Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки

11 класс

Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки

11 класс

Пособие
для учащихся
учреждений общего среднего
образования

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721
С60

Рецензент: заведующий кафедрой информационных технологий ГУО «Минский городской институт развития образования» кандидат педагогических наук *Т.О. Пучковская*

Солтан, Г. Н.

С60 Геометрия для самоподготовки : 11-й класс : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан. – Минск : Вышэйшая школа, 2016. – 191 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2701-8.

Книга написана в соответствии с программой по математике для учреждений общего среднего образования. В ней изложен курс геометрии 11 класса в виде теоретических и практических материалов для самоподготовки, включены тесты для систематизации знаний и закрепления практических умений и навыков за 10–11 классы.

Для учащихся учреждений общего среднего образования, гимназий, абитуриентов. Пособие будет полезным для самостоятельной работы учащихся, а также при подготовке к экзаменам по математике.

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-06-2701-8

Предисловие

Пособие написано в соответствии с программой по математике для учреждений общего среднего образования. В нем изложено содержание курса геометрии 11 класса и материалы для повторения курса геометрии 10–11 классов. Отличительной особенностью пособия является его компактность, наличие теоретических и практических материалов для самоподготовки, примеров решений разнообразных задач. Оно построено следующим образом. Определения понятий, теоремы и следствия из них выделены специальными шрифтами. Доказательства теорем краткие, но в то же время с достаточным аргументированием, ссылками на ранее изложенный теоретический материал. После объяснительного текста предложены контрольные вопросы, которые предназначены для проверки усвоения теории и ее повторения. Во всех темах содержатся упражнения как для закрепления теоретических знаний и формирования практических умений и навыков, так и развития математических способностей, которые расположены по нарастающей степени сложности. Учитывая это, в пособии значительное внимание уделено вопросу решения задач разными способами. Ко всем разделам курса предлагаются тесты, самостоятельное выполнение которых позволит систематизировать знания по темам и целенаправленно подготовиться к конкурсным испытаниям. Также имеется «Приложение», в котором приведены таблицы приближенных значений синусов, косинусов (0°–90°) и тангенсов (0°–89°) углов. К упражнениям даются указания и ответы.

Желаем успехов!

Авторы

I. МНОГОГРАННИКИ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Понятие многогранника

Понятие многогранника использовалось в предыдущих классах, рассмотрим более подробно их виды и свойства.

Фигура называется *ограниченной*, если для каждых двух ее точек расстояние между ними не превосходит длины некоторого отрезка. *Точка* называется *граничной* точкой для пространственной фигуры, если на любом сколь угодно малом расстоянии от нее существуют точки, принадлежащие и не принадлежащие ей, а множество всех граничных точек называется ее *границей*. *Точка* называется *внутренней* точкой пространственной фигуры, если на любом сколь угодно малом расстоянии от нее существуют только ее точки. *Область* – фигура в пространстве, состоящая из множества только ее внутренних точек, каждые две из которых принадлежат ломаной, содержащейся в этой фигуре. Область вместе с ее границей называется *замкнутой областью*. *Геометрическим телом* (кратко – телом) называется конечная замкнутая область, а его *поверхностью* – граница тела.

Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости.

Призмы, пирамиды – примеры многогранников. Многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника, называются его *гранями*, стороны этих многоугольников – *ребрами*, а их вершины – *вершинами* многогранника. Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. *Многогранник* называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей каждую его грань (рис. 1, *а*), *невыпуклым*, если он имеет хотя бы одну грань, по одну сторону от плоскости которой он не лежит (рис. 1, *б*).

а *б*

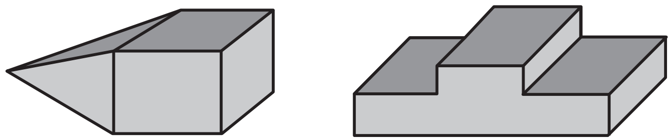

Рис. 1

Грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками, углы этих многоугольников с указанными вершинами называются *плоскими углами многогранника* при этих вершинах. *Грани* выпуклого многогранника, имеющие общее ребро, называются *соседними* (или смежными). *Двугранный угол многогранника* – это двугранный угол между полуплоскостями, содержащими две его соседние грани. В школьном курсе геометрии изучаются преимущественно выпуклые многогранники, поэтому слово «выпуклый» часто не используется, если иное не предусмотрено.

Отрезок, соединяющий две вершины выпуклого многогранника, не принадлежащие одной грани, является его *диагональю*. Сумма площадей всех граней многогранника называется *площадью его поверхности*. Поверхность многогранника можно разрезать по нескольким ребрам и разместить все его грани в одной плоскости так, что получится некоторый многоугольник. Этот многоугольник называется *разверткой поверхности многогранника*. На рис. 2, *б*, *в* показаны развертки поверхности многогранника, изображенного на рис. 2, *а*. На практике для получения модели многогранника, например при изготовлении ее из картона, сначала надо изготовить развертку его поверхности.

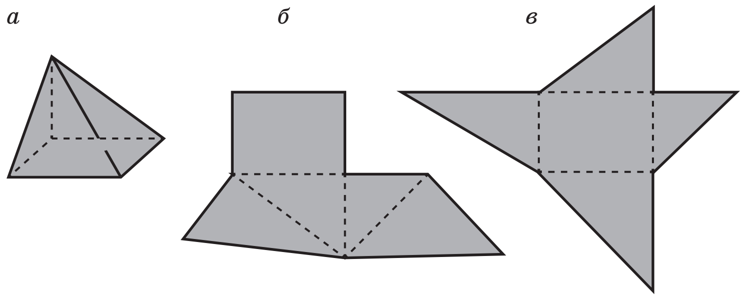

Рис. 2

З а д а ч а. Существует ли многогранник, имеющий только 7 ребер?

Р е ш е н и е. Допустим, что такой многогранник существует. Если все его m граней – треугольники, то ребер в нем $\frac{3m}{2}$. По условию $\frac{3m}{2} = 7$, откуда $m = \frac{14}{3}$, чего быть не может, так как m – натуральное число, не меньшее 4. Если хотя бы одна грань многогранника является n-угольником, где $n \geq 4$, то он имеет не менее 8 ребер. Следовательно, многогранника, имеющего только 7 ребер, не существует.

О т в е т: не существует.

1. Объясните, что называется многогранником. Приведите примеры многогранников.
2. Какой многогранник называется выпуклым, а какой – невыпуклым?

Упражнения

1. Какое наименьшее число: а) граней; б) ребер; в) вершин может иметь многогранник?

2. Изобразите многогранник: а) все грани которого – треугольники, но не тетраэдр; б) все грани которого – квадраты, но не куб.

3. Существует ли пятигранник, каждая грань которого – треугольник?

4. Постройте многогранник, отличный от пирамиды, имеющий столько же вершин, сколько и граней.
5. Нарисуйте развертку поверхности: а) правильного тетраэдра, ребро которого равно 2 см; б) прямоугольного параллелепипеда с измерениями 1, 2, 3 см.
6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 дм. В точке O – центре грани CC_1D_1D – находится паук. Найдите длину кратчайшего пути паука по поверхности куба до вершины A.
7. В прямоугольном параллелепипеде площадь основания-квадрата равна 144 см^2, а его высота – 14 см. Найдите длину диагонали параллелепипеда.
8. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 и 17 см, а его диагонали образуют с плоскостью основания углы 45° и 30°. Найдите высоту параллелепипеда.
9. Докажите, что: а) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен полусумме квадратов трех диагоналей граней, выходящих из одной вершины; б) диагональ прямоугольного параллелепипеда равна сумме ортогональных проекций трех его ребер, выходящих из одной вершины, на диагональ параллелепипеда; в) сумма квадратов площадей боковых граней прямого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей его диагональных сечений; г) сумма квадратов длин диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его ребер.
10. Докажите, что сумма двугранных углов при всех боковых ребрах параллелепипеда равна 360°.
11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 дм. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середина ребра AD и центры граней AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D.
12. Диагональ бруса, форма которого – прямоугольный параллелепипед, равна d, а сумма трех его измерений – k. Найдите площадь поверхности бруса.

2. Призма. Площадь поверхности призмы

Пусть даны две параллельные плоскости α и β. Построим в плоскости α n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$ и его параллельную проекцию на плоскость β – многоугольник $B_1B_2B_3...B_n$. Тогда многоугольники $A_1A_2A_3...A_n$, $B_1B_2B_3...B_n$ равны и равны отрезки: $A_1B_1 = A_2B_2 = ... = A_nB_n$. Если соединить отрезками каждую точку многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ с ее параллельной проекцией на плоскость β, то получится многогранник (рис. 3). Этот многогранник называется *n-угольной призмой*.

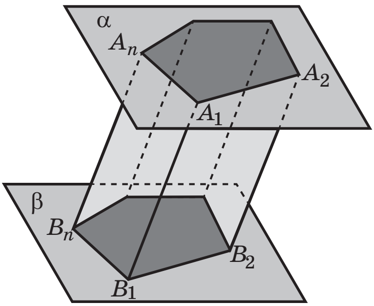

Рис. 3

Многогранник, две грани которого – равные *n*-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные *n* граней – параллелограммы, причем в каждом из них две стороны являются соответственными сторонами этих *n*-угольников, называется *n*-угольной призмой.

Два равных n-угольника, расположенных в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы, параллелограммы – *боковыми гранями* призмы, а ребра призмы, лежащие в ее боковых гранях, – *боковыми ребрами* призмы. Из определения понятия призмы следует, что все ее боковые ребра равны, а каждые два боковых ребра параллельны. Фигура, образованная боковыми гранями призмы, называется ее *боковой поверхностью*. Сечение призмы плоскостью, проходящей через ее диагональ и боковое ребро, называется *диагональным сечением* призмы.

Понятие n-угольной призмы может быть непосредственно связано с видом движения фигур в пространстве – параллельным переносом, т.е. таким движением, при котором все точки фигуры перемещаются на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Например, нижнее основание призмы (см. рис. 3) может быть получено параллельным переносом верхнего основания на отрезок A_1B_1 в направлении, заданном лучом A_1B_1.

Напомним, что если основанием призмы является параллелограмм, то она называется параллелепипедом. В параллелепипеде все грани – параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих ребер, называются противолежащими (или противоположными). В параллелепипеде противолежащие грани равны и параллельны (обоснуйте это самостоятельно).

Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого основания призмы, называется ее *высотой*. Высотой призмы называют также длину этого перпендикуляра, равную расстоянию между ее основаниями. Например, на рис. 4 A_1H – высота наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

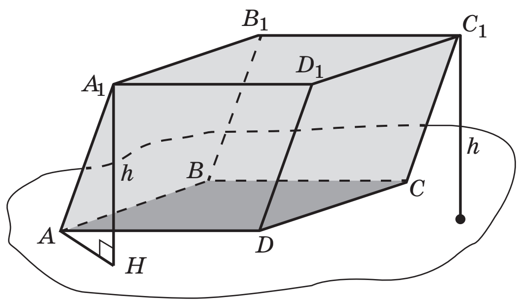

Рис. 4

Если боковые ребра призмы перпендикулярны ее основаниям, то призма называется *прямой*, а если не перпендикулярны – *наклонной*. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру. В прямой призме каждая боковая грань и каждое диагональное сечение являются прямоугольниками.

Призма называется правильной, если она прямая и ее основания – правильные *n*-угольники. В правильной призме все боковые грани – равные прямоугольники.

Площадью поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а *площадью боковой поверхности призмы* – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь S поверхности призмы выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой $S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$.

Теорема. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на длину бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих прямоугольников, т.е. равна сумме произведений длин сторон основания призмы на длину ее бокового ребра. Отсюда получаем формулу $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$, где $P_{\text{осн}}$ – периметр основания призмы, h – длина бокового ребра призмы.

Теорема. **Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра сечения призмы плоскостью, пересекающей каждое боковое ребро и перпендикулярной ему, и длины бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани наклонной призмы – параллелограммы, а все боковые ребра равны. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих параллелограммов. Указанное сечение призмы (кратко его называют *перпендикулярным* или *ортогональным сечением*) – многоугольник, каждая сторона которого перпендикулярна боковому ребру призмы и является высотой соответствующего параллелограмма, например в наклонном параллелепипеде (рис. 5). Отсюда получаем формулу: $S_{\text{бок}} = P_{\text{перп.сеч}} \cdot b$, где $P_{\text{перп.сеч}}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, b – длина ее бокового ребра.

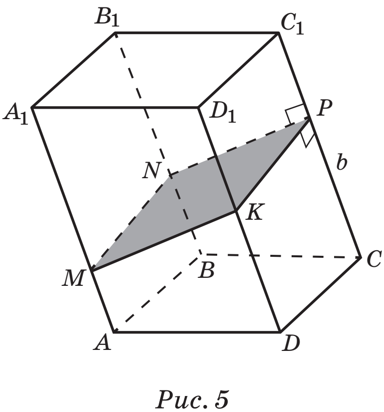

Рис. 5

Если ортогональное сечение наклонной призмы не существует, то в этом случае площадь ее боковой поверхности равна: $S_{\text{бок}} = P_{\text{перп.мн}} \cdot b$, где $P_{\text{перп.мн}}$ – периметр многоугольника, плоскость которого перпендикулярна каждой из прямых, содержащих боковые ребра призмы, а его вершинами являются точки пересечения этих прямых с указанной плоскостью.

З а д а ч а 1. В наклонной треугольной призме одно боковое ребро равно $\sqrt{2}$ дм и удалено от двух других ее боковых ребер на расстояние, равное 1 дм, а двугранный угол при этом ребре равен 150°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Р е ш е н и е. Пусть дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Построим ее ортогональное сечение – ΔMNK (рис. 6), в котором $MN = MK = 1$ дм, $\angle NMK = 150°$. Тогда площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}} = (NK + KM + MN) \times AA_1$. По теореме косинусов $NK^2 = 2 + \sqrt{3}$. Тогда $S_{\text{бок}} = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2\right) \times$

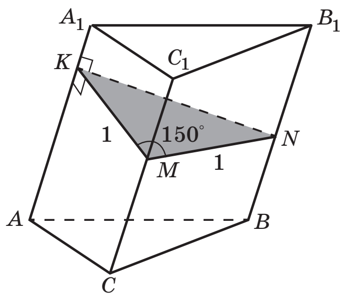

Рис. 6

$\times\sqrt{2} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} + 2\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$ (дм²).

О т в е т: $(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$ дм².

З а д а ч а 2. Найти высоту наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором основание – прямоугольник $ABCD$, $BB_1 = c$, угол между основанием и гранью AA_1B_1B равен α, а угол между этим основанием и гранью BB_1C_1C – β, α и β острые углы.

Р е ш е н и е. К сторонам BA и BC построим перпендикуляры B_1M, MF и B_1N, NE соответственно (рис. 7). Обозначим точку O пересечения прямых MF и NE. Тогда отрезок B_1O – высота параллелепипеда, так как $AB \perp (B_1MO)$, значит $AB \perp B_1O$, и так как $BC \perp (B_1NO)$, значит $BC \perp B_1O$, следова-

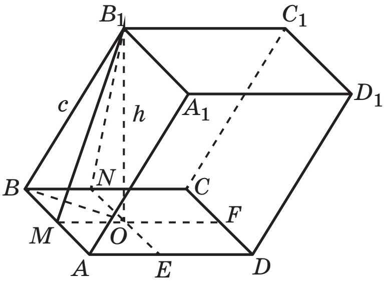

Рис. 7

тельно, $B_1O \perp (ABC)$. Причем $\angle B_1MF = \alpha$, $\angle B_1NE = \beta$. Пусть $B_1O = h$, тогда в прямоугольном ΔBOB_1 имеем: $h^2 = c^2 - BO^2$. Поскольку четырехугольник $MONB$ – прямоугольник, то $BO^2 = OM^2 + MB^2 = h^2\text{ctg}^2\alpha + h^2\text{ctg}^2\beta$. Следовательно, $h^2 = c^2 - (h^2\text{ctg}^2\alpha + h^2\text{ctg}^2\beta)$, $h^2(1 + \text{ctg}^2\alpha + \text{ctg}^2\beta) = c^2$,

$$h = \frac{c}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta}}.$$

Ответ: $\dfrac{c}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta}}$.

Задача 3. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный ΔABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом 60°, а ортогональной проекцией вершины B_1 является точка пересечения медиан ΔABC. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть O – точка пересечения медиан ΔABC, тогда B_1O – высота призмы (рис. 8). Так как ΔABC – равнобедренный, то точка O принадлежит его биссектрисе BH. Следовательно, она равноудалена от сторон AB и BC, т.е. $OK = OL$, а это проекции наклонных B_1K и B_1L, значит $B_1K = B_1L$. Поэтому площади граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны. Так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BH и BB_1, то $AC \perp (BB_1O)$. Следовательно, $AC \perp BB_1$ и $AC \perp AA_1$, значит грань AA_1C_1C – прямоугольник. Получили, что $S_{\text{бок}} = 2AB \cdot B_1K + AC \cdot AA_1$. Найдем искомую величину.

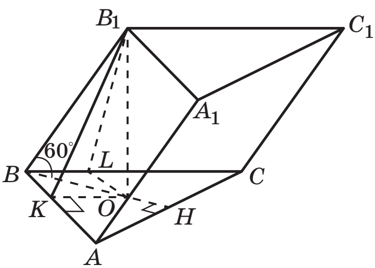

Рис. 8

1. В ΔABC высота $BH = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$, $BO = \frac{2}{3} \cdot BH = 8$.

2. В прямоугольном ΔBB_1O катет $B_1O = BO \cdot \operatorname{tg} 60° = 8\sqrt{3}$, гипотенуза $BB_1 = \frac{8}{\cos 60°} = 16$. Боковые ребра призмы равны, поэтому $AA_1 = BB_1 = 16$.

3. В ΔABH $\sin \angle B = 0{,}8$, а в ΔBKO $KO = BO \cdot \sin \angle B = 6{,}4$.

4. В прямоугольном ΔKB_1O гипотенуза $B_1K = 1{,}6\sqrt{91}$.

5. $S_{бок} = 2 \cdot 20 \cdot 1{,}6\sqrt{91} + 32 \cdot 16 = (64\sqrt{91} + 512)$.

Ответ: $(64\sqrt{91} + 512)$.

Задача 4. Через диагональ одного основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая другое основание. Высота призмы равна 2 дм, а длина диагонали основания – 6 дм. Какую наибольшую и наименьшую площадь может иметь сечение призмы этой плоскостью?

Решение. Пусть в данной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC = 6$ дм, $AA_1 = 2$ дм. Указанное сечение может быть: 1) диагональным сечением AA_1C_1C; 2) равнобедренным ΔAD_1C или ΔAB_1C; 3) равнобедренной трапецией $AMNC$, в которой $MN \parallel AC$ (рис. 9, *а*). Найдем площадь трапеции.

Проведем высоты MK и NF трапеции $AMNC$ и перпендикуляры MM_1 и NN_1 к сторонам основания AB и BC соответственно (рис. 9, *б*). Тогда треугольники MM_1K и NN_1F – пря-

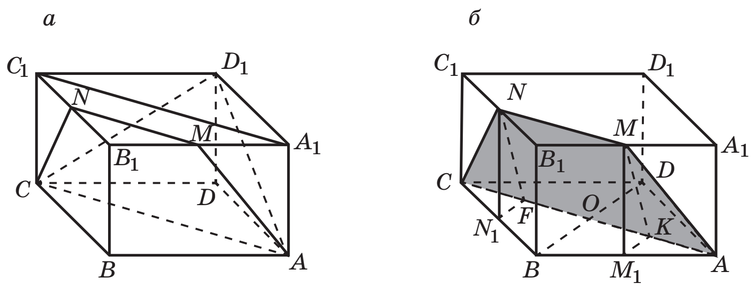

Рис. 9

моугольные. Обозначим $MN = FK = 2x$, тогда $N_1F = FC = 3 - x$ (так как ΔN_1FC прямоугольный и $\angle N_1CF = 45°$). В ΔNN_1F гипотенуза $NF = \sqrt{4+(3-x)^2}$.

$$S_{AMNC} = \frac{6+2x}{2}\sqrt{4+(3-x)^2} = \sqrt{(3+x)^2\left(4+(3-x)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{4(3+x)^2 + \left(9-x^2\right)^2}.$$

Площадь сечения $AMNC$ будет наименьшей или наибольшей, когда наименьшее или наибольшее значение принимает функция $f(x) = 4(3 + x)^2 + (9 - x^2)^2$. Исследуем ее на промежутке [0; 3] – множестве допустимых значений x по условию задачи: $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 117$, производная этой функции $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24$. Найдем критические точки: $4x^3 - 28x + 24 = 0$, $x^3 - 7x + 6 = 0$, $(x^3 - x) - (6x - 6) = 0$, $x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0$, $(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$, $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Промежутку [0; 3] принадлежат две критические точки. Наибольшее (или наименьшее) значение функция $f(x)$ принимает в критических точках или на концах промежутка. Сравним $f(0) = 117$, $f(1) = 128$, $f(2) = 125$, $f(3) = 144$. Наибольшее значение функция $f(x)$ принимает при $x = 3$, а наименьшее при $x = 0$. Следовательно, наибольшую площадь, равную 12 дм^2, имеет диагональное сечение, а наименьшую, равную $3\sqrt{13}$ дм^2, – равнобедренный ΔAD_1C или ΔAB_1C.

Ответ: 12 дм^2, $3\sqrt{13}$ дм^2.

1. Что называется призмой?
2. Какая призма называется: а) прямой; б) наклонной; в) правильной?
3. Что называется поверхностью многогранника?
4. Что называется площадью поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы?
5. Сформулируйте и докажите теорему о площади боковой поверхности: а) прямой призмы; б) наклонной призмы.

Упражнения

13. Докажите, что если прямая параллельна одному из оснований призмы, то она параллельна и другому ее основанию.

14. Докажите, что если плоскости диагональных сечений прямого параллелепипеда перпендикулярны, то его основанием является ромб.

15. Сколько можно построить диагональных сечений шестиугольной призмы?

16. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а меньшая из диагоналей призмы – b.

17. Найдите двугранные углы при боковых ребрах прямой призмы, основанием которой является равнобедренная трапеция со сторонами 20, $6\sqrt{2}$, 8, $6\sqrt{2}$ см.

18. Найдите площадь поверхности прямой треугольной призмы, стороны основания которой – 5, 5 и 8 дм, а ее высота равна меньшей высоте основания.

19. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны a, b, c, а боковое ребро – n. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

20. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если площадь ее поверхности равна 40 дм^2, а площадь боковой поверхности на 8 дм^2 меньше.

21. В каком отношении делится площадь поверхности параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы трех его ребер, имеющих общую вершину?

22. Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда, если диагонали трех его граней, исходящие из одной вершины, равны a, b, c.

23. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ей бокового ребра, наклонена к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если сторона ее основания равна a.

Содержание

Учебное издание

Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ
11 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования

Редактор *Т.В. Кульнис*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *О. А. Самсоновой*

Подписано в печать 25.03.2016. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «SchoolBookNewC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 8,59.
Тираж 1000 экз. Заказ 876.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.