ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

В. А. Рожков

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ
ЧАСТЬ 2
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ВОЛНЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ Санкт-Петербургского государственного университета

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Рожков

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

ЧАСТЬ 2
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ВОЛНЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
Санкт-Петербургского государственного университета

ББК 26.23
Р63

Рецензенты: д-р геогр. наук, проф. *Г. В. Алексеев* (Арктич. и антарктич. науч.-исслед. ин-т); канд. геогр. наук *В. В. Ионов* (С.-Петерб. гос. ун-т)

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
факультета географии и геоэкологии
С.-Петербургского государственного университета

Рожков В. А.

Р63 Статистическая гидрометеорология. Часть 2. Турбулентность и волны. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. — 216 с.

ISBN 978-5-288-05427-3
ISBN 978-5-288-05501-0 (Ч. 2)

В книге обсуждаются закономерности разномасштабной изменчивости гидрометеорологических процессов и полей, обусловленной стохастичностью турбулентного и волнового движения в атмосфере и гидросфере.

В турбулентных течениях термо- и гидродинамические характеристики (вектор скорости, температура, давление, плотность среды, концентрация примесей и др.) испытывают хаотические флюктуации. Теорией турбулентности может быть лишь статистическая гидромеханика.

Под волнами понимают изменения состояния среды, распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию. Основное отличие волн от турбулентности и колебаний состоит в наличии дисперсионного соотношения между волновым числом (вектором) и частотой. Стохастичность волн обусловлена как стохастичностью внешних условий (турбулентность воздушного потока, сейсмичность и т. д.), так и пространственно-временной изменчивостью среды (океана и атмосферы).

Книга предназначена для студентов, аспирантов и специалистов гидрометеорологического профиля.

ББК 26.23

ISBN 978-5-288-05427-3
ISBN 978-5-288-05501-0 (Ч. 2)

2. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.1. Статистическая гидромеханика

Простейшим уравнением механики жидкости и газа, выражающим закон сохранения вещества, является уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{1}$$

ρ — плотность, u_α — составляющая скорости.

Для простоты в (1) обозначено

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}$$

Основные динамические уравнения, выражающие второй закон Ньютона, примененный к малому объему жидкости, т. е. представляющие собой уравнения баланса количества движения (бюджета импульса), имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\delta_{i\alpha}\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\right),\ i = 1,\ 2,\ 3,$$

где ρX_i — компонент плотности внешних сил, p — давление, μ, ζ — коэффициенты вязкости.

В сжимаемой среде уравнения (1) и (2) содержат пять неизвестных функций (u_1, u_2, u_3, p, ρ), поэтому для получения замкнутой системы к ним надо добавить уравнение притока тепла, выражающее закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho e\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_\alpha\left(\frac{U^2}{2} + \bar{\omega}\right) - u_\beta \sigma_{\beta\alpha} - \kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right] + u_\alpha \rho X_\alpha, \tag{3}$$

где $\rho(U^2/2 + e)$ — полная энергия единицы массы движущейся жидкости, e — внутренняя энергия единицы массы, $\bar{\omega} = e + p/\rho$ — тепловая функция, κ — коэффициент теплопроводности, T — температура, $\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right) + \zeta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}$ — вязкий тензор напряжений, входящий в правую часть уравнения (2).

Из уравнения (3) с использованием термодинамических соотношений может быть получено уравнение бюджета энтропии:

$$\rho T\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}\right) = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right), \tag{4}$$

где η — энтропия массы жидкости.

Поскольку уравнения (3) и (4), при условии справедливости уравнений (1), (2), оказываются эквивалентными, то для получения замкнутой системы уравнений надо выразить термодинамические величины e и ω или η через p, ρ, T при помощи уравнений термодинамики и уравнения состояния среды.

Для воздуха это уравнение

$$\begin{gathered} e = c_v T + e_0, \\ \bar{\omega} = e + p/\rho = c_p T + e_0, \\ \eta = -R\ln\rho + c_v \ln T + \mathrm{const} = -R\ln p + c_p \ln T + \mathrm{const}. \end{gathered}$$

Подставляя эти соотношения в (4) получаем уравнение притока тепла в виде

$$c_v\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = -p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) + \rho\varepsilon. \tag{5}$$

Величина ε представляет собой умноженный на ρT прирост энтропии η за единицу времени, связанный с переходом части кинетической энергии в теплоту в результате внутреннего трения жидкости, т. е. ε совпадает с количеством тепла, выделяющимся в результате действия вязкости за единицу времени в единице массы жидкости.

В несжимаемой среде $Td\eta = de$ и величина $\varepsilon = \frac{1}{2}\nu \sum\limits_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$ будет точно равна приросту внутренней энергии, т. е. количеству кинетической энергии, переходящей в тепло.

В реальных условиях величина $\varepsilon c p$ мала, и из (5) выводится уравнение теплопроводности в движущейся среде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \chi \Delta T, \tag{6}$$

где $\chi = \kappa/\rho c p$ — коэффициент температуропроводности среды.

Когда T рассматривается как пассивная примесь, т. е. температурные неоднородности перемещаются вместе с потоками жидкости, сглаживаясь попутно под влиянием молекулярной теплопроводности, то такое движение масс неоднородно нагретой жидкости называется вынужденной конвекцией.

Важный класс течений, в которых температура T не может рассматриваться как пассивная примесь, представляют собой течения неоднородно нагретой жидкости в поле тяжести, возникающие под влиянием архимедовых сил, вызывающих всплывание вверх более теплых и опускание вниз более холодных объемов жидкости. Такие движения температурно-неоднородной жидкости носят название свободной конвекции. (Подробнее о конвекции будет изложено в главе 4.) Эта система уравнений была впервые рассмотрена Ж. В. Буссинеском в XIX в., поэтому соответствующие уравнения в гидродинамике называют «приближением Буссинеска».

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности (1) принимает вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{7}$$

а уравнения движения (2) переходят в уравнения Навье—Стокса:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = X_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \tag{8}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2},\ \ \nu = \frac{\mu}{\rho},$$

ν — коэффициент кинематической вязкости.

Общего решения системы дифференциальных уравнений (7, 8) — уравнений второго порядка с квадратической нелинейностью — не существует. В случае несжимаемой жидкости (в том числе и газообразной среды) к уравнениям (7, 8) необходимо добавить еще уравнение состояния и закон сохранения энергии.

Итак, гидромеханика изучает закономерности движения жидкостей и газов на основе аналитических и численных решений системы уравнений (1–4) при соответствующих начальных и граничных условиях в предположении, что все неизвестные функции (u_1, u_2, u_3, p, ρ, T) являются детерминированными (а движение ламинарное).

Статистическая гидромеханика изучает закономерности турбулентных течений, когда функции (u_1, u_2, u_3, p, ρ, T) являются случайными и подчиняются той же системе уравнений.

Все течения жидкостей и газов делятся на два различных типа — спокойные и плавные, называемые ламинарными, и их противоположность — турбулентные, при которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины беспорядочно пульсируют, крайне нерегулярно изменяясь в пространстве и во времени. Подавляющее большинство реально встречающихся в природе течений турбулентные, ламинарные составляют редкое исключение.

Теорией турбулентности может быть лишь статистическая гидромеханика, изучающая статистические свойства ансамблей течений жидкостей и газов, находящихся в макроскопически одинаковых внешних условиях.

Турбулентностью называется явление, наблюдающееся во многих завихренных течениях, когда термо- и гидродинамические характеристики (вектор скорости, температура, давление, концентрации примесей, плотность среды и др.) испытывают хаотические флюктуации, создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров. Эти характеристики изменяются в пространстве и с течением времени весьма нерегулярно.

Их компонентам Фурье с фиксированными волновыми векторами соответствуют широкие интервалы частот (т. е. однозначные дисперсионные соотношения отсутствуют), а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик в фиксированных точках пространства хаотически изменяются с частотой таких колебаний.

Теория турбулентности возникла благодаря работам О. Рейнольдса (1883), сформулировавшего условия, при которых ламинарное течение переходит в турбулентное.

В отсутствии внешних сил таким критерием является число Рейнольдса $Re = UL/\nu$, где U и L — характерные масштабы скорости и длины.

При малых Re течение ламинарное, при больших — турбулентное.

Рейнольдс предложил представлять значения всех гидродинамических величин в турбулентном течении в виде суммы осредненных (регулярных) и пульсационных (нерегулярных) составляющих:

$$U = \bar{U} + U',\ p = \bar{p} + p',$$
$$\bar{U}' = 0,\ \bar{p}' = 0.$$

Осредненное уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Осредненные уравнения движения

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{X}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} + (\overline{u_i' u_\alpha'})\right) \qquad (9)$$

получили название уравнений Рейнольдса. В них появились (вследствие нелинейности исходных уравнений) новые неизвестные, $\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i' u_j'}$, характеризующие пульсационную компоненту скорости и названные напряжениями Рейнольдса.

В турбулентном потоке кроме обмена импульсом между жидкими частицами, благодаря силам молекулярной вязкости, описываемым тензором вязких напряжений σ_{ij}, имеет место передача импульса от одних объемов жидкости к другим, вызываемая перемешиванием, создаваемым пульсациями скорости.

Осредненное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\chi \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\alpha} - \overline{u'_\alpha T'}\right) \tag{10}$$

содержит дополнительный поток тепла за счет турбулентных пульсаций.

Количество уравнений осталось прежним, а число неизвестных удвоилось, так как появились U', p', ρ', T'. Исторически проблема замыкания системы уравнений решалась Буссинеском (1897), Прандлем (1925), Тейлором (1925, 1932) и Карманом (1930) путем построения так называемых полуэмпирических теорий турбулентности, в которых наряду со строгими уравнениями использовались дополнительные связи, найденные по данным экспериментов или же выведенные с помощью качественных рассуждений наглядно — физического характера. В частности, Буссинеск принял зависимость

$$-\rho\overline{u'_i u'_3} = \rho K \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3}$$

и вычислил значение коэффициента турбулентной вязкости K.

Келлер и Фридман (1924, 1925) предложили метод составления уравнений для моментов произвольного порядка и получения уравнения баланса в виде комбинации моментов и их пространственных производных. В частности, подставляя уравнение Навье—Стокса в равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_i u_j u + (p u_i \delta_{j\alpha} + p u_j \delta_{i\alpha}) - (u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha})\right] = \\ = (\rho u_i X_j + \rho u_j X_i) + p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \left(\sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) для плотности кинетической энергии E получается уравнение (12):

$$\begin{gathered} E = \frac{1}{2}\rho u_\beta u_\beta, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\alpha\beta}\right) = \rho u_\alpha X_\alpha - \rho\varepsilon, \\ \sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\ \rho\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \end{gathered} \tag{12}$$

где σ — тензор вязких напряжений в несжимаемой жидкости, $\rho\varepsilon$ — диссипация кинетической энергии.

В левой части формулы (12) стоит плотность потока энергии, обусловленного как непосредственным переносом энергии при перемещении частиц жидкости, так и работой сил давления и молекулярных сил внутреннего трения. Правая часть формулы (12) показывает, что суммарная кинетическая энергия зависит не только от притока энергии через границу работы сил давления и молекулярного трения, но также и от работы объемных сил и диссипации, приводящей к переходу части кинетической энергии в теплоту.

Если вместо уравнений Навье—Стокса использовать уравнения Рейнольдса (9), то вместо формулы (12) получим для плотности кинетической энергии осредненного движения E_s уравнение (13):

$$
\begin{gathered}
E_s = \frac{1}{2}\rho\bar{u}_\beta\bar{u}_\beta, \\
\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_s\bar{u}_\alpha + \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\bar{u}_\beta + \bar{p}\bar{u}_\alpha - \bar{u}_\beta\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\right) = \\
= \rho\bar{u}_\alpha X_\alpha - \rho\varepsilon_s + \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha},
\end{gathered} \tag{13}
$$

а для средней плотности кинетической энергии пульсационного движения E_t — уравнение (14):

$$
\begin{gathered}
E_t = \frac{1}{2}\rho\overline{u'_\alpha u'_\alpha}, \\
\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\bar{u}_\alpha + \tfrac{1}{2}\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right) = \\
= \rho\overline{u'_\alpha X'_\alpha} - \rho\bar{\varepsilon}_t - \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}.
\end{gathered} \tag{14}
$$

В уравнениях (13, 14) диссипация энергии $\rho\varepsilon_s$ — осредненного движения под действием молекулярной вязкости, $\rho\varepsilon_t$ — пульсационного движения под действием вязкости

$$
\begin{aligned}
\rho\varepsilon_s &= \bar{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2, \\
\rho\bar{\varepsilon}_t &= \overline{\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\rho\nu}{2}\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2}, \\
A &= \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Слагаемое (15), входящее в правые части уравнений для E_s и E_t с разными знаками, описывает взаимные превращения осредненного и пульсационного движения. Если в данной точке пространства $A > 0$, то E_t возрастает за счет энергии осредненного движения; если $A < 0$, то E_s растет за счет энергии пульсаций. Из уравнения (14) следует, что когда нет притока турбулентной энергии через границы, то единственным источником E_t может быть лишь трансформация осредненного движения. Когда турбулентность имеет внешние источники энергии (перемешивание, приток тепла), то обычно $A < 0$. Именно так обстоит дело с турбулентностью в масштабах общей циркуляции атмосферы — совокупностью нерегулярных крупномасштабных движений типа циклонов (Z) и антициклонов (Az), названной **макротурбулентностью**.

Впервые идея статистического анализа макротурбулентности была выдвинута А. Дефантом (1921). Турбулентные возмущения в виде циклонов и антициклонов (Z, Az) могут возникать за счет энергии, вносимой локальным притоком тепла, а в дальнейшем некоторая часть энергии может передаваться осредненному течению. В. Старр (1971) привел многочисленные примеры движений, когда $A < 0$, назвав их явлениями с отрицательной вязкостью. Однако уже Монин и Груза (1961) подчеркивали, что коэффициенты турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии характеризуют не физические свойства жидкости и газа, а статистические свойства их турбулентных движений. Отсюда знак этих коэффициентов не обязан быть положительным, как у молекулярных коэффициентов (что диктуется законами термодинамики необратимых процессов).

Уравнение баланса турбулентной энергии дополняет уравнение Рейнольдса, так как накладывает ограничение на статистические характеристики турбулентности.

Совместное описание турбулентности в терминах первых и вторых моментов впервые было предложено Колмогоровым (1942).

А. В. Фурсиков (1992) показал, что составление уравнений для высших моментов ни на каком этапе не позволяет получить замкнутой системы уравнений, описывающих турбулентное движение. Моментные уравнения строятся по системе Навье—Стокса:

$$\partial_t U(t,x) + (U,\nabla)\,U - \Delta U + \nabla p(t,x) = 0, \qquad (16)$$
$$\operatorname{div} U = 0,\; U\,|_{t=0} = U_0(x).$$

Неизвестными в уравнениях являются моменты $M_k\,(t,\,0)$ решения системы (16). Цепочка уравнений Фридмана—Келлера имеет вид

$$\partial_t M_k(t,\bullet) + A_k M_k + B_k M_{k+1} = 0,\;\; M_k\,|_{t=0} = m_k,\;\; k = 1,2\ldots\;, \qquad (17)$$

где A_k, B_k — линейные операторы.

Следствием нелинейности системы (16) является то, что уравнения (17) для k-го момента M_k содержат момент M_{k+1}, т. е. цепочка (17) содержит бесконечное число уравнений.

В статистической гидромеханике проблема решения системы таких уравнений решается как с помощью гипотез замыкания, так и с помощью теории подобия и размерности.

Теория подобия и размерности. При изучении физических (механических) явлений вводятся понятия энергии, скорости и др., которые характеризуют рассматриваемые явления и могут быть заданы в виде чисел. Все вопросы о движении и о равновесии формулируются как задачи об определении некоторых функциональных уравнений, чаще всего дифференциальных. Всякое изучение явлений природы начинается с установления простейших опытных фактов, на основе которых можно формулировать законы, управляющие исследуемым явлением, и записать их в виде некоторых математических соотношений. Для предварительного качественно-теоретического анализа и выбора системы определяющих параметров используется теория размерности и подобия. Комбинирование теории подобия с соображениями, полученными из эксперимента или математически из уравнений движения, часто приводит к довольно существенным результатам.

Длина, время, сила, энергия, момент силы и т. п. могут служить примерами размерных величин, а отношение энергии к моменту силы, отношение квадрата длины к площади — примерами безразмерных величин. Угол можно измерять в градусах или радианах — пример одной и той же величины, которая может быть размерной или безразмерной. Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. В физике за основные единицы приняты единицы длины (l), времени (t), массы (m). Как только установлены основные единицы измерения, для других механических величин (силы, энергии, скорости, ускорения) единицы получают по определению. Выражение производной единицы измерения через основные называется размерностью. Она записывается символически в виде формулы, например, для силы: $[F] = ml/t^2$.

Предположим, что состояние газа определяется значениями температуры T, плотности ρ и коэффициентом теплоемкости c. Так как размерности этих величин независимы, то из предположения, что давление $p = f(T, \rho, c)$ сразу вытекает уравнение Клайперона $p = \rho RT$.

Движение жидкости в трубах зависит от четырех параметров: плотности ρ, коэффициента вязкости μ, размера l и скорости движения U. Из этих величин можно образовать только одну независимую безразмерную комбинацию, названную числом Рейнольдса, Re:

$$\frac{Ul\rho}{\mu} = \mathrm{Re}.$$

Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц к другой. Для всякой совокупности подобных явлений все безразмерные комбинации из размерных величин имеют одинаковое численное значение. Справедливо и обратное заключение: если все безразмерные характеристики двух движений одинаковы, то движения подобны.

Для подобия двух турбулентных движений необходимо и достаточно, чтобы для обоих движений выполнялось соотношение

$$\frac{U_1 l_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{U_2 l_2 \rho_2}{\mu_2}.$$

Момент времени t и координаты точек x_i, соответствующие подобным состояниям, определяются из соотношения

$$\frac{U_1 t_1}{l_1} = \frac{U_2 t_2}{l_2},\ \frac{x_{i1}}{l_1} = \frac{x_{i2}}{l_2},\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Для турбулентных движений продуктивным оказался подход, когда все средние величины в каждой точке не зависят от положения точки, а средние значения, зависящие от двух точек, зависят только от разности координат (однородная турбулентность); если еще и все направления равновероятны, то такая турбулентность изотропна.

Если рассматривать число Re как критерий подобия в стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил и принять за типичные масштабы величин U и L среднюю скорость течения и среднее расстояние, на котором скорость U претерпевает заметное изменение, то порядок первой производной поля скорости будет определяться отношением U/L, а вторых производных — отношением U/L^2. Так что в уравнении (8) члены, описывающие силы инерции, будут иметь порядок U^2/L, а члены, описывающие силы трения, — порядок $\nu U/L^2$.

Отношение этих величин

$$\frac{U^2}{L} : \frac{\nu U}{L^2} = \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re} \tag{18}$$

является важной характеристикой, определяющей относительную роль сил инерции и сил трения в динамике течения. В случае движений, существенно зависящих от внешних сил, а также нестационарных движений закон подобия оказывается более сложным, и кроме чисел Re необходимы и еще некоторые дополнительные безразмерные критерии подобия.

Критерии подобия. В случае температурно-неоднородной жидкости для механического и теплового подобия требуется совпадение сразу нескольких безразмерных характеристик (критериев подобия). Когда температура рассматривается как пассивная примесь, то в уравнения входят только 2 постоянных коэффициента ν и χ (оба имеющие одинаковую размерность $l^2 t^{-1}$). В краевые условия входят характерные: длина L, скорость U и разность температур Θ (размерность которой, например, градусы Цельсия). Из величин

ν, χ, L, U, Θ можно составить всего 2 независимые комбинации — число Рейнольдса (18) и число Прандтля:

$$\mathrm{Pr} = \nu/\chi. \tag{19}$$

Иногда вместо (19) используют число Пекле:

$$\mathrm{Pe} = \frac{UL}{\chi} = \mathrm{Re} \bullet \mathrm{Pr}, \tag{20}$$

играющее в исследованиях температуры ту же роль, что и Re в динамике. Однако Pr является характеристикой среды, а не особенностей движения (для воздуха $\mathrm{Pr} \approx 0,7$).

Величина (21) названа числом Нуссельта:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\bar{q}L}{\kappa\Theta} = \psi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}), \tag{21}$$

$$\bar{q} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial n},$$

$$\kappa = c_p\rho\chi,$$

где q — средний поток тепла, n — внешняя нормаль к поверхности, ψ — универсальная функция двух переменных.

Для характеристики теплообмена используют коэффициент теплопередачи — число Стентона:

$$\mathrm{Ch} = \mathrm{Nu}/(\mathrm{Re} \bullet \mathrm{Pr}) = \mathrm{Nu}/\mathrm{Pe}. \tag{22}$$

Для свободной конвекции дифференциальные уравнения содержат три размерных коэффициента ν, χ и $g\beta$ ($\beta = 1/T_0$ — для идеального газа, g — ускорение силы тяжести). Граничные условия характеризуются типичными длиной L и разностью температур $(T_m - T_0)$, условие на скорость U не ставится. Из этих величин можно составить две безразмерные комбинации, например, число Pr (19) и число Грассхофа (23) или родственное ему число Релея (24):

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3(T_m - T_0)}{\nu^2}; \tag{23}$$

$$Ra = \mathrm{Gr} \bullet \mathrm{Pr}. \tag{24}$$

Когда под Θ понимается не температура, а другая пассивная примесь, то отношение

$$\nu/\chi = \mathrm{Sc} \tag{25}$$

называют числом Шмидта.

Методы теории подобия (опирающиеся на инвариантность условий задачи относительно некоторых групп преобразований) и размерности (основанные

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Валентин Алексеевич Рожков

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

Часть 2

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ВОЛНЫ

Редактор *Н. М. Баскакова*

Компьютерная верстка *Е. М. Воронкова*

Подписано в печать 10.12.2013. Формат $70{\times}100\,{}^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,55. Тираж 250 экз. Заказ № 262.

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел./факс (812) 328-44-22 E-mail: info@unipress.ru www.unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ. 199061, С.-Петербург, Средний пр., 41