

Н.Н.МОИСЕЕВ

АСИМТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
НЕЛИНЕЙНОЙ
МЕХАНИКИ

Н. Н. МОИСЕЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов университетов
и физико-технических высших учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Некоторые вопросы вспомогательного характера	11
§ 1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний	11
1. Фазовые траектории (11). 2. Линейные системы (12). 3. Фазовая плоскость уравнения Дюффинга (16). 4. Пример периодической фазовой плоскости (18).	
§ 2. Дальнейшее изучение уравнения Дюффинга	19
1. Некоторые сведения из теории эллиптических функций (20). 2. Выражение общего интеграла уравнений Дюффинга (21). 3. Формула для периода (22).	
§ 3. Примеры колебаний систем с переменными параметрами	25
1. Предварительные замечания (25). 2. Случай, когда возвращающая сила стремится к нулю (26). 3. Колебания с диссипативными силами (27). 4. Случай, когда возвращающая сила ограничена (28).	
§ 4. О некоторых достаточных условиях ограниченности колебаний	30
1. Критерий устойчивости для случая, когда возвращающая сила изменяется монотонно (30). 2. Устойчивость колебаний ракеты (32). 3. Основная лемма (33). 4. Критерий устойчивости для уравнения (3.8) (34).	
§ 5. Теорема Пуанкаре	35
1. Формулировка (35). 2. Доказательство утверждения I (38). 3. Замечание об аналитичности правых частей (40).	
Глава II. Метод Ляпунова—Пуанкаре	41
§ 1. Система Ляпунова—случай одной степени свободы.	41
1. Консервативные системы (41). 2. Система Ляпунова (42). 3. Приведение к каноническому виду (43). 4. Преобразование интеграла H (44). 5. Периодичность решений системы Ляпунова (45). 6. Вычисление периода (46). 7. Одно свойство периода (48). 8. Формулировка теоремы Ляпунова (49).	
§ 2. Условия существования периодических решений	49
1. Предмет исследования (49). 2. Необходимые и достаточные условия периодичности (50). 3. Случай, когда фундаментальные решения уравнения (2.2)—периодические функции времени (51). 4. Пример (52). 5. Одно уравнение второго порядка (53). 6. Одно уравнение второго порядка. Случай неперiodических фундаментальных решений (55).	
§ 3 Метод Ляпунова	58
1. Пример (58). 2. Обсуждение алгоритма (60). 3. Расчет приближенного решения (63). 4. Уравнение Дюффинга (64). 5. Пример неконсервативной системы (66).	

§ 4 Система Ляпунова. Случай произвольного числа степеней свободы	67
1. Определение (68). 2. Приведение к каноническому виду (68). 3. Теорема Ляпунова (70). 4. Метод Ляпунова (71). 5. Консервативные системы произвольного числа степеней свободы (75). 6. Метод Ляпунова в нелинейных консервативных системах (77).	
§ 5. Автоколебания	79
1. Пример автоколебаний (79). 2. Формулировка математической задачи (82). 3. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае квазилинейных систем (метод Пуанкаре) (83). 4. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае систем, близких к консервативным (90). 5. Пример (92). 6. Автоколебания в квазилинейных системах со многими степенями свободы (93).	
§ 6. Метод Г. В. Каменкова	96
1. Квазилинейная теория. Теорема Г. В. Каменкова (97). 2. Квазилинейная теория. Расчет периодических решений (101).	
§ 7. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре.	103
1. Замечание о линейных системах (103). 2. Колебания вдали от резонанса (105). 3. Резонансные колебания. Случай одной степени свободы (108). 4. Пример: уравнение Ван-дер-Поля (112). 5. Один специальный случай (114). 6. О резонансе n -го рода (116). 7. О квазилинейной трактовке нелинейных уравнений (119).	
§ 8. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина	121
1. Предварительный анализ (121). 2. Решения x^0 и y^0 . Нерезонансный случай (123). 3. Пример расчета нерезонансных решений (125). 4. Резонансные режимы в системах, близких к системе Ляпунова (126). 5. Примеры расчета резонансных решений уравнения Дюффинга (131). 6. Еще один пример решений x^0 (133). 7. О решениях, близких к негравитальным решениям системы Ляпунова (135).	
§ 9. Заключительные замечания	138
Глава III. Асимптотические методы разделения движений	140
Введение	140
§ 1. Метод Ван-дер-Поля	141
1. Предварительные замечания (141). 2. Переменные Ван-дер-Поля (142). 3. Схема В. М. Волосова (143). 4. Укороченные уравнения (144). 5. Стационарные режимы (145). 6. Пример разрывных правых частей (147). 7. Диссипативная система (150). 8. Автоколебательная система (152). 9. Эквивалентная линеаризация в консервативных системах (153). 10. Замечание об исследовании устойчивости (156).	
§ 2. Метод Ван-дер-Поля в системах, близких к консервативным	157
1. Замена переменных (157). 2. Укороченные уравнения (159). 3. Пример (161). 4. Другой подход к решению той же задачи (162). 5. Примечания (166).	
§ 3. Системы с медленным временем	166
1. Вывод укороченных уравнений (166). 2. Адиабатические инварианты (168). 3. Интеграл действия (169). 4. Пример использования адиабатических инвариантов (170). 5. Вычисление амплитуды и энергии (171). 6. Некоторые обобщения (172). 7. Задача о маятнике переменной массы (174).	
§ 4. Описание алгоритма асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной	175
1. Преобразование переменных (175). 2. Определение членов разложений (177). 3. Построение приближенного решения (181). 4. Оценка точности (182). 5. Независимость точности приближенного решения от выбора функций Φ_1 и Ψ_1 (185). 6. Замечание о характере приближенных формул (188). 7. Метод последовательных приближений (188). 8. Система стандартного вида (190). 9. О возможных обобщениях (190). 10. Замечание об исследовании стационарных режимов (191).	

§ 5. Алгоритм асимптотического интегрирования. Случай нескольких быстрых переменных	191
1. Система с двумя вращающимися фазами (191). 2. Метод Фурье (193). 3. Описание алгоритма в нерезонансном случае (194). 4. Резонансный случай (197). 5. Исследование главного резонанса в случае постоянных частот (197). 6. Общий случай главного резонанса (200). 7. Комбинационные резонансы (202). 8. Установившиеся режимы (203). 9. Вынужденные колебания квазилинейных систем (204). 10. Резонансные решения уравнения Дюффинга (206). 11. О кратных резонансах в колебательных системах (207). 12. Один пример колебательной системы с большим числом степеней свободы (210).	
§ 6. Исследование стационарных точек и устойчивости	211
1. Предварительные замечания (211). 2. Исследование устойчивости (212). 3. Устойчивость тривиального решения системы. (6.6) (213). 4. Замелания (214). 5. Трактовка результатов (216).	
§ 7. Вращательные движения маятника	217
1. Замечания об изучении колебательных движений маятника (217). 2. Новые независимые переменные (219). 3. Построение асимптотики порождающего решения (220). 4. Вращательные движения математического маятника (224). 5. Пример маятника, возвращающая сила которого разрывна (225). 6. Система с вращающимся звеном (226). 7. Маятник с переменной возвращающей силой (227). 8. Теория возмущений (229). 9. Уравнение Ван дер-Поля (230). 10. Особенности резонансных явлений в системах с вращающимися звеньями (232). 11. Метод В. М. Волосова в теории вращательных движений (238). 12. Заключение (241).	
§ 8. Приложения к задачам динамики орбитальных аппаратов . .	241
1. Предварительные замечания (241). 2. Возмущения кеплеровских орбит (242). 3. Задача о трансверсальной тяге (249). 4. Задача о движении спутника на последних оборотах (253). 5. Задача о движении спутника в конце последнего оборота (259). 6. Резонансные задачи в динамике искусственных спутников (267).	
§ 9. Асимптотические методы усреднения в задачах теории оптимального управления	273
1. Частичное усреднение (273). 2. О возможных постановках задач оптимального управления для уравнений в стандартной форме (274). 3. Пример (277).	
Глава IV. Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр	279
§ 1. Одно уравнение второго порядка	281
1. WBKJ-решения (281). 2. Связь с методом усреднения (283). 3. Асимптотический характер приближенных формул (284). 4. Другой метод построения приближенных решений (288).	
§ 2. Однородные системы второго порядка. Случай простых корней	290
1. Асимптотические решения для одного уравнения второго порядка (290). 2. Уравнение произвольного ранга (293). 3. Система второго порядка (295). 4. Некоторые частные случаи (298). 5. Система произвольного ранга (299). 6. Возможные модификации алгоритма построения асимптотических рядов (301).	
§ 3. Однородные системы второго порядка. Случай кратных корней	303
1. Предварительные замечания (303). 2. Случай простых элементарных делителей (307). 3. Один пример механической системы с двумя степенями свободы (309). 4. Системы произвольного ранга (314). 5. Пример колебательной системы, элементарные делители которой непростые (315).	
§ 4. Неоднородные уравнения	317
1. Одно уравнение второго порядка (317). 2. Система произвольного ранга (318). 3. Основная теорема (318). 4. Случай, когда внешние силы осциллируют (321).	

§ 5. Общий случай линейной системы произвольного порядка . . .	324
1. Общее решение однородной системы в том случае, когда корни простые (324). 2. Случай кратных корней (327). 3. Частные решения неоднородных систем (328).	
§ 6. Задача о движении гироскопа под действием момента, изменяющегося во времени	329
1. Вывод уравнений (329). 2. Линеаризация (332). 3. Случай постоянных параметров. Элементарная теория гироскопа (334). 4. Гироскоп в поле переменной напряженности (335). 5. Уравнения баллистики (337). 6. Исследование системы (6.33) (341).	
§ 7. Особые случаи (асимптотика и окрестности точек возврата) . .	343
1. Предварительные замечания (343). 2. Эталонное уравнение, формальное построение асимптотических рядов (345). 3. Асимптотика решений в окрестности точек возврата, в которых корни характеристического уравнения обращаются в нуль (348). 4. Асимптотические разложения в окрестности точки возврата, где элементарные делители перестают быть простыми (350).	
§ 8. О некоторых способах построения асимптотических представлений в случае кратных элементарных делителей характеристической матрицы	351
1. Система с одним элементарным делителем произвольной кратности (352). 2. Пример 1 (358). 3. Пример 2 (359). 4. Случай, когда $a_{m1} = 0$, но $a_{ms} \neq 0$ (361). 5. Случай, когда $a_{m1} = a_{m2} = 0$, но $a_{ms} \neq 0$ при $s > 2$ (363).	
§ 9. Асимптотические методы большого параметра и теория оптимальной коррекции	365
1. Постановка задачи. Примеры (365). 2. Некоторые свойства управления консервативными системами (373). 3. Асимптотическое представление решений одной частной задачи коррекции (374).	
Предметный указатель	378

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ХАРАКТЕРА

В этой главе, носящей вводный характер, рассматриваются несколько примеров, иллюстрирующих богатство возможных форм движения, описываемых нелинейными уравнениями и уравнениями с переменными коэффициентами. Некоторые из них нам будут служить в дальнейшем в качестве примеров, на которых мы будем демонстрировать эффективность изучаемых методов.

Одновременно на этих примерах мы излагаем метод фазовой плоскости — метод, имеющий большое прикладное значение.

В этой книге он будет иметь вспомогательный характер главным образом для пояснений полученных результатов.

Несколько примеров из теории линейных колебаний систем с переменными параметрами имеет своей целью показать читателю, начинающему изучать предмет, новые качественные особенности движения систем, возникающие в тех случаях, когда ее параметры становятся функциями времени.

Последний параграф вводной главы содержит изложение теоремы Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра. Этот фундаментальный результат аналитической теории дифференциальных уравнений будет много раз использоваться в книге.

§ 1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний

1. Фазовые траектории. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\Phi \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Обозначим $\dot{x} = y$ и вычислим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} y.$$

Тогда уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\Phi \left(x; y; \frac{dy}{dx} y \right) = 0$$

или

$$\Phi^* \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\Psi(x, y, C) = 0 \quad (1.2)$$

описывает в плоскости (x, y) некоторое однопараметрическое семейство кривых

$$y = \varphi(x, C).$$

Плоскость (x, y) будем называть фазовой плоскостью уравнения (1.1), а кривую $y = \varphi(x, C)$ — фазовой траекторией этого уравнения. Решение уравнения (1.1) — точка $\{x(t); y(t)\}$ — будет называться изображающей точкой. Если уравнение (1.1)

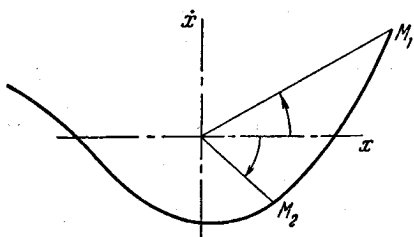


Рис. 1.

трактовать как уравнение, описывающее движение материальной точки, то изображающая точка определяет в каждый момент времени t положение и скорость этой точки. При изменении аргумента t изображающая точка будет двигаться вдоль фазовой траектории (рис. 1).

Так как в верхней полуплоскости $dx/dt = \dot{x} > 0$, то изображающая точка в верхней полуплоскости перемещается в сторону возрастающих значений x , а в нижней полуплоскости ($\dot{x} < 0$) — в сторону убывающих значений x . Следовательно, радиус-вектор изображающей точки в случае фазовой траектории, показанной на рис. 1, в первом квадранте вращается против часовой стрелки, а в четвертом — по часовой стрелке.

Если движение, описываемое уравнением (1.1), периодическое, то соответствующая ему фазовая траектория будет замкнутой. Придавая параметру C в формуле (1.2) всевозможные действительные значения, мы получим всю совокупность возможных движений, описываемых уравнением (1.1).

2. Линейные системы. Напомним теперь некоторые свойства линейных уравнений второго порядка. Рассмотрим сначала уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.3)$$

Выпишем для него интеграл (1.2), который будем называть интегралом энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C. \tag{1.4}$$

Здесь C носит название постоянной энергии.

Так как уравнение (1.3) допускает группу преобразований сдвига $t' = t + h$, то без ограничений общности можно принять, что либо $x(0) = 0$, либо $\dot{x}(0) = 0$ *). Поэтому в качестве постоянной энергии будем принимать либо начальное значение кинетической энергии $C = T(0) = \frac{1}{2} \dot{x}^2(0)$, либо начальное значение потенциальной энергии $C = \Pi(0) = \frac{\omega^2 x^2(0)}{2}$. Разрешая (1.4), относительно \dot{x} , получим

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2C - F(x)}, \tag{1.4'}$$

где

$$F(x) = 2 \int \omega^2 x \, dx = \omega^2 x^2.$$

Рассмотрим фазовую плоскость уравнения (1.3). Фазовые траектории этого уравнения определяются из интеграла энергии. Как уже указывалось, они образуют некоторое однопараметрическое семейство кривых, зависящих от постоянной C . В плоскости (F, x) начертим сначала кривую $F = F(x)$. Проведем затем прямую $F = 2C$, разность $2C - F(x)$ будет равна \dot{x}^2 . Порядок построения этих кривых ясен из рис. 2. Легко убедиться в том, что фазовые траектории целиком заполняют плоскость $(x, y = \dot{x})$ — каждой паре значений x и y отвечает единственное значение постоянной энергии C .

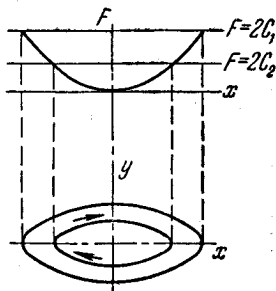


Рис. 2.

Мы видим, что все фазовые траектории — замкнутые кривые. Это значит, что все решения уравнения (1.3) периодические. Поясним еще раз это обстоятельство. Двигаясь вдоль фазовой траектории, изображающая точка через некоторое время снова вернется в исходное состояние $x = x_0, \dot{x} = y_0$. Поскольку уравнение (1.3) не содержит времени, то условия $x = x_0, \dot{x} = y_0$ будут порождать то же движение, которое только что закончилось в этой точке. Так как изображающая точка в верхней

*) Последнее означает, что любое движение с заданной энергией C , описываемое уравнением (1.3), можно получить из найденного простой заменой $t \rightarrow t + h$, где h — некоторая постоянная.

полуплоскости движется (при изменении t) в сторону возрастающих значений переменного x , а в нижней — в сторону убывающих x , то вдоль фазовой траектории изображающая точка движется в направлении, указанном стрелкой (см. рис. 2).

Для данного значения постоянной энергии C действительные ветви кривой (1.4) существуют только для тех x , для которых $F(x) > 2C$. Точка $x = \dot{x} = 0$ определяет положение равновесия. В самом деле, поскольку при $x = 0$ ускорение $\ddot{x} = 0$ также равно нулю, то точка, имеющая скорость, равную нулю, и занимающая в некоторый момент положение $x = 0$, будет оставаться всегда в этом положении.

Точка $x = \dot{x} = 0$ будет особой точкой для уравнения (1.3), поскольку в ней не определено значение касательной к фазовой траектории

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{\dot{x}}.$$

Особая точка, в любой достаточно малой окрестности которой все фазовые траектории замкнуты, называется центром, следовательно, точка $x = \dot{x} = 0$ является особой точкой типа центр.

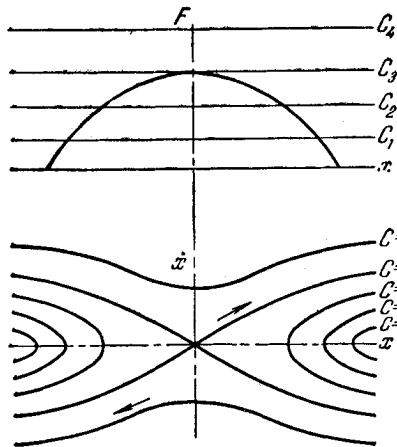


Рис. 3.

Из определения следует, что всегда можно задать начальное положение изображающей точки (не совпадающей с центром) так, чтобы в любой момент времени эта точка осталась бы в заданной окрестности центра. Поэтому центр является устойчивой особой точкой.

Если в уравнении (1.3) мы изменим знак перед вторым членом, то это приведет к изменению знака функции $F(x)$. Фазовая плоскость для этого случая изображена на рис. 3.

Мы видим, что все траектории будут незамкнутыми, т. е. соответствующие им движения — аperiодические. Точка $x = \dot{x} = 0$ также будет особой точкой уравнения (1.3) и будет определять положение равновесия. Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории ведут себя подобно тому, как это показано на рис. 3, называется седлом. Фазовые траектории, отвечающие значению $C = C_3$, проходят через начало координат (через сед-

ловую точку). Они образуют кривую, называемую сепаратрисой (от французского слова *séparer* — разделять). Ветви сепаратрисы отделяют фазовые траектории, пересекающие ось абсцисс, от области, занятой фазовыми траекториями, которые ось абсцисс не пересекают. Изображающая точка, не лежащая на сепаратрисе и начальное положение которой сколь угодно близко к особой точке типа седла, за достаточно большой промежуток времени всегда выйдет из любой окрестности этой точки. Поэтому седло является неустойчивой особой точкой. Итак, в зависимости от знака перед $\omega^2 x$ уравнение

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0 \quad (1.5)$$

имеет либо замкнутые фазовые траектории (либрационные или периодические движения), либо неограниченные (апериодические).

Разумеется, этот результат можно получить непосредственно, поскольку решение уравнения (1.5) выписывается в явном виде

$$x = A \cos(\omega t + h)$$

в случае, если перед вторым слагаемым стоит знак плюс, или

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

в случае знака минус. Отсюда для колебательных движений период $T = 2\pi/\omega$, т. е. он определяется только интенсивностью возвращающей силы ω и не зависит от энергии системы.

Таким образом, амплитуда — максимальное отклонение от положения равновесия и период колебаний в линейных системах друг от друга не зависят. Как следует из (1.4), максимальное отклонение от положения равновесия определяется только постоянной энергии (при заданном ω). В самом деле, максимальное отклонение изображающей точки от положения равновесия будет при $\dot{x} = 0$. Следовательно,

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2C}{\omega^2}}.$$

Таким образом, период колебаний T и максимальное отклонение (амплитуда) не связаны между собой. Такое свойство линейных колебательных систем (независимость периода от энергии) называется изохронностью.

Напомним еще о характере вынужденных колебаний линейного осциллятора. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \cos \sigma t, \quad (1.6)$$

общее решение которого имеет вид

$$x = \frac{\mu}{\omega^2 - \sigma^2} \cos \sigma t + A \cos(\omega t + h). \quad (1.6')$$

Отсюда следует, что при $\sigma \rightarrow \omega$ для любого фиксированного значения времени t стационарное решение (1.6') стремится к бесконечности. Это значит, что при $\sigma = \omega$ решений вида (1.6') уравнение (1.6) не допускает. Известно, что в этом случае решение уравнения (1.6) содержит слагаемое

$$\bar{x} = \frac{\mu t}{2\sigma} \sin \sigma t$$

и, следовательно, будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$.

3. Фазовая плоскость уравнения Дюффинга. Рассмотрим теперь простейшее нелинейное уравнение — так называемое уравнение Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0. \quad (1.7)$$

Изучим структуру его фазовой плоскости. Интеграл энергии для уравнения (1.7) имеет вид

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \Pi = C,$$

где Π — потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}.$$

Следовательно,

$$x = \pm \sqrt{2(C - \Pi)}.$$

Таким образом, фазовая траектория уравнения (1.7) состоит из двух ветвей, причем действительные участки ветвей будут существовать только для тех значений x , для которых $\Pi < C$. Пусть $\mu > 0$ и $\omega^2 > 0$. Для этого случая фазовая плоскость изображена на рис. 4. Графическое построение нам показывает, что все фазовые траектории замкнуты, т. е. все решения уравнения (1.7) периодические. Таким образом, фазовая плоскость (1.7) будет идентична фазовой плоскости линейного осциллятора. Однако, как мы увидим ниже, колебания, описываемые уравнением (1.7), обладают одним свойством, качественно отличающим эти движения от линейных колебаний: период движений, изображенных на рис. 4, зависит от амплитуды.

Если $\mu < 0$, то фазовая плоскость перестает быть похожей на фазовую плоскость линейного осциллятора. Она изображена на рис. 5. Мы видим, что малым энергиям системы соответствуют периодические движения в окрестности положения равновесия и движение в этом случае качественно напоминает гармонические колебания. Этого можно было ожидать заранее, поскольку для малых отклонений роль слагаемого μx^3 мала.

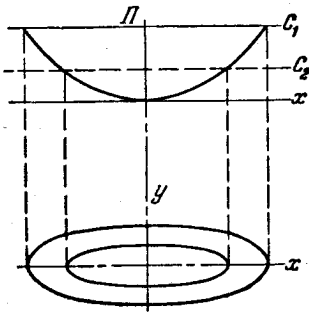


Рис. 4.

При увеличении начальной энергии системы, замкнутая кривая в фазовой плоскости все больше будет отличаться от эллипса. Существует критическое значение энергии C^* такое, что для любой начальной энергии $C > C^*$ в системе, которая описывается уравнением (1.7), не могут существовать периодические движения. Значение C^* нетрудно вычислить. Оно равно максимуму Π . Этот максимум достигается при $x = \pm \frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ и равен

$C^* = \frac{\omega^4}{4|\mu|}$. Если $C > C^*$, то движения становятся неограниченными: $|x| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Как это видно из чертежа, неограниченные движения могут существовать также и при значениях C , меньших критического. В самом деле, для любого $C < C^*$ можно указать такое x , что разность $C - \Pi(x)$ будет положительной. Но этим движениям при $\dot{x} = 0$ соответствуют большие начальные отклонения x_0 , т. е. поле, напряженность которого равна $\omega^2 x - |\mu| x^3$, выталкивает точку, если она находится достаточно далеко от начала координат.

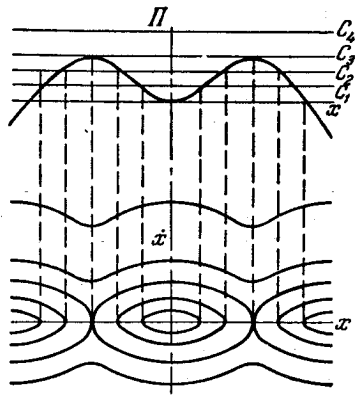


Рис. 5.

Значению $C = C^*$ соответствует фазовая траектория, которая является сепаратрисой. Сепаратриса, в частности, отделяет область начальных состояний, которым соответствуют периодические движения, от области начальных условий, которым соответствуют неограниченные движения.

Сепаратриса пересекает ось Ox , точка пересечения сепаратрисы с осью абсцисс также является положением равновесия ($\dot{x} = 0$ и $\ddot{x} = 0$). Как это видно из чертежа, эта точка является седлом, т. е. в ее окрестности система, описываемая нелинейным уравнением (1.7), ведет себя, как линейный осциллятор, у которого изменен знак внешней силы.

Рассмотрим еще одно видоизменение уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} - \omega^2 x + \mu x^3 = 0, \tag{1.8}$$

где $\mu > 0$, а ω^2 по-прежнему положительно. Фазовая плоскость этого уравнения изображена на рис. 6.

Мы видим, что в этом случае фазовая плоскость содержит два положения устойчивого равновесия — это точки $O_1 \left(-\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}, 0 \right)$

и $O_2\left(\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}, 0\right)$, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. Кроме того, на фазовой плоскости есть еще одно положение равновесия. Это начало координат. Точка O определяет неустойчивое положение равновесия. Действительно, изображающая точка, которая в начальный момент находится сколь угодно близко к началу координат, с течением времени удалится от начала координат на конечное расстояние.

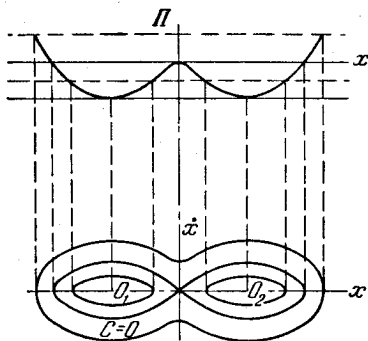


Рис. 6.

Пусть, например, изображающая точка в начальный момент имеет координаты $(0, \delta)$. Эта точка будет двигаться вдоль фазовой траектории, и ее расстояние до начала координат будет превосходить в отдельные отрезки времени число $\sqrt{\frac{2\omega}{\mu}}$, как бы мало δ ни было. Очевидно, что такое движение неустойчиво. Фазовая траектория, которая проходит через начало координат является сепаратрисой. В этом случае она отделяет одну область периодических движений от другой области движений, также периодических, так как система (1.8) допускает только периодические движения.

4. Пример периодической фазовой плоскости. В заключение рассмотрим еще один пример

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) описывает движение математического маятника. Интеграл энергии уравнения (1.9) можно записать так:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = C - \Pi,$$

где

$$\Pi = 1 - \cos x.$$

Фазовая плоскость уравнения (1.9), изображенная на рис. 7, в этом случае будет иметь периодическую структуру. В окрестностях точек $x_j = 2\pi j$ ($j = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) движения будут периодическими. Через точки $x_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 3, \dots$) проходит сепаратриса, которая отделяет области периодических движений от областей неограниченных движений.

Фазовой плоскостью рассмотренного типа будет, очевидно, обладать любая колебательная система, которая описывается

уравнением вида

$$\ddot{x} + f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — периодическая функция x периода T и такая, что

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = 0.$$

Рассмотренных примеров достаточно, чтобы убедиться в огромном разнообразии возможных типов движений, описываемых нелинейными уравнениями.

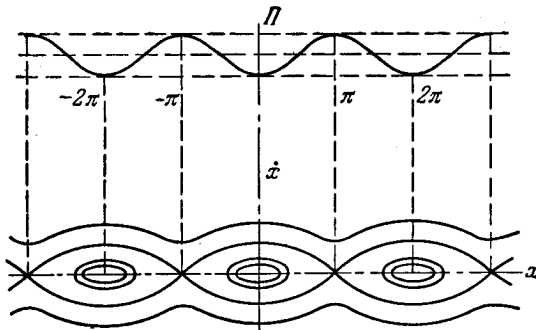


Рис. 7.

Примечание. Мы рассмотрели метод фазовой плоскости на примерах линейного уравнения и уравнения Дюффинга. Этот метод применим при исследовании широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка, включая уравнения с разрывными правыми частями. В самом деле, все рассуждения этого параграфа могут быть проведены для уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

при единственном условии существования интеграла

$$\Pi = \int_0^x f(x) dx.$$

§ 2. Дальнейшее изучение уравнения Дюффинга

В этом параграфе мы продолжим изучение уравнения Дюффинга. Запишем его в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \mu x^3 = 0. \quad (2.1)$$

В отличие от предыдущего параграфа, где изучение проводилось качественными методами, в этом параграфе установим некоторые количественные закономерности. Мы воспользуемся при этом тем обстоятельством, что интеграл уравнения (2.1) можно записать в эллиптических функциях.

1. Некоторые сведения из теории эллиптических функций. Выпишем некоторые вспомогательные формулы из теории эллиптических функций Якоби.

а) Функция $z = \operatorname{sn}(u, k)$ (эллиптический синус) определяется так:

$$z = \operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi(k) = \sin \operatorname{am} u,$$

где амплитуда $\varphi = \operatorname{am} u$ определяется как обращение эллиптического интеграла

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}. \quad (2.2)$$

Здесь k — число, которое называется модулем эллиптической функции, $\sin \varphi$ — периодическая функция периода 2π . При изменении φ на 2π величина u изменяется на $T_u = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$

и обратно: при изменении u на T_u амплитуда φ изменяется на 2π . Следовательно, $\operatorname{sn}(u, k)$ — периодическая функция u периода T_u . Величина

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \quad (2.3)$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода. Так как

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \dots,$$

то

$$T_u = 4K(k). \quad (2.4)$$

б) Функция $z = \operatorname{cn}(u, k)$ — эллиптический косинус, определяется равенством

$$z = \operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u.$$

в) Функция дельта амплитуды

$$z = \operatorname{dn}(u, k) = \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Эллиптический синус, косинус и дельта амплитуды называются эллиптическими функциями Якоби.

г) Связь между функциями Якоби

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1. \quad (2.5)$$

д) Формулы дифференцирования

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u, & \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2. Выражение общего интеграла уравнения Дюффинга. Используя выписанные формулы, покажем, что общий интеграл уравнения (2.1) можно представить в виде

$$x = C \operatorname{sn} [\sigma(t+h), k]. \quad (2.7)$$

В это выражение входят четыре постоянные C , σ , h и k . Одна из постоянных, которая входит в общий интеграл этого уравнения, должна быть аддитивной. В самом деле, если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению, то, каково бы ни было число g , функция $x(t+g)$ также является решением. В выражении (2.7) аддитивную постоянную мы обозначили буквой h . Три другие постоянные определяются двумя числами ω и μ . Это значит, что они должны быть связаны двумя соотношениями. Следовательно, в их определении имеется еще один произвол. Итак, в выражении (2.7) имеются лишь две постоянные, которые могут быть выбраны по произволу, причем одна из них аддитивная постоянная h .

Вычислим теперь \dot{x} и \ddot{x} :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= C\sigma \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -C\sigma^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u). \end{aligned}$$

Используя (2.5), преобразуем полученное выражение к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -C\sigma^2 [(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \operatorname{sn} u + k^2 (1 - \operatorname{sn}^2 u) \operatorname{sn} u] = \\ &= -C\sigma^2 (1 + k^2) \operatorname{sn} u + 2C\sigma^2 k^2 \operatorname{sn}^3 u. \end{aligned}$$

Наконец, вспоминая, что

$$C \operatorname{sn} u = x,$$

получим окончательно

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + \sigma^2 (1 + k^2) x - \frac{2\sigma^2 k^2}{C^2} x^3 = 0. \quad (2.8)$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (2.1), мы видим, что его решение можно представить в форме (2.7), если параметры σ , C и k подчинить двум условиям

$$\sigma^2(1+k^2) = \omega^2, \quad (2.9)$$

$$\frac{2\sigma^2 k^2}{C^2} = \mu. \quad (2.10)$$

Таким образом, мы показали, что общий интеграл уравнения (2.1) имеет форму (2.7), если только параметры C , σ и k удовлетворяют соотношениям (2.9) и (2.10).

Постоянная h занимает особое место среди произвольных постоянных. В самом деле, предположим, что мы нашли некоторое частное решение уравнения (2.1), зависящее от одной произвольной постоянной

$$x = X(C, t);$$

тогда мы сразу можем выписать общее решение этого уравнения

$$x = X(C, t+h).$$

Таким образом, в случае систем, параметры которых не зависят от времени, нам достаточно изучить только некоторый однопараметрический класс частных решений. Пользуясь этим обстоятельством, рассмотрим решение уравнения (2.1) вида

$$x = C \operatorname{sn}(\sigma t, k).$$

По аналогии с линейными системами числа C и σ будем называть «амплитудой» и «частотой». Так как $\sigma t = u$, то при $t=0$, $u=0$ и, следовательно,

$$x(0) = 0.$$

Обозначим $\dot{x}(0) = \lambda$, где λ — произвольное число. И так как

$$\operatorname{cn}(0) = \operatorname{dn}(0) = 1,$$

то получим

$$\dot{x}(0) = \lambda = \sigma C. \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) устанавливает зависимость «амплитуды» C и «частоты» σ от начальной энергии $T = \dot{x}_0^2/2$. Соотношения (2.9), (2.10) и (2.11) позволяют определить параметры σ , k и C .

3. Формула для периода. Для того чтобы нагляднее представить физический смысл изучаемого явления и роль различных параметров, удобно перейти к безразмерным переменным. Для этого надо прежде всего выбрать определяющие масштабы. В качестве таких величин можно выбрать, например, начальную энергию и отклонение от положения равновесия. Тогда весь

процесс будет определяться только характеристиками силового поля, т. е. числами ω и μ . Однако такой выбор масштабов не удобен, так как, варьируя параметры ω и μ , мы будем все время получать различные фазовые плоскости. Поэтому в качестве определяющих масштабов удобнее выбрать сами величины ω и μ . Пусть безразмерное отклонение ξ и безразмерное время τ определяется равенствами

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}} \xi, \quad t = \frac{\tau}{\omega}.$$

В этих переменных уравнение (2.1) будет иметь вид

$$\xi + \xi - \xi^3 = 0. \quad (2.12)$$

Уравнения для определения σ , k и C будут теперь такими:

$$\sigma^2(1 + k^2) = 1, \quad (2.13)$$

$$2 \frac{\sigma^2 k^2}{C^2} = 1, \quad (2.14)$$

$$\sigma C = l, \quad (2.15)$$

где $l = \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\omega^2}$. Отсюда видно, что характер процесса определяется только одной безразмерной величиной — безразмерной энергией l^2 . Найдем зависимость периода колебаний T от этой величины. Модуль эллиптической функции k также определяется только числом l . Сначала найдем эту связь. Из (2.14) и (2.15) находим

$$k^2 = \frac{l^2}{2\sigma^4}.$$

Подставляя это значение k в (2.13), находим

$$\sigma^4 - \sigma^2 + \frac{l^2}{2} = 0,$$

откуда

$$\sigma^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2l^2}}{2}.$$

В этом выражении следует выбирать определенным образом знак перед корнем. Выбираем знак $+$, поскольку при $l \rightarrow 0$ (т. е. $\dot{x}(0) \rightarrow 0$ или $\mu \rightarrow 0$, или $\omega \rightarrow \infty$) задача должна переходить в линейную*), т. е.

$$\lim_{l \rightarrow 0} \sigma(l) = 1.$$

*) Используя периодичность эллиптических функций, нетрудно показать, что решение, которое соответствует тому случаю, когда перед корнем взят знак $-$ (минус), получается из исследуемого сдвигом на период T_u .

Подставляя это значение σ в выражение для k^2 , окончательно получаем

$$k^2 = \frac{2l^2}{(1 + \sqrt{1 - 2l^2})^2}. \quad (2.16)$$

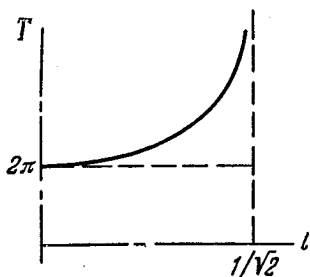
Теперь мы можем определить зависимость периода от начальной энергии. На основании формулы (2.3) получим

$$T_u = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2l^2}{(1 + \sqrt{1 - 2l^2})^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17) легко найти период по времени T_t , так как в нашем случае $u = \sigma t$, т. е. $T_t = \frac{1}{\sigma} T_u$:

$$T_t = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2l^2}}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2l^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \sqrt{1 - 2l^2})^2}}}.$$

Формула (2.18) содержит основной результат данного параграфа — она в явном виде дает зависимость периода колебаний от начальной энергии l^2 , т. е. дает количественное выражение одному из основных свойств нелинейных колебаний — его неизохронности. Зависимость $T_t(l)$ приведена на рис. 8. При $\mu = 0$ мы имеем линейную задачу и безразмерный период колебаний равен 2π . Таким образом,



$$\lim_{l \rightarrow 0} T = 2\pi.$$

Рис. 8.

При $l \rightarrow 1/\sqrt{2}$ период T_t стремится к бесконечности. Маятник, который описывается уравнением (2.12), обладает тем свойством, что при некотором значении начальной энергии движение изображающей точки в фазовой плоскости происходит по сепаратрисе. Как было показано в предыдущем параграфе, это критическое значение энергии достигается для уравнения (1.7) при $x = \pm \omega/\sqrt{\mu}$ и равно $\omega^4/4|\mu|$. В нашем случае $\omega = 1$, $\mu = -1$ и критическое значение энергии $C = l^2/2$. Отсюда $l = 1/\sqrt{2}$. Таким образом, попутно мы установили, что движение по сепаратрисе, если его рассматривать как колебательное, имеет бесконечный период.

В предыдущем параграфе качественными методами мы установили, что уравнение Дюффинга, помимо периодических решений, допускает также решения аperiodические. Характер колебаний определяется только начальной энергией. Если начальная энергия меньше C^* , то процесс, описываемый уравнением, носит колебательный характер, в противном случае — аperiodический. Таким образом, уже качественное рассмотрение позволило нам установить отсутствие изохронности колебательного процесса, описываемого уравнением Дюффинга. Теперь мы установили характер этой закономерности и до конца решили вопрос об этом важном свойстве нелинейных колебаний, описываемых уравнением Дюффинга.

Мы видим, что существуют такие нелинейные системы, у которых характер движения очень напоминает гармонические колебания. Однако эти колебания оказались неизохронными: с изменением амплитуды изменилась и частота. Мы обнаружили также, что существуют движения и качественно непохожие на линейные колебания.

Существует и еще целый ряд явлений, в которых проявляется качественное различие линейных и нелинейных колебаний. Например, поведение при резонансе. Даже само понятие резонанса в нелинейных системах, строго говоря, не имеет смысла. В самом деле, в линейных системах резонансом называют явления, возникающие в линейной системе под действием внешней периодической силы, частота которой совпадает с частотой свободных колебаний системы. В условиях резонанса амплитуда колебаний линейной системы непрерывно возрастает. Таким образом, внешняя возбуждающая сила в этих условиях непрерывно вносит энергию в линейную систему. В нелинейной системе с изменением амплитуды немедленно изменяется частота собственных колебаний. Следовательно, «резонансная» ситуация, если она имела место, немедленно разрушится. Эти рассуждения наводят на мысль о том, что могут существовать нелинейные системы, у которых для любых частот возмущающих воздействий могут существовать установившиеся колебательные режимы конечной амплитуды. Уже в следующей главе мы убедимся в справедливости подобного прогноза и изучим методы, позволяющие определить резонансные режимы в нелинейных системах.

§ 3. Примеры колебаний систем с переменными параметрами

1. Предварительные замечания. Рассмотрим теперь несколько примеров колебаний систем, параметры которых меняются со временем. Мы будем рассматривать только простейший случай колебаний системы одной степени свободы, которые описываются

линейным уравнением вида

$$\ddot{x} + f(t)x = 0, \quad (3.1)$$

где $f(t)$ — некоторая заданная функция времени. Можно говорить, что уравнение (3.1) описывает малые колебания пружинного маятника, жесткость которого изменяется со временем.

Пусть $f(t) \geq 0$ для любого $t > 0$; тогда, рассуждая по аналогии с линейными колебаниями, можно было бы ввести понятие мгновенной частоты

$$\omega(t) = \sqrt{f(t)} \quad (3.2)$$

и утверждать, что колебания нашего маятника представляют собой в каждый момент времени гармонические колебания и происходят с мгновенной частотой (3.2). Такого типа рассуждения иногда встречаются при решении инженерных задач. Можно указать целый ряд задач, когда такой упрощенный подход, именуемый иногда принципом замораживания коэффициентов, дает результаты, точность которых вполне удовлетворительна с практической точки зрения. Однако в общем случае судить о свойствах системы с переменными параметрами по свойствам системы с замороженными коэффициентами нельзя. Это может привести не только к количественным, но и к грубым качественным ошибкам.

2. Случай, когда возвращающая сила стремится к нулю. Рассмотрим маятник, колеблющийся под действием возвращающей силы, обратно пропорциональной квадрату времени

$$\ddot{x} + \frac{x}{t^2} = 0. \quad (3.3)$$

Разыскивая решение в виде $x = t^\lambda$ и подставляя это выражение в (3.3), получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}.$$

Таким образом, линейно независимые решения уравнения (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \exp \left\{ \ln t \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3} \right] \right\}, \\ x_2 &= C_2 \exp \left\{ \ln t \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3} \right] \right\} \end{aligned}$$

или, переходя к действительным величинам, получим

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= A_1 \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), \\ x_2^* &= A_2 \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где A_1, A_2 и C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, колебательный процесс, описываемый уравнением (3.3), можно представить как суперпозицию двух колебательных процессов, определяемых формулами (3.4). Характер колебательного процесса, который описывается уравнением (3.3), изображен на рис. 9.

Этот пример наглядно показывает, насколько далеко от истины нас может увести рассуждение «по аналогии с системами, имеющими постоянные параметры». Несмотря на то, что возвращающая сила маятника всегда отрицательна, т. е. всегда направлена против отклонения x в сторону положения равновесия, амплитуда колебаний маятника (величина, пропорциональная \sqrt{t}) неограниченно возрастает.

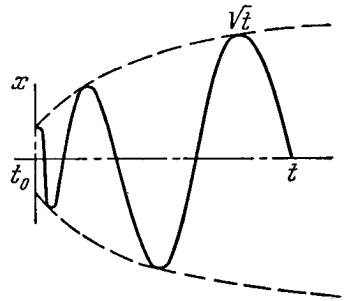


Рис. 9.

Если мы введем понятие мгновенной частоты

$$\omega = \frac{\sqrt{3} \ln t}{2t}, \quad (3.5)$$

то увидим, что частота ω с течением времени уменьшается и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а амплитуда неограниченно увеличивается.

3. Колебания с диссипативными силами. Предположим теперь, что на маятник (3.3) действует диссипативная сила, пропорциональная $1/t$. Уравнение, описывающее движение маятника будет теперь таким:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0. \quad (3.6)$$

Разыскивая его решение снова в виде $x = t^\lambda$, найдем, что λ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.6) можно представить в виде

$$x = A_1 \cos \ln t + A \sin \ln t. \quad (3.7)$$

Характер колебательного процесса для этого случая изображен на рис. 10. Мы видим, что, несмотря на действие диссипативных сил, колебание маятника происходит с постоянной амплитудой, а не затухает, как было бы в том случае, если бы параметры системы были бы постоянны. «Мгновенная» частота колебаний (3.7), точно так же как и в предыдущем случае, стремится к нулю при неограниченном возрастании времени.

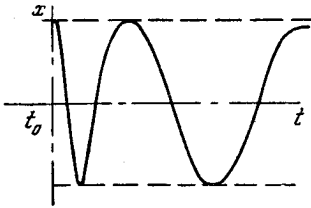


Рис. 10.

Можно привести примеры систем, колебательное движение которых происходит при наличии диссипативных сил и тем не менее амплитуда колебаний неограниченно растет со временем. К числу таких примеров относятся колебания неуправляемой оперенной ракеты, движущейся вертикально вверх с постоянной скоростью. Наличие оперения создает возвращающий

аэродинамический момент. Таким образом, такая ракета, как говорят в динамике полета, имеет запас статической устойчивости. Кроме восстанавливающего аэродинамического момента, на ракету действует демпфирующий аэродинамический момент. Несмотря на эти обстоятельства, движение такой ракеты неустойчиво: амплитуда колебаний неограниченно возрастает со временем. Причина состоит в том, что с увеличением высоты полета плотность воздуха ρ экспоненциально убывает, а следовательно, неограниченно убывают и оба момента аэродинамических сил. Разумеется, в подобной задаче метод «замораживания» коэффициентов никакой полезной информации о поведении ракеты дать не может.

В следующем параграфе мы приведем некоторые условия, которые надо наложить на параметры системы, достаточные для того, чтобы амплитуда колебаний маятника, параметры которого изменяются со временем, были ограничены во все моменты времени.

4. Случай, когда возвращающая сила ограничена. Мы рассмотрели колебания маятника, у которого возвращающая сила с течением времени стремится к нулю, и установили, что это обстоятельство может служить причиной неустойчивости (неограниченного возрастания амплитуды). Однако неограниченное возрастание амплитуды может иметь место и для колебаний такого

маятника, у которого интенсивность возвращающей силы ограничена снизу для любого момента времени.

Рассмотрим пример маятника, колебание которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + (1 + \varphi(t))x = 0. \quad (3.8)$$

Поставим вопрос о том, какие условия надо наложить на функцию $\varphi(t)$, чтобы решение уравнения (3.8) было ограничено.

Кажется, что для этого достаточно, например, потребовать, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0. \quad (3.9)$$

Однако это предположение неверно. Более того, если одновременно с условием (3.9) выполнено еще условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k \varphi}{dt^k} = 0 \quad (k \geq 1), \quad (3.10)$$

то и это не является гарантией ограниченности решения уравнения (3.8).

Предположим, что $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi = 3g \sin t - \dot{g} \cos t - g^2 \cos^2 t, \quad (3.11)$$

где $g(t)$ — произвольная функция. Нетрудно убедиться прямым вычислением, что функция

$$x = \exp \left\{ \int_0^t g(\tau) \cos \tau \, d\tau \right\} \cos t \quad (3.12)$$

является решением уравнения (3.8), если φ имеет вид (3.11). Колебательный процесс (3.12) можно записать в виде

$$x = A(t) \cos t,$$

где

$$A = \exp \int_0^t g(\tau) \cos \tau \, d\tau.$$

Величину $A(t)$ будем называть амплитудой.

Примем теперь, что

$$g(t) = \frac{\cos t}{t}.$$

Тогда амплитуда имеет вид

$$A = \exp \int_0^t \frac{\cos^2 \tau}{\tau} \, d\tau. \quad (3.13)$$