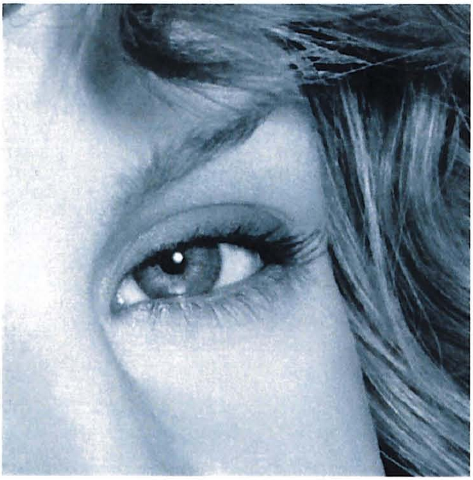
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

И. Г. Бурова

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ МИНИМАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
Санкт-Петербургского государственного университета

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
МАТЕМАТИКА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. Г. Бурова

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ МИНИМАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
Санкт-Петербургского государственного университета

ББК 22.19
Б91

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. М. Рябов* (С.-Петерб. гос. ун-т),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Н. Н. Хазанов* (С.-Петерб. гос. морской технический ун-т)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Бурова И. Г.

Б91 Аппроксимация вещественными и комплексными минимальными сплайнами: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. — 142 с.

ISBN 978-5-288-05466-2

Предлагаемое издание содержит теоретические и практические рекомендации по аппроксимации функций вещественными и комплексными сплайнами. Предлагаются неявные интерполяционные методы для решения задачи Коши.

Предназначено для студентов, изучающих вычислительную математику, а также аспирантов и научных сотрудников, применяющих численные методы.

ББК 22.19

ISBN 978-5-288-05466-2

1. НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

1.1. О построении интегро-дифференциальных сплайнов

Пусть $i, \alpha, m, m_\alpha, l_\alpha, s_\alpha, n, p_1, p_2, q$ — целые неотрицательные числа, $l_\alpha \geq 1, s_\alpha \geq 1$, $m_i = s_i + l_i$, $m_0 + \ldots + m_q + p_1 + p_2 = m$, $\{x_k\}$ — сетка упорядоченных узлов, конечная или бесконечная,

$$a < \ldots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} \ldots < b,$$

возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$, функция $u \in C^m[a, b]$. В дальнейшем будем рассматривать сетку равноотстоящих узлов с шагом h. Пусть φ_j, $j = 1, \ldots, m$, — чебышёвская система на $[a, b]$, причем функции $\varphi_j \in C^m[a, b]$, $j = 1, \ldots, m$, строго монотонны и отличны от нуля на $[a, b]$. Для функции $u(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ построим

$$\widetilde{u}(x) = \delta_1 \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} u^{(\alpha)}(x_j)\ \omega_{j,\alpha}(x) +$$

$$+\delta_2 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+i}} u(t) dt \right) \omega_k^{\langle i \rangle}(x) + \delta_3 \sum_{i=1}^{p_2} \left(\int_{x_{k-i}}^{x_k} u(t) dt \right) \omega_k^{\langle -i \rangle}(x),$$

где δ_r, $r = 1, 2, 3$, могут принимать значения нуль или единица. Далее полагаем $\delta_r = 1$, $r = 1, 2, 3$. Другие варианты изучаются аналогично. Базисные функции $\omega_{k,\alpha}(x)$, $\omega_k^{\langle \pm i \rangle}(x)$, относительно которых предполагаем, что $\operatorname{supp} \omega_{k,\alpha} = [x_{k-s_\alpha}, x_{k+l_\alpha}]$, $\alpha = 0, 1, \ldots, q$, $\operatorname{supp} \omega_k^{\langle \pm i \rangle} = [x_k, x_{k+1}]$, будем определять из системы уравнений, которую в дальнейшем называем аппроксимационными тождествами:

$$\widetilde{u}(x) = u(x) \ \text{ для } \ u(x) = \varphi_\nu(x), \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Введем обозначения:

$\Psi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))^T, \quad \Phi_{k,\alpha}(x) = (\varphi_1^{(\alpha)}(x), \ldots, \varphi_m^{(\alpha)}(x))^T,$
$\Psi_{k,\alpha} = (\Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \ldots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha})),$
$S\Phi_{p_1} = (\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Phi(t)dt, \ldots, \int_{x_k}^{x_{k+p_1}} \Phi(t)dt),$
$S\Phi_{p_2} = (\int_{x_{k-1}}^{x_k} \Phi(t)dt, \ldots, \int_{x_{k-p_2}}^{x_k} \Phi(t)dt).$

Теперь определитель системы уравнений примет вид

$$\Delta = |\Psi_{k,0}, \ldots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}|.$$

В ряде случаев численное значение определителя может оказаться близким к нулю. Например, при вычислениях в среде Maple для $Digits = 10$ определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x_{j+1} - x_j \\ x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & (x_{j+1}^2 - x_j^2)/2 \\ x_{j-1}^2 & x_j^2 & x_{j+1}^2 & (x_{j+1}^3 - x_j^3)/3 \\ x_{j+1}^3 & x_j^3 & x_{j+1}^3 & (x_{j+1}^4 - x_j^4)/4 \end{vmatrix} =$$

$= (x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)^4 (x_j + x_{j+1} - 2x_{j-1})/12 = -0.48375 \cdot 10^{-11},$
если $x_{j-1} = 1.05$, $x_j = 1.07$, $x_{j+1} = 1.1$.

Предположим, что при выбранных значениях параметров определитель отличен от нуля. Тогда базисные функции $\omega_{j,\alpha}(x)$, $\omega_j^{\langle i' \rangle}(x)$ можно найти по формулам Крамера. В частности, для определения базисной функции $\omega_{k,\alpha}(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ имеем соотношение

$\omega_{k,\alpha}(x) = |\Psi_{k,0}, \ldots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \ldots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-1}), \Phi(x), \Phi_{k,\alpha}(x_{k+1}), \ldots$
$\ldots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha}) \ldots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}|/\Delta.$

Пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Нетрудно показать, что построенные в этом случае базисные сплайны $\omega_{k,\alpha}(x)$, $\omega_k^{\langle \pm i \rangle}(x)$ и приближение $\widetilde{u}(x)$ обладают следующими свойствами:

1) на концах каждого промежутка $[x_k, x_{k+1}]$: $u^{(\alpha)}(x_k) = \widetilde{u}^{(\alpha)}(x_k)$, $u^{(\alpha)}(x_{k+1}) = \widetilde{u}^{(\alpha)}(x_{k+1})$, $\alpha = 0, 1, \ldots, q$, $\widetilde{u} \in C^q[a, b]$;

2) $\int_{x_k}^{x_{k+i}} u(t)dt = \int_{x_k}^{x_{k+i}} \widetilde{u}(t)dt$, $i = 1, \ldots, p_1$, $\int_{x_{k-i}}^{x_k} u(t)dt = \int_{x_{k-i}}^{x_k} \widetilde{u}(t)dt$, $i = 1, \ldots, p_2$;

3) $|\omega_k^{\langle \pm i \rangle}(x)| \le K_0/h$, $|\omega_{k,\alpha}(x)| \le K_1 h^\alpha$, K_0, K_1 — некоторые постоянные (для полиномиальной и тригонометрической системы $\{\varphi_i\}$ на равномерной сетке с шагом h это справедливо, а в общем случае неполиномиальную систему функций выбираем так, что соотношения имеют место).

1.2. Построение решения ассоциированного дифференциального уравнения и оценка погрешности

Вначале получим представление $u(x)$ для вычисления оценки погрешности приближения. Пусть M — целое число, $M \geq 1$. Построим однородное линейное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_M(x)$.

В соответствии с разделом 6.2.10 книги [17] при $x \in [x_k, x_{k+1}] \subset [a, b]$ составим соотношение

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots & \varphi_M(x), & u(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \ldots & \varphi_M'(x), & u'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(M)}(x), & \varphi_2^{(M)}(x), & \ldots & \varphi_M^{(M)}(x), & u^{(M)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots & \varphi_M(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \ldots & \varphi_M'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(M-1)}(x), & \varphi_2^{(M-1)}(x), & \ldots & \varphi_M^{(M-1)}(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Разлагая определитель по элементам последнего столбца и деля все члены полученного уравнения на $W(x)$, получаем искомое уравнение:

$$Lu = u^{(M)}(x) + p_1(x)u^{(M-1)}(x) + \ldots + p_M(x)u(x) = 0.$$

Построим теперь общее решение неоднородного уравнения $Lu = f$ методом вариации произвольных постоянных. При $x \in [x_k, x_{k+1}]$ функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, M$, линейно независимы. Положим

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M} C_i(x)\varphi_i(x).$$

Для определения коэффициентов $C_i(x)$ имеем систему M дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{M} C_i'(x)\varphi_i(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{M} C_i'(x)\varphi_i^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, M-2,$$

$$\sum_{i=1}^{M} C_i'(x)\varphi_i^{(M-1)}(x) = f(x).$$

Получаем

$$C_i'(x) = \frac{W_{Mi}(x) f(x)}{W(x)},$$

где $W_{Mi}(x)$ — алгебраические дополнения элементов i-го столбца, M-й строки определителя $W(x)$. Находим

$$C_i(x) = \int_{x_k}^{x} \frac{W_{Mi}(t) f(t)}{W(t)} dt + c_i,$$

где c_i — произвольные постоянные. Итак, вспоминая, что $f = Lu$, получаем

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i(x) \int_{x_k}^{x} \frac{W_{Mi}(t)\ Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_i(x).$$

Теперь перейдем к оценке $|\widetilde{u}(x) - u(x)|$.

Нетрудно показать, что справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{M} c_i \Bigg(\delta_1 \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} \varphi^{(\alpha)}(x_j)\ \omega_{j,\alpha}(x) +$$

$$+\delta_2 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+i}} \varphi(t) dt \right) \omega_k^{\langle i \rangle}(x) +$$

$$+\delta_3 \sum_{i=1}^{p_1} \left(\int_{x_{k-i}}^{x_k} \varphi(t) dt \right) \omega_k^{\langle -i \rangle}(x) \Bigg) = \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_i(x),$$

$$\sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_i^{(\alpha)}(x) W_{Mi}(x) = 0, \quad \alpha = 0, \ldots, M-2.$$

Нам потребуются $u^{(\alpha)}(x)$. Дифференцируя $u(x)$, имеем

$$u^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i^{(\alpha)}(x) \int_{x_k}^{x} \frac{W_{Mi}(t)\ Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_i^{(\alpha)}(x).$$

Представляя $\varphi_i(x)$ с помощью формулы Тейлора

$$\varphi_i(x)=\sum_{l=1}^{S}\frac{\varphi_i^{(l-1)}(t)}{(l-1)!}(x-t)^{l-1}+(x-t)^S\frac{\varphi_i^{(S)}(\tau_i)}{(S)!},\ S=M-1,$$

где τ_i находится между x и t, учитывая аналогичные соотношения для производных $\varphi_i(x)$ и предыдущие тождества, получаем при $x\in[x_k,x_{k+1}]$ (не умаляя общности, считаем $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\delta_3=0$)

$$\widetilde{u}(x)-u(x)=\sum_{\alpha=0}^{q}\sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha}u^{(\alpha)}(x_j)\ \omega_{j,\alpha}(x)+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{p_1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+\gamma}}u(z)dz\ \omega_k^{\langle\gamma\rangle}(x)-u(x)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{q}\sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha}\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{x_k}^{x_j}\frac{\varphi_i^{(M-1)}(\xi_j)}{(M-1-\alpha)!}(x_j-t)^{M-\alpha-1}\frac{W_{Mi}(t)\ Lu(t)}{W(t)}dt\ \omega_{j,\alpha}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\sum_{\gamma=1}^{p_1}\int_{x_k}^{x_{k+\gamma}}\int_{x_k}^{z}\frac{\varphi_i^{(M-1)}(\zeta_j)}{(M-1)!}(z-t)^{M-1}\frac{W_{Mi}(t)\ Lu(t)}{W(t)}dtdz\ \omega_k^{\langle\gamma\rangle}(x)-$$

$$-\sum_{i=1}^{M}\int_{x_k}^{x}\frac{\varphi_i^{(M-1)}(\xi)}{(M-1)!}(x-t)^{M-1}\frac{W_{Mi}(t)\ Lu(t)}{W(t)}dt\ ,$$

ξ_j находится между x_k и x_j, ξ находится между x_k и x,а ζ_i — между x_k и z. С учетом $|\omega_k^{\langle\gamma\rangle}(x)|\le K_0/h$, $|\omega_{j,\alpha}(x)|\le K_1h^\alpha$ (K_0,K_1 — некоторые постоянные, $K_0>0,K_1>0$) получаем при $x\in[x_k,x_{k+1}]$

$$|\widetilde{u}(x)-u(x)|\le h^MK\|\ Lu\|,\quad K>0.$$

Здесь $\|\ f\|=\max\limits_{x\in[x_{k-M},x_{k+M}]}|f(x)|$.

В частности, при $\varphi_i=x^{i-1}$, $i=1,2,\dots M$,

$$|\widetilde{u}(x)-u(x)|\le h^MK\|u^{(M)}\|,\quad K>0.$$

В этом разделе построение оценки погрешности из-за громоздкости выражений рассмотрено довольно схематично. В разделе 2 более подробно рассмотрим построение оценки погрешности в более простом случае: аппроксимации лагранжевыми неполиномиальными сплайнами.

Далее рассмотрим несколько простых примеров.

1.3. Построение i-сплайнов при $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 1$

Рассмотрим построение i-сплайнов второго порядка при $p_1 = 1$, $p_2 = 1$. Пусть известны $\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx$ и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, в виде

$$\tilde{u}(x) = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx\right)\omega_k^{\langle -1\rangle}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x).$$

Здесь $\omega_k^{\langle i\rangle}(x)$, $i = -1, 1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x),$$

где $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, — чебышёвская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i(x)dx\right)\omega_k^{\langle -1\rangle}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x)dx\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) = \varphi_i(x),$$

$i = 1, 2$.

Определитель этой системы для полиномиальных базисных функций

$$\begin{vmatrix} x_{k+1} - x_k & x_k - x_{k-1} \\ (x_{k+1}^2 - x_k^2)/2 & (x_k^2 - x_{k-1}^2)/2 \end{vmatrix}$$

равен $(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/2$. При $x_j \neq x_k$, $j \neq k$ определитель отличен от нуля.

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$ получаем

$$\omega_k^{\langle -1\rangle}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 - 2t), \quad \omega_k^{\langle 1\rangle}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 + 2t).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx, \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx,$$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \le Kh^2 \|u''\|, \quad K > 0,$$

если $u'' \in C[a, b]$.

Если значения интегралов неизвестны, то для их вычисления и сохранения порядка аппроксимации в данном случае можно использовать квадратурную формулу трапеций:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \approx \frac{u(x_{k+1}) + u(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx \approx \frac{u(x_k) + u(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}).$$

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = e^x$ получаем $\Delta = x_{k+1}(e^{x_k} - e^{x_{k-1}}) + x_k(e^{x_{k-1}} - e^{x_{k+1}}) - x_{k-1}(e^{x_{k+1}} - e^{x_k})$,

$$\omega_k^{\langle 1 \rangle}(th + x_k) = \frac{1 - e^h + he^{h+th}}{h(e^h - 1)^2},$$

$$\omega_k^{\langle -1 \rangle}(th + x_k) = \frac{e^h(-he^h - 1 + e^h)}{h(e^h - 1)^2}.$$

Рассмотрим теперь построение i-сплайнов при $p_1 = 2$, $p_2 = 2$.

Пусть известны $I^{\langle -1 \rangle} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx$, $I^{\langle -2 \rangle} = \int_{x_{k-2}}^{x_k} u(x)dx$, $I^{\langle 1 \rangle} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$ и $I^{\langle 2 \rangle} = \int_{x_k}^{x_{k+2}} u(x)dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ строим отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, в виде

$$\tilde{u}(x) = I^{\langle -1 \rangle}\ \omega_k^{\langle -1 \rangle}(x) + I^{\langle -2 \rangle}\ \omega_k^{\langle -2 \rangle}(x) +$$
$$+ I^{\langle 1 \rangle}\ \omega_k^{\langle 1 \rangle}(x) + I^{\langle 2 \rangle}\ \omega_k^{\langle 2 \rangle}(x),$$

где в полиномиальном случае после вычислений имеем

$$\omega_k^{\langle 1 \rangle}(th + x_k) = -(-4 - 8t + 3t^2 + 4t^3)/(6h),$$

$$\omega_k^{\langle -1 \rangle}(th + x_k) = (-8t + 4t^3 - 3t^2 + 4)/(6h),$$

$$\omega_k^{\langle 2 \rangle}(th + x_k) = (-1 - t + 3t^2 + 2t^3)/(12h),$$

$$\omega_k^{\langle -2 \rangle}(th + x_k) = -(1 - t - 3t^2 + 2t^3)/(12h).$$

Определитель этой системы равен $(-x_{k-2} + x_{k+2})(-x_{k-2} + x_{k-1}) \times$ $\times (x_{k-1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k -$

$x_{k+2})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/24$. При различных узлах сетки он отличен от нуля. Нетрудно показать, что

$$\int_{x_{k-i}}^{x_k} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_{k-i}}^{x_k} u(x)dx, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+i}} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+i}} u(x)dx, \quad i = 1, 2,$$

и при условии $u'''' \in C[a, b]$ справедливо неравенство

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \le K h^4 \|u^{IV}\|, \quad K > 0.$$

1.4. Построение непрерывных квадратичных сплайнов

Пусть $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0$, $q = 0$, $l_0 = s_0 = 1$, $p_1 = 1$. Если использовать еще и значения функции в узлах сетки, то получим непрерывные приближения. Рассмотрим построение квадратичных интегро-дифференциальных неполиномиальных сплайнов.

Пусть известны $u(x_k)$, а также $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$,

$$\tilde{u}(x) = u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x). \qquad (1)$$

Здесь $\omega_{j,0}(x)$, $j = k, k+1$, $\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x),$$

где $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, — чебышёвская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x)dx\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем обозначения:
$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))^T$,

$$S\Phi = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x)dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x)dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x)dx \right)^T;$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), S\Phi|\,,$$

а базисные функции определяются соотношениями

$$\omega_{k,0}(x) = |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), S\Phi|\,/\Delta,$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x), S\Phi|\,/\Delta,$$

$$\omega_{k,1}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x)|\,/\Delta.$$

Построенные таким образом сплайны обладают свойствами

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x)\ dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)\ dx, \quad u(x_j) = \tilde{u}(x_j), j = k, k+1.$$

Выпишем формулы базисных функций на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

1. При $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, 3$, получаем $\Delta = -(x_k - x_{k+1})^4/6$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{1}{h^2}(-h + 3(x - x_k)(x - x_{k+1})),$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_k)(3(x - x_k) - 2h),$$

$$\omega_k^{\langle 1 \rangle}(x) = -\frac{6}{h^3}(x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

При $t \in [0, 1]$ имеем

$$\omega_{k,0}(x_k + th) = (-1 + 3t)(-1 + t),$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = t(3t - 2),$$

$$\omega_k^{\langle 1 \rangle}(x_k + th) = -6t(-1 + t)/h.$$

2. При $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin(x)$, $\varphi_3(x) = \cos(x)$ получаем $\Delta = 2(1-\cos(x_k - x_{k+1})) + (x_{k+1} - x_k)\sin(x_k - x_{k+1})$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{(\cos(h) - 1 - h\sin(x - x_{k+1}) - \cos(x - x_k) + \cos(x - x_{k+1}))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))},$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{(\cos(x - x_k) - \cos(x - x_{k+1}) + h\ \sin(x - x_k) - 1 + \cos(h))}{(2\cos(h) - 2 + h\ \sin(h))},$$

$$\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) = \frac{(\sin(x - x_{k+1}) + \sin(h) - \sin(x - x_k))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))}.$$

Если получить формулу $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ и, объединить с формулой для $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, то получим выражение для базисного сплайна $\omega_{k,0}$, заданного на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. На рис. 1 приведены графики тригонометрических базисных функций $\omega_{k,0}$ и $\omega_k^{\langle 1\rangle}$ при $h = 1$.

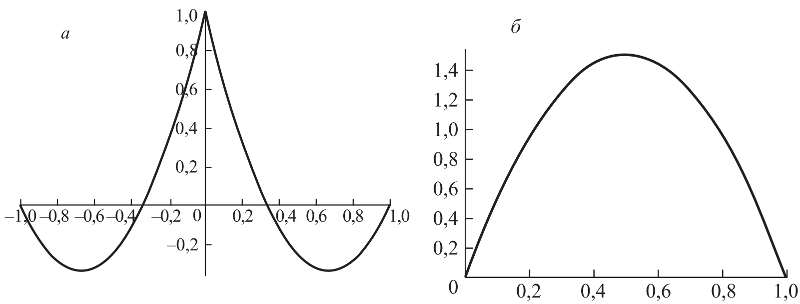


Рис. 1. Графики базисных функций: *а* — $\omega_{k,0}(t)$ и *б* — $\omega_k^{\langle 1\rangle}(t)$.

Нетрудно убедиться, что при $t \in [0, 1]$

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = \frac{(\cos(h) - 1 - h\sin(th - h) - \cos(th) + \cos(th - h))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))} =$$

$$= (3t^2 - 4t + 1) + O(h) = (3t - 1)(t - 1) + O(h),$$

$$\omega_{k+1,0}(th + x_k) = \frac{(\cos(th) - \cos(th - h) + h\sin(th) - 1 + \cos(h))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))} =$$

$$= (3t^2 - 2t) + O(h) = t(3t - 2) + O(h),$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Бурова Ирина Герасимовна

Аппроксимация вещественными и комплексными минимальными сплайнами

Учебное пособие

Подписано в печать с готового оригинала-макета 29.10.2013.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,37. Тираж 140 экз. Заказ № 213

Издательство СПбГУ.
199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21

Тел./факс (812) 328-44-22
E-mail: editor@unipress.ru
www.unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41