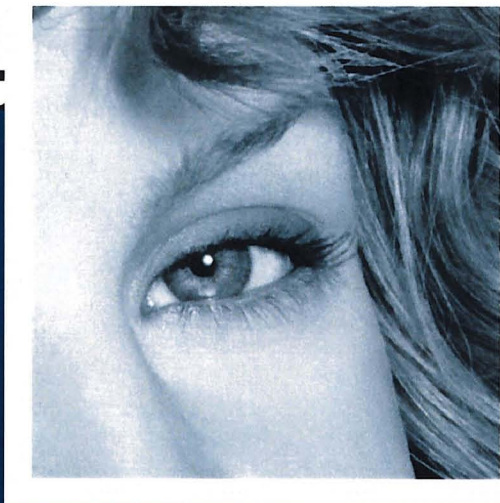


ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
МАТЕМАТИКА

И. Г. Бурова

АППРОКСИМАЦИЯ
ВЕЩЕСТВЕННЫМИ
И КОМПЛЕКСНЫМИ
МИНИМАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
МАТЕМАТИКА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. Г. Булова

АППРОКСИМАЦИЯ
ВЕЩЕСТВЕННЫМИ
И КОМПЛЕКСНЫМИ
МИНИМАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ББК 22.19

Б91

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *И. М. Рабин* (СПб. гос. ун-т),
д-р физ.-мат. наук, проф. *И. В. Хаванов* (СПб. гос. мор-
ской технический ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Бурова И. Г.

Б91 Аппроксимация вещественными и комплексными мини-
мальными сплайнами: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Пе-
терб. ун-та, 2013. — 142 с.

ISBN 978-5-288-05466-2

Предлагаемое издание содержит теоретические и практические реко-
мендации по аппроксимации функций вещественными и комплексными
сплайнами. Предлагаются неявные интерполяционные методы для ре-
шения задачи Коши.

Предназначено для студентов, изучающих вычислительную матема-
тику, а также аспирантов и научных сотрудников, применяющих чис-
ленные методы.

ББК 22.19

© И. Г. Бурова, 2013

© С.-Петербургский
государственный
университет, 2013

ISBN 978-5-288-05466-2

1. НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

1.1. О построении интегро-дифференциальных сплайнов

Пусть $i, \alpha, m, m_\alpha, l_\alpha, s_\alpha, n, p_1, p_2, q$ — целые неотрицательные числа, $l_\alpha \geq 1, s_\alpha \geq 1, m_i = s_i + l_i, m_0 + \dots + m_q + p_1 + p_2 = m, \{x_k\}$ — сетка упорядоченных узлов, конечная или бесконечная,

$$a < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} \dots < b,$$

возможно $a = -\infty, b = +\infty$, функция $u \in C^m[a, b]$. В дальнейшем будем рассматривать сетку равноотстоящих узлов с шагом h . Пусть $\varphi_j, j = 1, \dots, m$, — чебышёвская система на $[a, b]$, причем функции $\varphi_j \in C^m[a, b], j = 1, \dots, m$, строго монотонны и отличны от нуля на $[a, b]$. Для функции $u(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ построим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & \delta_1 \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} u^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \\ & + \delta_2 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+i}} u(t) dt \right) \omega_k^{(i)}(x) + \delta_3 \sum_{i=1}^{p_2} \left(\int_{x_{k-i}}^{x_k} u(t) dt \right) \omega_k^{(-i)}(x), \end{aligned}$$

где $\delta_r, r = 1, 2, 3$, могут принимать значения нуль или единица. Далее полагаем $\delta_r = 1, r = 1, 2, 3$. Другие варианты изучаются аналогично. Базисные функции $\omega_{k,\alpha}(x), \omega_k^{(\pm i)}(x)$, относительно которых предполагаем, что $\text{supp } \omega_{k,\alpha} = [x_{k-s_\alpha}, x_{k+l_\alpha}], \alpha = 0, 1, \dots, q, \text{supp } \omega_k^{(\pm i)} = [x_k, x_{k+1}]$, будем определять из системы уравнений, которую в дальнейшем называем аппроксимационными тождествами:

$$\tilde{u}(x) = u(x) \quad \text{для} \quad u(x) = \varphi_\nu(x), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T, \quad \Phi_{k,\alpha}(x) = (\varphi_1^{(\alpha)}(x), \dots, \varphi_m^{(\alpha)}(x))^T, \\ \Psi_{k,\alpha} &= (\Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha})), \\ S\Phi_{p_1} &= \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Phi(t) dt, \dots, \int_{x_k}^{x_{k+p_1}} \Phi(t) dt \right), \\ S\Phi_{p_2} &= \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \Phi(t) dt, \dots, \int_{x_{k-p_2}}^{x_k} \Phi(t) dt \right).\end{aligned}$$

Теперь определитель системы уравнений примет вид

$$\Delta = |\Psi_{k,0}, \dots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}|.$$

В ряде случаев численное значение определителя может оказаться близким к нулю. Например, при вычислениях в среде Maple для $Digits = 10$ определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x_{j+1} - x_j \\ x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & (x_{j+1}^2 - x_j^2)/2 \\ x_{j-1}^2 & x_j^2 & x_{j+1}^2 & (x_{j+1}^3 - x_j^3)/3 \\ x_{j-1}^3 & x_j^3 & x_{j+1}^3 & (x_{j+1}^4 - x_j^4)/4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)^4 (x_j + x_{j+1} - 2x_{j-1})/12 = -0.48375 \cdot 10^{-11},$$

если $x_{j-1} = 1.05$, $x_j = 1.07$, $x_{j+1} = 1.1$.

Предположим, что при выбранных значениях параметров определитель отличен от нуля. Тогда базисные функции $\omega_{j,\alpha}(x)$, $\omega_j^{(i)}(x)$ можно найти по формулам Крамера. В частности, для определения базисной функции $\omega_{k,\alpha}(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ имеем соотношение

$$\omega_{k,\alpha}(x) = |\Psi_{k,0}, \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-1}), \Phi(x), \Phi_{k,\alpha}(x_{k+1}), \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha}) \dots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}| / \Delta.$$

Пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Нетрудно показать, что построенные в этом случае базисные сплайны $\omega_{k,\alpha}(x)$, $\omega_k^{(\pm i)}(x)$ и приближение $\tilde{u}(x)$ обладают следующими свойствами:

1) на концах каждого промежутка $[x_k, x_{k+1}]$: $u^{(\alpha)}(x_k) = \tilde{u}^{(\alpha)}(x_k)$, $u^{(\alpha)}(x_{k+1}) = \tilde{u}^{(\alpha)}(x_{k+1})$, $\alpha = 0, 1, \dots, q$, $\tilde{u} \in C^q[a, b]$;

2) $\int_{x_k}^{x_{k+i}} u(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+i}} \tilde{u}(t) dt$, $i = 1, \dots, p_1$, $\int_{x_{k-i}}^{x_k} u(t) dt = \int_{x_{k-i}}^{x_k} \tilde{u}(t) dt$, $i = 1, \dots, p_2$;

3) $|\omega_k^{(\pm i)}(x)| \leq K_0/h$, $|\omega_{k,\alpha}(x)| \leq K_1 h^\alpha$, K_0, K_1 — некоторые постоянные (для полиномиальной и тригонометрической системы $\{\varphi_i\}$ на равномерной сетке с шагом h это справедливо, а в общем случае неполиномиальную систему функций выбираем так, что соотношения имеют место).

1.2. Построение решения ассоциированного дифференциального уравнения и оценка погрешности

Вначале получим представление $u(x)$ для вычисления оценки погрешности приближения. Пусть M — целое число, $M \geq 1$. Построим однородное линейное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x)$.

В соответствии с разделом 6.2.10 книги [17] при $x \in [x_k, x_{k+1}] \subset [a, b]$ составим соотношение

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \dots & \varphi_M(x), & u(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \dots & \varphi_M'(x), & u'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(M)}(x), & \varphi_2^{(M)}(x), & \dots & \varphi_M^{(M)}(x), & u^{(M)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \dots & \varphi_M(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \dots & \varphi_M'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(M-1)}(x), & \varphi_2^{(M-1)}(x), & \dots & \varphi_M^{(M-1)}(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Разлагая определитель по элементам последнего столбца и деля все члены полученного уравнения на $W(x)$, получаем искомое уравнение:

$$Lu = u^{(M)}(x) + p_1(x)u^{(M-1)}(x) + \dots + p_M(x)u(x) = 0.$$

Построим теперь общее решение неоднородного уравнения $Lu = f$ методом вариации произвольных постоянных. При $x \in [x_k, x_{k+1}]$ функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, M$, линейно независимы. Положим

$$u(x) = \sum_{i=1}^M C_i(x)\varphi_i(x).$$

Для определения коэффициентов $C_i(x)$ имеем систему M дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\sum_{i=1}^M C_i'(x)\varphi_i(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^M C'_i(x) \varphi_i^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M-2,$$

$$\sum_{i=1}^M C'_i(x) \varphi_i^{(M-1)}(x) = f(x).$$

Получаем

$$C'_i(x) = \frac{W_{Mi}(x)f(x)}{W(x)},$$

где $W_{Mi}(x)$ — алгебраические дополнения элементов i -го столбца, M -й строки определителя $W(x)$. Находим

$$C_i(x) = \int_{x_k}^x \frac{W_{Mi}(t)f(t)}{W(t)} dt + c_i,$$

где c_i — произвольные постоянные. Итак, вспоминая, что $f = Lu$, получаем

$$u(x) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) \int_{x_k}^x \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(x).$$

Теперь перейдем к оценке $|\tilde{u}(x) - u(x)|$.

Нетрудно показать, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M c_i \left(\delta_1 \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} \varphi^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \right. \\ & \quad \left. + \delta_2 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+i}} \varphi(t) dt \right) \omega_k^{(i)}(x) + \right. \\ & \quad \left. + \delta_3 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int_{x_{k-i}}^{x_k} \varphi(t) dt \right) \omega_k^{(-i)}(x) \right) = \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(x), \\ & \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i^{(\alpha)}(x) W_{Mi}(x) = 0, \quad \alpha = 0, \dots, M-2. \end{aligned}$$

Нам потребуются $u^{(\alpha)}(x)$. Дифференцируя $u(x)$, имеем

$$u^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=1}^M \varphi_i^{(\alpha)}(x) \int_{x_k}^x \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i^{(\alpha)}(x).$$

Представляя $\varphi_i(x)$ с помощью формулы Тейлора

$$\varphi_i(x) = \sum_{l=1}^S \frac{\varphi_i^{(l-1)}(t)}{(l-1)!} (x-t)^{l-1} + (x-t)^S \frac{\varphi_i^{(S)}(\tau_i)}{(S)!}, \quad S = M-1,$$

где τ_i находится между x и t , учитывая аналогичные соотношения для производных $\varphi_i(x)$ и предыдущие тождества, получаем при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ (не умаляя общности, считаем $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) - u(x) &= \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} u^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+\gamma}} u(z) dz \omega_k^{(\gamma)}(x) - u(x) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} \sum_{i=1}^M \int_{x_k}^{x_j} \frac{\varphi_i^{(M-1)}(\xi_j)}{(M-1-\alpha)!} (x_j-t)^{M-\alpha-1} \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt \omega_{j,\alpha}(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{\gamma=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+\gamma}} \int_{x_k}^z \frac{\varphi_i^{(M-1)}(\xi_j)}{(M-1)!} (z-t)^{M-1} \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt dz \omega_k^{(\gamma)}(x) - \\ &- \sum_{i=1}^M \int_{x_k}^x \frac{\varphi_i^{(M-1)}(\xi)}{(M-1)!} (x-t)^{M-1} \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt, \end{aligned}$$

ξ_j находится между x_k и x_j , ξ находится между x_k и x , а ζ_i — между x_k и z . С учетом $|\omega_k^{(\gamma)}(x)| \leq K_0/h$, $|\omega_{j,\alpha}(x)| \leq K_1 h^\alpha$ (K_0, K_1 — некоторые постоянные, $K_0 > 0, K_1 > 0$) получаем при $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^M K \|Lu\|, \quad K > 0.$$

Здесь $\|f\| = \max_{x \in [x_{k-M}, x_{k+M}]} |f(x)|$.

В частности, при $\varphi_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, M$,

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^M K \|u^{(M)}\|, \quad K > 0.$$

В этом разделе построение оценки погрешности из-за громоздкости выражений рассмотрено довольно схематично. В разделе 2 более подробно рассмотрим построение оценки погрешности в более

простом случае: аппроксимации лагранжевыми неполиномиальными сплайнами.

Далее рассмотрим несколько простых примеров.

1.3. Построение i -сплайнов при

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \delta_3 = 1$$

Рассмотрим построение i -сплайнов второго порядка при $p_1 = 1, p_2 = 1$. Пусть известны $\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx$ и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$, в виде

$$\tilde{u}(x) = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx \right) \omega_k^{\langle -1 \rangle}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \right) \omega_k^{\langle 1 \rangle}(x).$$

Здесь $\omega_k^{\langle i \rangle}(x)$, $i = -1, 1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x),$$

где $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, — чебышёвская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i(x)dx \right) \omega_k^{\langle -1 \rangle}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x)dx \right) \omega_k^{\langle 1 \rangle}(x) = \varphi_i(x),$$

$i = 1, 2$.

Определитель этой системы для полиномиальных базисных функций

$$\begin{vmatrix} x_{k+1} - x_k & x_k - x_{k-1} \\ (x_{k+1}^2 - x_k^2)/2 & (x_k^2 - x_{k-1}^2)/2 \end{vmatrix}$$

равен $(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/2$. При $x_j \neq x_k$, $j \neq k$ определитель отличен от нуля.

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$ получаем

$$\omega_k^{\langle -1 \rangle}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 - 2t), \quad \omega_k^{\langle 1 \rangle}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 + 2t).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx, \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx,$$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq Kh^2 \|u''\|, \quad K > 0,$$

если $u'' \in C[a, b]$.

Если значения интегралов неизвестны, то для их вычисления и сохранения порядка аппроксимации в данном случае можно использовать квадратурную формулу трапеций:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \approx \frac{u(x_{k+1}) + u(x_k)}{2} (x_{k+1} - x_k),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx \approx \frac{u(x_k) + u(x_{k-1})}{2} (x_k - x_{k-1}).$$

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = e^x$ получаем $\Delta = x_{k+1}(e^{x_k} - e^{x_{k-1}}) + x_k(e^{x_{k-1}} - e^{x_{k+1}}) - x_{k-1}(e^{x_{k+1}} - e^{x_k})$,

$$\omega_k^{(1)}(th + x_k) = \frac{1 - e^h + he^{h+th}}{h(e^h - 1)^2},$$

$$\omega_k^{(-1)}(th + x_k) = \frac{e^h(-he^h - 1 + e^h)}{h(e^h - 1)^2}.$$

Рассмотрим теперь построение i -сплайнов при $p_1 = 2$, $p_2 = 2$.

Пусть известны $I^{(-1)} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx$, $I^{(-2)} = \int_{x_{k-2}}^{x_k} u(x) dx$, $I^{(1)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx$ и $I^{(2)} = \int_{x_k}^{x_{k+2}} u(x) dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ строим отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$, в виде

$$\tilde{u}(x) = I^{(-1)} \omega_k^{(-1)}(x) + I^{(-2)} \omega_k^{(-2)}(x) + I^{(1)} \omega_k^{(1)}(x) + I^{(2)} \omega_k^{(2)}(x),$$

где в полиномиальном случае после вычислений имеем

$$\omega_k^{(1)}(th + x_k) = -(-4 - 8t + 3t^2 + 4t^3)/(6h),$$

$$\omega_k^{(-1)}(th + x_k) = (-8t + 4t^3 - 3t^2 + 4)/(6h),$$

$$\omega_k^{(2)}(th + x_k) = (-1 - t + 3t^2 + 2t^3)/(12h),$$

$$\omega_k^{(-2)}(th + x_k) = -(1 - t - 3t^2 + 2t^3)/(12h).$$

Определитель этой системы равен $(-x_{k-2} + x_{k+2})(-x_{k-2} + x_{k-1}) \times (x_{k-1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k -$

$x_{k+2})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/24$. При различных узлах сетки он отличен от нуля. Нетрудно показать, что

$$\int_{x_{k-i}}^{x_k} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_{k-i}}^{x_k} u(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+i}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+i}} u(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

и при условии $u'''' \in C[a, b]$ справедливо неравенство

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq Kh^4 \|u^{IV}\|, \quad K > 0.$$

1.4. Построение непрерывных квадратичных сплайнов

Пусть $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0$, $q = 0$, $l_0 = s_0 = 1$, $p_1 = 1$. Если использовать еще и значения функции в узлах сетки, то получим непрерывные приближения. Рассмотрим построение квадратичных интегро-дифференциальных неполиномиальных сплайнов.

Пусть известны $u(x_k)$, а также $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \right) \omega_k^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega_{j,0}(x)$, $j = k, k+1$, $\omega_k^{(1)}(x)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x),$$

где $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, — чебышёвская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x) dx \right) \omega_k^{(1)}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))^T,$$

$$S\Phi = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x) dx \right)^T;$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), S\Phi|,$$

а базисные функции определяются соотношениями

$$\omega_{k,0}(x) = |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta,$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x), S\Phi| / \Delta,$$

$$\omega_{k,1}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x)| / \Delta.$$

Построенные таким образом сплайны обладают свойствами

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx, \quad u(x_j) = \tilde{u}(x_j), j = k, k+1.$$

Выпишем формулы базисных функций на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

1. При $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, 3$, получаем $\Delta = -(x_k - x_{k+1})^4/6$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{1}{h^2}(-h + 3(x - x_k)(x - x_{k+1})),$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_k)(3(x - x_k) - 2h),$$

$$\omega_k^{(1)}(x) = -\frac{6}{h^3}(x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

При $t \in [0, 1]$ имеем

$$\omega_{k,0}(x_k + th) = (-1 + 3t)(-1 + t),$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = t(3t - 2),$$

$$\omega_k^{(1)}(x_k + th) = -6t(-1 + t)/h.$$

2. При $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin(x)$, $\varphi_3(x) = \cos(x)$ получаем $\Delta = 2(1 - \cos(x_k - x_{k+1})) + (x_{k+1} - x_k) \sin(x_k - x_{k+1})$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{(\cos(h) - 1 - h \sin(x - x_{k+1}) - \cos(x - x_k) + \cos(x - x_{k+1}))}{(2 \cos(h) - 2 + h \sin(h))},$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{(\cos(x - x_k) - \cos(x - x_{k+1}) + h \sin(x - x_k) - 1 + \cos(h))}{(2 \cos(h) - 2 + h \sin(h))},$$

$$\omega_k^{(1)}(x) = \frac{(\sin(x - x_{k+1}) + \sin(h) - \sin(x - x_k))}{(2 \cos(h) - 2 + h \sin(h))}.$$

Если получить формулу $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ и объединить с формулой для $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, то получим выражение для базисного сплайна $\omega_{k,0}$, заданного на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. На рис. 1 приведены графики тригонометрических базисных функций $\omega_{k,0}$ и $\omega_k^{(1)}$ при $h = 1$.

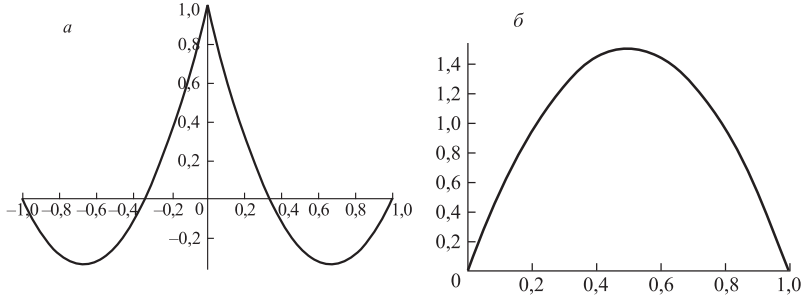


Рис. 1. Графики базисных функций: $a - \omega_{k,0}(t)$ и $b - \omega_k^{(1)}(t)$.

Нетрудно убедиться, что при $t \in [0, 1]$

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = \frac{(\cos(h) - 1 - h \sin(th - h) - \cos(th) + \cos(th - h))}{(2 \cos(h) - 2 + h \sin(h))} =$$

$$= (3t^2 - 4t + 1) + O(h) = (3t - 1)(t - 1) + O(h),$$

$$\omega_{k+1,0}(th + x_k) = \frac{(\cos(th) - \cos(th - h) + h \sin(th) - 1 + \cos(h))}{(2 \cos(h) - 2 + h \sin(h))} =$$

$$= (3t^2 - 2t) + O(h) = t(3t - 2) + O(h),$$

СОДЕРЖАНИЕ

	ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1.	НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ	
	1.1. О построении интегро-дифференциальных сплайнов	6
	1.2. Построение решения ассоциированного дифференциального уравнения и оценка погрешности	8
	1.3. Построение i -сплайнов при $\delta_1 = 0, \delta_2 = \delta_3 = 1$	11
	1.4. Построение непрерывных квадратичных сплайнов	13
	1.5. Построение кубических сплайнов при $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1, q = 1$	17
	1.6. Построение непрерывно дифференцируемых интегро-дифференциальных сплайнов	21
	1.7. Построение дважды непрерывно дифференцируемых интегро-дифференциальных сплайнов	26
2.	ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЛАГРАНЖЕВЫМИ СПЛАЙНАМИ	31
	2.1. Построение непрерывных базисных функций	31
	2.2. Построение решения ассоциированного дифференциального уравнения	32
	2.3. Оценка погрешности	33
	2.4. Оценки погрешности приближения тригонометрическими сплайнами	36
	2.5. Оценки погрешности приближения экспоненциальными сплайнами	37
3.	О ПОСТРОЕНИИ ГЛАДКИХ СПЛАЙНОВ	40
	3.1. О построении непрерывных сплайнов	40
	3.2. О построении гладких минимальных сплайнов	42

3.2.1.	Первый вариант расположения носителя	42
3.2.2.	Второй вариант расположения носителя	46
3.2.3.	Свойства гладких минимальных сплайнов	47
3.3.	О построении сплайнов минимального дефекта	48
3.3.1.	Тригонометрические сплайны второго порядка	49
3.3.2.	Тригонометрические сплайны четвертого порядка	54
4.	ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕНУЛЕВОЙ ВЫСОТЫ	61
4.1.	Приближение сплайнами первой высоты третьего порядка	63
4.2.	Построение приближений четвертого порядка	65
4.3.	Приближение сплайнами второй высоты шестого порядка	67
4.4.	Приближение сплайнами шестого порядка повышенной гладкости	69
4.4.1.	Построение трижды непрерывно дифференцируемых фундаментальных базисных сплайнов	69
4.4.2.	Коэффициенты перехода к базисным сплайнам шестого порядка аппроксимации первой высоты	70
4.4.3.	Коэффициенты перехода к базисным сплайнам шестого порядка аппроксимации второй высоты	74
4.4.4.	Построение трижды непрерывно дифференцируемых приближений	77
5.	АППРОКСИМАЦИЯ ЭРМИТА—БИРКГОФА	84
5.1.	Постановка задачи	84
5.2.	Оценка погрешности	85
5.3.	Численные эксперименты	86
6.	ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ	89
6.1.	Применение сплайнов ненулевой высоты для решения задачи Коши	89
6.2.	Решение задачи Коши для одного уравнения	91
6.3.	Применение интегро-дифференциальных сплайнов	93
6.4.	Применение сплайнов нулевой высоты	99
6.5.	Результаты численных экспериментов	101
7.	КОМПЛЕКСНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ	103
7.1.	Аппроксимация на окружности	103
7.2.	Аппроксимация на радиально-кольцевой сетке	104
7.3.	Численный пример	105
7.4.	Аппроксимация аналитическими сплайнами	106

7.5. Гармонические сплайны	107
7.6. Построение гармонических сплайнов	108
7.7. Примеры гармонических сплайнов	110
8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МИНИМАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ	114
8.1. О построении минимальных тригонометрических сплайнов нулевой высоты	114
8.2. Четные тригонометрические сплайны	120
8.3. Нечетные тригонометрические сплайны	122
8.4. Некоторые частные случаи гранично–минимальных тригонометрических базисных сплайнов	125
8.5. Построение базиса тригонометрических сплайнов ненулевой высоты	128
8.5.1. Оценка погрешности аппроксимации	130
8.5.2. Частные случаи тригонометрических сплайнов ненулевой высоты	134
8.5.3. О построении четных тригонометрических сплай- нов ненулевой высоты	135
8.5.4. Частный случай	137
Список литературы	138

Учебное издание

Бурова Ирина Герасимовна

**Аппроксимация вещественными и комплексными
минимальными сплайнами**

Учебное пособие

Подписано в печать с готового оригинала-макета 29.10.2013.

Формат 60×84¹/₁₆. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 8,37. Тираж 140 экз. Заказ № 213

Издательство СПбГУ.

199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21

Тел./факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru

www.unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.

199061, С.-Петербург, Средний пр., 41