до нуля. Состояние стержня с нулевой отпорностью является критическим и соответствует состоянию безразличного равновесия, когда перемещения увеличиваются без увеличения прикладываемых нагрузок.

В закритической области деформации нарастают уже при падающей нагрузке, при этом продольное усилие уменьшается, а все остальные функции продолжают возрастать. Таким образом, определяющими деформациями являются деформации продольного сжатия и изгиба, в результате чего сечения практически не депланируют и гипотеза плоских сечений выполняется с большой точностью. Ниже эта гипотеза будет сформулирована в самой мягкой формулировке, как предположение о линейном характере распределения продольных деформаций по высоте сечения. В такой формулировке допускается депланация сечений в результате возникновения касательных напряжений в сечении и связанных с ними деформаций сдвига.

Рассматриваемый ниже стержневой элемент конструкции схематизируется криволинейным стержнем, ось которого представляет плоскую кривую, лежащую в плоскости XOY . Для простоты левый конец стержня лежит в начале координат при $x = 0$, а правый лежит на положительной части оси OX (рис. 1.1). Все функции, определяющие напряженно-деформированное состояние стержня, рассматриваются как функции длины дуги S , которая отсчитывается от левого конца и изменяется от 0 до L . Ввиду того, что стержень с самого начала не считается прямым, его правый конец лежит всегда левее точки $x = L$. Угол θ , заданный как функция длины дуги $\theta(S)$, в конечном счете определяет форму изогнутой оси стержня. Единичный вектор (орт), ортогональный к оси стержня, обозначается через \bar{v} .

При выводе уравнений целесообразно сначала получить их в векторном виде, представляя векторы перемещений и усилий так:

$$\bar{u} = \bar{i}u_x + \bar{j}u_y, \quad \bar{\theta} = \bar{k}\theta, \quad \bar{M} = \bar{k}M, \quad \bar{N} = \bar{i}N_x + \bar{j}N_y,$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты по осям x, y, z соответственно.

На шаге деформирования векторный элемент стержня $\bar{\tau}^o ds$ перемещается так, что его левый конец получает перемещение \bar{u} , а правый конец перемещается на $\bar{u} + d\bar{u}$ (рис. 2.1). Верхний индекс «о» у касательного орта $\bar{\tau}^o$ подчеркивает, что он является накапливаемой величиной и относится к начальному моменту рассматриваемого шага деформирования. Дифференциал приращения по пространственной координате s можно разложить на продольную $d\bar{u}_\tau$ и нормальную $d\bar{u}_v$ компоненты, первая из которых определяет удли-

нение стержня $d\bar{u}_\tau = \varepsilon_0 ds \bar{\tau}^\circ$ (продольная деформация, умноженная на длину элемента), а вторая определяется векторным произведением $d\bar{u}_\nu = [\bar{\theta} \bar{\tau}^\circ ds]$ (длина ds , умноженная на угол поворота θ). Деформация ε_0 отмечена нулевым индексом внизу, чтобы подчеркнуть, что она является постоянной по сечению и может рассматриваться как продольная деформация его оси, которая проходит через центр тяжести сечения, вследствие чего такая деформация в упругой области вызывает только продольную силу, но не может вызвать изгибающего момента. В пластической области дело обстоит много сложнее.

Из равенства $d\bar{u} = d\bar{u}_\tau + d\bar{u}_\nu$ получается первое геометрическое уравнение для приращений функций на шаге деформирования:

$$\frac{d\bar{u}}{ds} = [\bar{\theta} \bar{\tau}^\circ] + \varepsilon_0 \bar{\tau}^\circ. \quad (2.1)$$

При выводе этого уравнения прямолинейность или криволинейность элемента дифференциальной длины не имеет никакого значения, поэтому на рис. 2.1 элемент изображен прямолинейным, хотя он мог бы быть изображен и криволинейным.

Второе геометрическое уравнение связано с искривлением оси стержня, причем на шаге деформирования речь может идти только об увеличении кривизны, однако и в этом случае нагляднее считать первоначальную форму оси прямой и рассматривать приращение кривизны не от кривого к более кривому, а от прямого к кривому. При дифференциальном приращении кривизны оба способа рассуждений являются полностью эквивалентными.

В соответствии с принятым допущением о линейном характере распределения деформаций по сечению стержня, кроме постоянной компоненты деформации ε_0 , возникает линейно изменяющаяся по высоте сечения деформация (рис. 2.2) с нулевым значением на оси стержня и значением ε_1 на нижнем волокне. Последнее отстоит от центра тяжести сечения на расстоянии C , которое по определению считается положительным и принимается за характерный размер поперечного сечения. Деформация ε_1 в упругой области приводит к возникновению только изгибающего момента. В пластической области дело обстоит много сложнее. Радиус кривизны оси элемента обозначен через ρ .

На рис. 2.1 и 2.2 элемент изображен таким образом, чтобы и приращение длины ds , и приращение угла поворота $d\theta$ были бы положительными, а знак деформации ε_1 , как обычно, принимается положительным при растяжении рассматриваемого волокна и отрицательным при его сжатии. Сравнивая длину элемента оси, которая при изгибе элемента на шаге деформирования не изменяется, так как деформация на оси равна нулю, с длиной самого растянутого, нижнего волокна, можно записать:

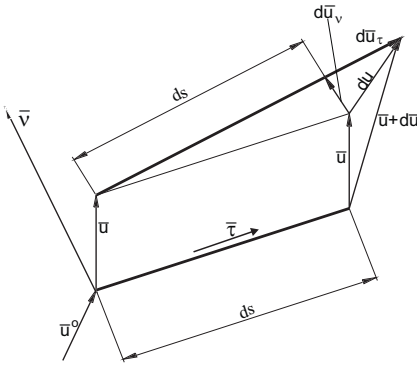


Рис. 2.1. Перемещение и удлинение элемента стержня на шаге деформирования

Сравнивая длину элемента оси, которая при изгибе элемента на шаге деформирования не изменяется, так как деформация на оси равна нулю, с длиной самого растянутого, нижнего волокна, можно записать:

$$ds_0 = \rho d\theta, ds_c = (\rho + C) d\theta.$$

По определению деформация нижнего волокна равна

$$\varepsilon_1 = \frac{ds_0 - ds_c}{ds_0} = -\frac{C}{\rho},$$

откуда следует второе геометрическое уравнение для приращений угла поворота на шаге деформирования:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_1}{C}. \quad (2.2)$$

Знак в правой части принят отрицательным, так как на рис. 2.2 вектор C направлен против оси Y . В этом уравнении следовало бы обе части равенства помножить на орт \bar{k} , а затем сократить его для получения скалярного уравнения, таким образом, скалярное уравнение (2.2) записано как бы после сокращения этого орта.

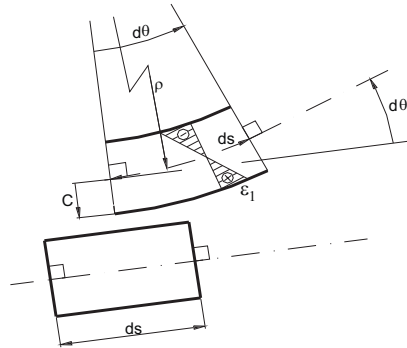


Рис. 2.2. Искривление оси стержня на шаге деформирования

При выводе уравнений равновесия следует помнить, что к рассматриваемому шагу деформирования стержень нагружен внешней распределенной накопленной нагрузкой \bar{q}^0 , которая может быть

разложена на вертикальную \bar{q}_y^o и горизонтальную \bar{q}_x^o компоненты, так что $\bar{q} = \bar{i}q_x + \bar{j}q_y$, а также распределенным накопленным моментом $\bar{m}^o = \bar{i}m_x^o + \bar{j}m_y^o$.

В поперечном сечении стержня действуют нормальные σ^o и касательные τ^o накопленные напряжения, причем нормальные напряжения связаны с продольными деформациями в упругой области законом Гука, а в пластической области принятым законом пластичности. Касательные напряжения определяются формулой Журавского, однако, они используются только в задачах с поперечными нагрузками. В результате в сечении действуют накопленные сила \bar{N}^o и момент \bar{M}^o , причем силу можно представить двояко:

$$\bar{N}^o = \bar{N}_\tau^o + \bar{N}_v^o = \bar{i}N_x^o + \bar{j}N_y^o$$

т.е. как сумму продольной и перерезывающей сил или как сумму компонент в декартовой системе координат. Продольная компонента может быть представлена так:

$$\bar{N}_\tau^o = (\bar{\tau}^o \bar{N}^o) \bar{\tau}^o, \tag{2.3}$$

откуда следует $N_\tau^o = t_x^o N_x^o + t_y^o N_y^o$.

Направляющие косинусы t_x^o, t_y^o также отмечены нуликами вверху, чтобы показать, что они относятся к начальному моменту рассматриваемого шага деформирования.

В отличие от силы, момент всегда определяется одной компонентой $\bar{M}^o = \bar{k}M^o$. Строго говоря, и углу поворота θ^o , и моменту M^o следовало бы приписать индекс z , однако для краткости этот индекс в большинстве случаев будет опущен, так как рассматривается плоское деформированное состояние и никакого другого индекса у этих величин нет.

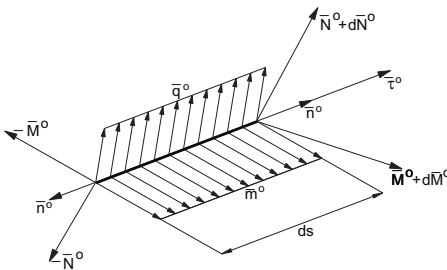


Рис. 2.3. Усилия, приложенные к элементу стержня

Знаки векторов в сечениях s и $s + ds$ определяются знаком скалярного произведения

$(\bar{n} \bar{\tau})$, где \bar{n} — внешний единичный вектор для рассматриваемого сечения. Таким образом, векторы силы и момента в сечении s будут отрицательными, а в сечении $s + ds$ будут положительными

(рис. 2.3).

Уравнение равновесия для сил получается, если сумму всех приложенных к элементу сил приравнять нулю:

$$-\bar{N}^o + \bar{q}^o ds + \bar{N}^o + d\bar{N}^o = 0,$$

откуда следует

$$\frac{d\bar{N}^o}{ds} = -\bar{q}^o. \quad (2.4)$$

Аналогично следует поступить и с моментами, записав их относительно правого конца элемента, т.е. относительно сечения $s + ds$:

$$-\bar{M}^o + [-\bar{N}^o \bar{\tau}^o ds] + \left[\bar{q}^o ds \bar{\tau}^o \frac{ds}{2} \right] + \bar{m}^o ds + \bar{M}^o + d\bar{M}^o = 0,$$

что дает:

$$\frac{d\bar{M}^o}{ds} = [-\bar{N}^o \bar{\tau}^o] - \bar{m}^o \quad (2.5)$$

Полученные уравнения целесообразно привести к безразмерному виду, используя в качестве линейного размера длину оси стержня L , а для усилий и моментов модуль упругости E и момент инерции J . Обозначая безразмерные величины знаком тильды можно записать:

$$\tilde{s} = \frac{s}{L}, \text{ при этом длина стержня всегда будет единичной } 0 \leq \tilde{s} \leq 1,$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{L} \text{ — характерная безразмерная величина поперечного сечения}$$

(см. ниже),

$\tilde{\theta} = \theta$ — угол между осью стержня и осью OX изначально является безразмерной величиной, поэтому знак тильды у него чаще всего будет опущен,

$$\tilde{M} = \frac{\bar{M}L}{EJ} \text{ — безразмерный момент в сечении,}$$

$$\tilde{N} = \frac{\bar{N}L^2}{EJ} \text{ — безразмерное усилие в сечении,}$$

$$\tilde{m} = \frac{\bar{m}L^2}{EJ} \text{ — нагрузка в виде безразмерного распределенного мо-}$$

мента,

$$\tilde{q} = \frac{\bar{q}L^3}{EJ} \text{ — безразмерная распределенная нагрузка.}$$

Деформации ε_0 и ε_1 , входящие в уравнения (2.1) и (2.2), являются безразмерными величинами, однако во многих случаях удобнее использовать приведенную величину деформации

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T},$$

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Грудев Иван Дмитриевич

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Редактор *Е.Д. Нефедова*

Корректор *Е.Д. Нефедова*

Компьютерная правка и верстка *О.В. Суховой*

Дизайн обложки *С.М. Сивоконевой*

Подписано к печати 15.01.2013 г. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
И-362. Объем 24,25 печ. л. Усл.-печ. л. 22,5. Тираж 100 экз. Заказ № 526.

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет».

Издательство МИСИ – МГСУ.

Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95,

e-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Отпечатано в типографии Издательства МИСИ – МГСУ.

Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44.

129337, Москва, Ярославское ш., 26