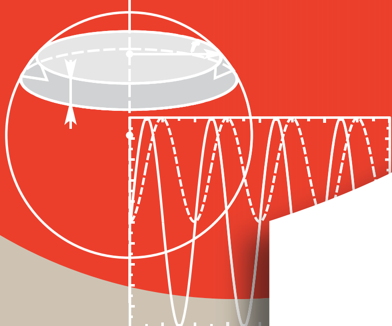
Н. П. Калашников
М. А. Смондырев

ОСНОВЫ ФИЗИКИ



1

ЛАБОРАТОРИЯ
ПИЛОТ

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К17

Серия основана в 2009 г.

Калашников Н. П.

К17 Основы физики [Электронный ресурс] : в 2 т. Т. 1 / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 545 с.). — М. : Лаборатория знаний, 2017. — (Учебник для высшей школы). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-00101-528-4 (Т. 1)
ISBN 978-5-00101-527-7

Учебник соответствует программе дисциплины «Физика» для технических вузов общего профиля. Два его тома входят в состав учебного комплекта, включающего также учебное пособие «Основы физики. Упражнения и задачи» тех же авторов.

Во многих отношениях данный учебник не имеет аналогов. Ряд оригинальных методических приемов и способов изложения материала, включение новых, зачастую неожиданных тем и ярких примеров, отсутствующих в традиционных курсах физики, позволяют учащимся приобрести навыки уверенного самостоятельного мышления, глубоко уяснить физические основы самых различных реальных природных явлений, давать их практические, качественные оценки, оперируя размерностями и порядками величин.

Для студентов инженерно-технических и естественнонаучных специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Основы физики : в 2 т. Т. 1 / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 542 с. : ил. — (Учебник для высшей школы). — ISBN 978-5-00101-004-3 (Т. 1); ISBN 978-5-00101-003-6.

ISBN 978-5-00101-528-4 (Т. 1)
ISBN 978-5-00101-527-7

Часть I

Физические основы механики

Когда кончился бензин, автомобиль вынужден был остановиться. Это я тоже сам вчера видел. А после этого еще болтают об инерции, господа! Не едет, стоит, с места не трогается! Нет бензина. Ну, не смешно ли?

Ярослав Гашек. «Похождения бравого солдата Швейка»

Глава 1

Измерения физических величин

Предметом естествознания в широком смысле является познание окружающего нас мира. Задача естественных наук состоит в том, чтобы сформировать в нашем сознании такую модель физического мира, которая наиболее полно отражала бы его свойства и обеспечивала бы такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира. Дж. Максвелл писал: «Точные науки стремятся к тому, чтобы свести загадки природы к определению некоторых величин путем операций над числами». Поэтому естественные науки «говорят» с природой на языке математики. Принцип *nulla scientia potest sciri sine mathematika* (никакую науку нельзя познать без математики) был сформулирован еще в средневековье. Но откуда взять эти числа, которыми оперирует математика, которые должны фигурировать в уравнениях, выражающих те или иные закономерности природы? Единственным источником их может служить сама природа.

1.1 О разнице вопросов «как?» и «почему?»

Учебники принято начинать с определения предмета исследования соответствующей науки. Трудно удержаться, чтобы не процитировать прелестное и наивное определение из первого учебника физики на русском языке[1], изданного при Екатерине II: «Физика есть сколько приятная, столько и полезная наука, толкующая свойства тел или предметов, нас окружающих. Физика научает нас обо всем рассуждать здраво и основательно, а чрез то самое и необходимо нужна для всякого человека».

Естествознание — комплекс экспериментальных наук, в основе которых лежат наиболее общие закономерности, изучаемые физикой. Естественные науки начинаются с наблюдений и измерений, ими же проверяются и питаются в

---

[1] *Иоганн Якоб Эберт.* Краткое руководство к физике. СПб, 1787. Перевод этой книги с немецкого появился вследствие начала формирования государственной системы среднего образования и введения преподавания физики как самостоятельного предмета.

своем развитии. Конечно, новые идеи в науке появляются и благодаря умозрительным рассуждениям, но окончательный ответ на решающие вопросы может быть получен только в эксперименте. Да и сами эти идеи на пустом месте не возникают.

С помощью приборов мы задаем природе вопросы и получаем ответы, которые «обрабатываем» в нашем мозгу, на своих компьютерах. Понять явление — значит уметь его описать, знать условия, при которых оно происходит, предсказать его последствия. Важно лишь правильно сформулировать свои вопросы, и тогда мы получаем шанс, что природа на них ответит. Природа (и вместе с ней наука) не отвечает на вопросы «почему?» или «зачем?». Почему тело под действием силы приобретает ускорение? Почему электрическое поле действует на заряд? Разве кто-нибудь в состоянии ответить на эти вопросы? Мы можем лишь констатировать факты: а) если к телу приложена сила, то его движение будет подчиняться уравнению второго закона Ньютона; б) два заряда создают вокруг себя электрическое поле, которое описывается уравнениями Максвелла.

Иными словами, наука ***в принципе*** может ответить лишь на вопросы «что?» и «как?». Как устроен наш мир, какие законы им управляют, каков механизм тех или иных процессов, каковы их характерные времена и масштабы, какими уравнениями они описываются.

Физика изучает самые фундаментальные закономерности природы, самые простые ее составные части. Благодаря этой «простоте» физика (так же, как и химия, молекулярная биология и т. п.) имеет дело с воспроизводимыми ситуациями. Это означает, что мы можем повторить наши эксперименты, и если все условия в точности выполнены, то и результаты будут такими же. Подобное вряд ли возможно, например, в геологии, не говоря уже об общественных науках (экономике, истории и т. д.). Важно понимать также, что физический эксперимент никогда не бывает идеальным, любое измерение производится с определенной точностью. И когда мы говорим о том или ином законе природы, мы должны помнить, что этот закон был установлен в каких-то конкретных условиях и имеет, как правило, конкретные пределы применимости.

Строго говоря, природа не знает никаких законов — она просто существует. Законы природы придумывают люди, пытаясь описать наблюдаемые явления и предсказать поведение рассматриваемых систем в тех или иных условиях. Достоин удивления сам факт, что созданная людьми математика способна на такое. Хотя никто не может быть уверен, что используемый математический аппарат — это единственное средство познания окружающего мира. Вполне возможно, что маленькие зеленые человечки, проживающие в другой галактике, додумались до совершенно другой математики, которая столь же хорошо (а может, и еще лучше) способна описать те же природные явления. У нас же есть пример квантовой механики, в которой возможны разные эквивалентные формулировки, приводящие к одинаковым предсказаниям. А про интенсивно исследуемую сейчас теорию суперструн (М-теорию в десятимерном пространстве), претендующую на описание всех без исключения фундаментальных взаимодействий, включая квантовую гравитацию, один из ее создателей сказал, что это математика XXI века, случайно открытая в XX веке. Когда нынешние профессора были студентами, о такой математике они и не слышали.

Физические модели и теории предназначены для приведения в соответствие между собой тех сведений, которые мы получаем, исследуя явления природы. Ни одна из теорий не может претендовать на звание истинной, она лишь дает наилучшее для данного времени описание той области, в которой она применяется. Мы называем теорию «хорошей», если она:

- исходит из небольшого числа фундаментальных положений;
- имеет достаточно общий характер (т. е. не создана для объяснения всего лишь одного или нескольких фактов);
- позволяет сделать ряд точных и четких предсказаний.

История науки показала, что, как правило, «хорошая» теория допускает возможность усовершенствования. Это не значит, что «хорошая» теория верна безусловно. Теория всегда может быть изменена (или же полностью отвергнута), если станут известны новые факты. Просто при более глубоком проникновении в суть вещей оказывается, что «хорошая» теория является частью более общей теории и имеет свою область применимости. Например, после открытия специальной теории относительности классическую механику Ньютона никто не отменял: в первом порядке по величине отношения v/c скорости объекта v к скорости света c результаты обеих теорий совпадают, но в членах второго порядка v^2/c^2 уже проявляются различия.

Совершенно не исключено, что при усовершенствовании теории какие-то из вопросов «почему?» превратятся в вопросы «как?». ***Почему*** мы живем в трех пространственных измерениях и одном временно́м? Сейчас вряд ли кто сможет ответить на этот вопрос. Но, быть может, когда-нибудь мы поймем, ***как*** свернулись шесть измерений М-теории, оставив нам для проживания «всего лишь» четырехмерное пространство-время.

1.2 Единицы измерения

Результаты многочисленных опытных наблюдений обобщают в виде физических законов, которые представляют собой некоторые утверждения относительно связей между теми или иными физическими величинами. Для проверки на опыте этих утверждений необходимо независимыми способами измерить все те величины, которые связаны в данном физическом законе. Измерение любой физической величины проводится по отношению к определенному стандарту или *единице* этой величины. Эти единицы обязательно должны указываться вместе с численным значением результата. Метрическая система мер, созданная в эпоху Великой французской революции, по мысли ее авторов должна была служить «на все времена, для всех народов, для всех стран».

Из нескольких условно выбираемых основных единиц строятся производные единицы. Если, например, скорость определяется как отношение пройденного расстояния к затраченному времени, то единицей скорости будет отношение единицы длины к единице времени. Но можно было бы взять за основную единицу скорость и тогда выразить единицу расстояния как произведение скорости на время. Именно так и поступают, когда расстояния до звезд измеряют в световых годах (1 св. г. — расстояние, которое свет проходит за год). Можно использовать световые минуты и световые секунды. Так, среднее расстояние от Земли до Солнца равно 146,6 млн км, но с тем же успехом можно утверждать, что оно равно восьми с хвостиком световым минутам.

В Международной системе единиц (СИ — начальные буквы французского наименования *Système International*) в качестве основных выбраны следующие семь единиц:

- единица длины — м (метр) [L]
- единица времени — с (секунда) [T]
- единица массы — кг (килограмм) [M]
- единица электрического тока — A (ампер) [I]
- единица температуры — K (кельвин) [K]
- единица силы света — кд (кандела) [J]
- единица количества вещества — моль (моль) [ν]

В квадратных скобках указано общепринятое обозначение для размерностей: длину можно измерять в метрах, ярдах, мартышках или попугаях, но обозначение L (от англ. *length*) всегда подскажет нам, что мы имеем дело с длиной. Аналогично вводится обозначение размерности времени T (от англ. *time*).

Для простоты ученые стремятся выбрать минимальное число основных величин, которое позволяет дать полное описание физического мира. В выборе основных величин и их производных имеется некоторый произвол.

С двумя из этих единиц мы знакомимся уже с самого детства. Это естественно, так как все события происходят где-то и когда-то. Мы обитаем в пространстве, которое измеряем единицами длины. Мы живем во времени, и человечество научилось его измерять в глубокой древности. ***Почему*** наш мир существует во времени и в пространстве? Мы договорились таких вопросов не ставить, так как наука все равно на них не ответит. Но ***каковы*** свойства пространства и времени? — этот вопрос вполне закономерен. Изучая физические явления, мы узнаем свойства пространства и времени, и процесс этого познания еще далеко не завершен.

До недавнего времени международным эталоном метра считалось расстояние между двумя штрихами на стержне из платинового сплава, хранящемся в Международном бюро мер и весов в Париже. В последние годы эталон метра определялся числом длин световой волны конкретной (оранжевой) спектральной линии изотопа криптона ${}^{86}_{36}\mathrm{Kr}$, соответствующей переходу электрона между квантовыми состояниями $2p_{10}$ и $5d_3$ (что это такое, мы узнаем в заключительных частях курса). Метр содержит 1 650 763,73 длины волны этой спектральной линии в вакууме . Вследствие возросших требований к точности эталона длины в 1983 г. было принято следующее определение метра: это расстояние, проходимое светом в вакууме за время $t = 1/299\,792\,458$ секунд. Иными словами, постулировано, что скорость света ***в точности*** равна $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ м/с. В сущности это означает, что вместо длины в качестве фундаментальной единицы выбрана скорость, а длина стала производной единицей.

На рисунке 1.1 представлены пространственные расстояния, характерные для окружающего мира. Весь доступный нашим наблюдениям мир заключен в интервале от 10^{26} м (радиус видимой части Вселенной) до 10^{-18} м (расстояния, «прощупываемые» в современных экспериментах с элементарными частицами). Для удобства шкала расстояний r изображена в логарифмическом масштабе $\lg(r/1\,\text{м})$. Это значит, что расстоянию 10 м на шкале соответствует число 1, а расстоянию 100 км $=$ 100 000 м — число 5.

Если раньше время определяли по Солнцу, и секунда соответствовала $1/86400$ средних солнечных суток, то теперь она равна продолжительности 9 192 631 770

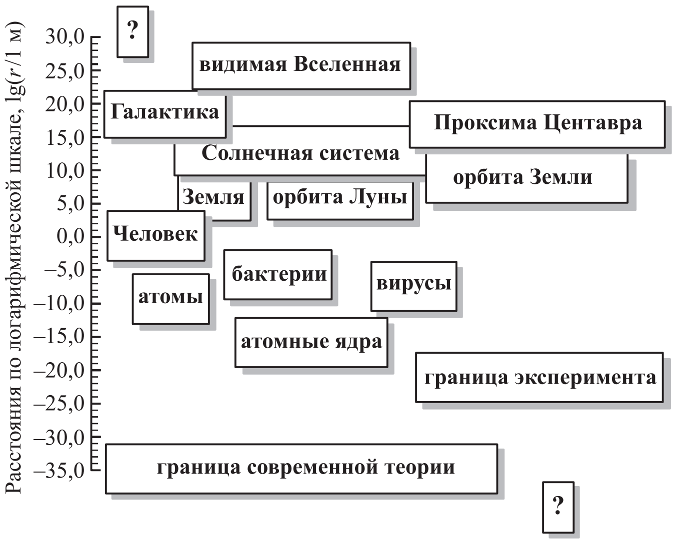


Рис. 1.1. Пространственные расстояния в природе

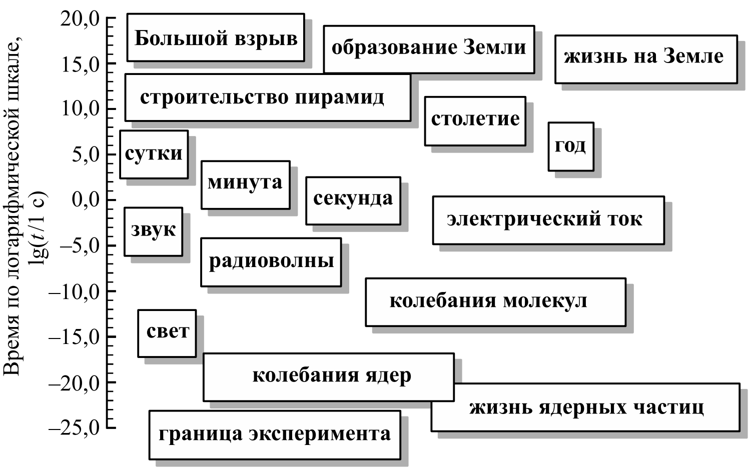


Рис. 1.2. Временны́е интервалы в природе

периодов колебаний световой волны, излученной при переходе между сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия $^{133}_{55}\mathrm{Cs}$. Цезиевый стандарт очень точен: за 6000 лет двое цезиевых часов могут разойтись лишь на одну секунду. Существуют и более точные часы на водородном мазере: разница в секунду набегает здесь за 30 млн лет. Возможно, водородный мазер будет принят когда-нибудь в качестве нового эталона времени.

Некоторые временны́е интервалы, встречающиеся в природе, иллюстрирует рис. 1.2. Самое большое время, о котором мы можем получить какие-то сведения, — это время существования видимой части Вселенной. Она родилась в результате так называемого Большого взрыва примерно 14 млрд лет тому назад ($4 \cdot 10^{17}$ с). Наименьшие времена ($\sim 10^{-26}$ с), с которыми мы сталкиваемся, по порядку величины соответствуют времени, за которое свет проходит самые малые расстояния, доступные сейчас для изучения.

1.3 Анализ размерностей

Физические величины бывают размерными и безразмерными. Величина называется *размерной*, если ее численное значение зависит от выбора системы единиц. Так, промежуток времени между двумя последовательными восходами Солнца мы можем выразить как 1 сутки, или как 24 часа, или как 1440 минут, или 86 400 секунд. Числа меняются, но мы говорим о том же самом интервале времени. Величина называется *безразмерной*, если ее значение сохраняется неизменным при любом выборе системы единиц. Например, высота Эвереста ($h = 8{,}848$ км) и средний радиус Земли ($R = 6371{,}0$ км) — размерные величины, но их отношение уже величина безразмерная: независимо от системы единиц $h/R = 0{,}0014$.

Размерные величины можно умножать и делить друг на друга. Так, отношение пройденного расстояния ко времени в пути дает нам новую физическую величину (скорость), размерность которой $[\mathrm{LT}^{-1}]$ (м/с, км/ч и т. п.). При определении размерности величины обычно пользуются размерностями основных, а не производных величин. Складывать и вычитать можно только величины одинаковой размерности (нельзя сложить, например, сантиметры и граммы).

Любой физический закон не должен зависеть от выбранной нами системы единиц. Это естественно, так как закон природы описывает соотношение между величинами, которое существовало до нас, существует независимо от нас и будет существовать после нас. А система единиц — дело произвольного соглашения между людьми. Отсюда вытекает очень важное правило: ***обе части любого равенства должны иметь одинаковые размерности.*** Написав некое соотношение, мы всегда можем проверить его правильность анализом размерности. Таким путем выявляются многие студенческие ошибки. Более того, подбор размерностей зачастую позволяет угадать результат до проведения детальных вычислений.

Приведем пример. Автомобиль трогается с места и движется при этом равноускоренно с ускорением a. Какую скорость v приобретет автомобиль, пройдя путь s? Применение анализа размерностей позволяет найти вид искомого соотношения. Скорость является функцией a и s. Это значит, что она выражается как произведение некоторых степеней этих величин: $v = Ca^p s^q$, где C — безразмерная постоянная. Надо определить показатели степени p и q. Запишем формулу размерности для этого соотношения:

$$\left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right] = \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right]^p [\mathrm{L}]^q \quad \text{или} \quad \left[\mathrm{LT}^{-1}\right] = \left[\mathrm{L}^{p+q}\mathrm{T}^{-2p}\right].$$

В силу того что все семь основных единиц являются независимыми, для согласования размерностей обеих частей равенства необходимо, чтобы p и q удовлетворяли системе уравнений: $1 = p + q,\ -1 = -2p$, откуда следует: $p = 1/2,\ q = 1/2$. Таким образом, анализ размерностей приводит нас к формуле $v = C\sqrt{as}$.

Значение безразмерной постоянной C не может быть определено таким способом; при точном решении оно оказывается равным $C = \sqrt{2}$. Как правило, значения безразмерных постоянных в физике (факторы типа $\sqrt{2}$, $1/2$, π и т. п.) не слишком велики и не слишком малы. Поэтому анализ размерностей позволяет оценить масштабы тех или иных физических величин.

Применение анализа размерностей требует осторожности и определенного искусства. Здесь могут встретиться два подводных камня. Первый из них — определение физических величин, от которых может зависеть результат. Для этого требуется понимание, какие физические законы и явления важны для рассматриваемой системы. Второй подводный камень — существование в данной задаче величин, которые могут образовать безразмерное отношение.

Рассмотрим пример. Используя анализ размерностей, найти силу сопротивления F_r среды движущемуся телу. В этой задаче важно с самого начала определить, от каких величин может зависеть искомая сила. Что нам подсказывает опыт? Чем больше скорость v движения тела, тем больше сила сопротивления среды. Значит, сила F_r должна зависеть от скорости движения. Далее, тела с бóльшим поперечным сечением испытывают большее сопротивление, чем с меньшим. Поэтому в ответ должна войти площадь S поперечного сечения тела. Наконец, сила F_r должна зависеть от параметра, характеризующего свойства среды. Здесь и таится первый подводный камень. Какую характеристику среды выбрать?

Представляется естественным в качестве такого параметра взять плотность (воздуха, жидкости) ρ: чем плотнее среда, тем большее влияние она оказывает на движение тела. Исходя из сказанного, мы ищем силу сопротивления в виде $F_r = Cv^pS^q\rho^r/2$ (множитель $1/2$ можно включить в C, но мы его выделяем по историческим причинам). Сила имеет размерность произведения массы на ускорение, т. е. $[\mathrm{F}] = [\mathrm{LT^{-2}M}]$. Условие совпадения размерностей обеих частей равенства имеет вид:

$$\left[\mathrm{LT^{-2}M}\right] = \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]^p \left[\mathrm{L^2}\right]^q \left[\mathrm{L^{-3}M}\right]^r = \left[\mathrm{L}^{p+2q-3r}\mathrm{T}^{-\mathrm{p}}\mathrm{M}^r\right],$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - 3r,\\ -2 &= -p,\\ 1 &= r. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что ее решениями являются числа $p = 2,\ q = 1,\ r = 1$, откуда следует искомая формула:

$$F_r = C\,S\,\frac{\rho\,v^2}{2}. \tag{1.1}$$

Но почему мы выбрали плотность воздуха в качестве параметра, отвечающего за сопротивление среды? Почему бы в качестве такового не взять величину вязкости воздуха η, имеющую размерность $[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}]$? Позже мы еще познакомимся поближе с вязкостью, а пока достаточно интуитивного представления, что при той же плотности среда может быть более или менее вязкой (кисель и компот). Тогда искомая сила может быть представлена в виде $F = Cv^pS^q\eta^s$. Напишем аналогичное условие равенства размерностей:

$$\left[\mathrm{LT^{-2}M}\right] = \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]^p \left[\mathrm{L^2}\right]^q \left[\mathrm{L^{-1}T^{-1}M}\right]^s = \left[\mathrm{L}^{p+2q-s}\mathrm{T}^{-p-s}\mathrm{M}^s\right],$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - s, \\ -2 &= -p - s, \\ 1 &= s. \end{aligned}$$

Ее решением являются числа $p = 1,\ q = 1/2,\ s = 1$, т. е. искомая формула имеет вид:

$$F_r = C\,\eta\sqrt{S}\,v. \tag{1.2}$$

Формулы (1.1) и (1.2) совершенно различны: в одной из них сила зависит от скорости квадратично, в другой — линейно. Так какая же из них верна? Данный пример обнажил первый подводный камень: мы должны решить, какой из двух возможных процессов (лобовое сопротивление или вязкость среды) доминирует в конкретной рассматриваемой задаче.

Попробуем перехитрить уравнения, включив в анализ размерности и плотность среды, и ее вязкость: $F_r = (C/2)\,v^p S^q \rho^r \eta^s$. Соотношения размерностей принимают форму:

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{LT^{-2}M}\right] &= \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]^p \left[\mathrm{L^2}\right]^q \left[\mathrm{L^{-3}M}\right]^r \left[\mathrm{L^{-1}T^{-1}M}\right]^s = \\ &= \left[\mathrm{L}^{p+2q-3r-s}\mathrm{T}^{-p-s}\mathrm{M}^{r+s}\right], \end{aligned}$$

откуда получаем уравнения:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - 3r - s, \\ -2 &= -p - s, \\ 1 &= r + s. \end{aligned}$$

Сразу замечаем, что нас ожидает второй подводный камень: у нас всего три уравнения для определения четырех параметров. Стало быть, какой-то из них останется неизвестным. Попробуем разобраться, что бы это значило? Два последних уравнения позволяют выразить параметры p и r через s:

$$r = 1 - s, \quad p = 2 - s. \tag{1.3}$$

Подставляя их в первое уравнение, получаем

$$1 = -1 + s + 2q,$$

откуда находим

$$q = 1 - \frac{s}{2}. \tag{1.4}$$

Отсюда получаем силу сопротивления в виде:

$$F_r = \frac{C}{2} v^{2-s} S^{1-s/2} \rho^{1-s} \eta^s = C\,\frac{\rho S v^2}{2}\,\left(\frac{\sqrt{S} v \rho}{\eta}\right)^{-s}. \tag{1.5}$$

Произвольная степень комбинации в скобках указывает на то, что эта комбинация безразмерна. Раз так, она может быть включена в безразмерную величину

C, которая в этом случае оказывается не постоянной величиной, а *неизвестной функцией безразмерного параметра*:

$$F_r = C(\mathbf{Re})\, S\, \frac{\rho v^2}{2},$$
$$\mathbf{Re} = \frac{\sqrt{S} v \rho}{\eta}. \qquad (1.6)$$

Этот безразмерный параметр (число Рейнольдса $\mathbf{Re}$) играет важную роль в определении характера силы сопротивления. Функция $C(\mathbf{Re})$ называется коэффициентом сопротивления. Детали мы обсудим позднее, но, забегая вперед, сразу скажем: при малых скоростях воспроизводится выражение (1.2), а при больших — формула (1.1). Данный пример демонстрирует, как обращаться с безразмерными комбинациями, если таковые возникают при анализе размерности.

В заключение приведем **экзотический пример** — использование так называемой векторной размерности. Решим задачу о дальности l_0 полета тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью v_0. На полет тела оказывает влияние притяжение Земли, т. е. в ответ, помимо начально скорости, должно войти ускорение свободного падения g. Проведем сначала обычный анализ размерностей: ищем искомую дальность полета в виде $l_0 = Cv^p g^s$, откуда получаем уравнения

$$[\mathrm{L}] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right]^p \left[\mathrm{LT}^{-2}\right]^q = \left[\mathrm{L}^{p+q}\mathrm{T}^{-p-2q}\right].$$

Вытекающая отсюда система уравнений

$$1 = p + q,$$
$$0 = -p - 2q$$

имеет очевидное решение $p = 2, q = -1$, т. е. дальность полета дается формулой

$$l_0 = C\frac{v_0^2}{g}. \qquad (1.7)$$

Зависимость от угла вылета тела мы потеряли, так как она вошла в безразмерную константу C. Но в данной задаче можно принять во внимание, что мы вправе использовать разные единицы для дальности полета тела и высоты его подъема. Например, рисуя параболу, соответствующую полету снаряда, мы используем разные масштабы по осям x и y, чтобы график поместился на странице, так как обычно дальность полета снаряда намного превосходит высоту его подъема. В соответствии со сказанным, при анализе размерностей мы используем «горизонтальные» $L_\rightarrow$ и «вертикальные» $L_\uparrow$ единицы длины. Это значит, что размерности вертикальной и горизонтальной составляющих начальной скорости различны, и мы должны искать выражение для дальности полета в виде $l_0 = Cv_{0\uparrow}^{p_1} v_{0\rightarrow}^{p_2} g^q$. Дальность полета выражается в «горизонтальных» метрах, а ускорение свободного падения — в «вертикальных» метрах на секунду в квадрате, так что уравнения размерности имеют вид:

$$[\mathrm{L}_\rightarrow] = \left[\mathrm{L}_\uparrow \mathrm{T}^{-1}\right]^{p_1} \left[\mathrm{L}_\rightarrow \mathrm{T}^{-1}\right]^{p_2} \left[\mathrm{L}_\uparrow \mathrm{T}^{-2}\right]^q = \left[\mathrm{L}_\uparrow^{p_1+q} \mathrm{L}_\rightarrow^{p_2} \mathrm{T}^{-p_1-p_2-2q}\right].$$

Отсюда следует система уравнений:

$$1 = p_2,$$
$$0 = p_1 + q,$$
$$0 = -p_1 - p_2 - 2q.$$

Оглавление