Э.И. ЗВЕРОВИЧ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Часть 4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Часть 5

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 4
Функциональные последовательности и ряды.
Интегралы, зависящие от параметра

Часть 5
Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям

Минск

Вышэйшая школа

2008

Излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов на втором курсе. В третьем семестре изучают элементы теории функциональных последовательностей и функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов и интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов. Содержание четвертого семестра составляет теория кратных интегралов и интегралов по многообразиям.

Для студентов математических специальностей высших учебных заведений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В четвертой части учебного пособия приводится теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в третьем семестре. Его содержание составляют предусмотренные учебными программами факты из теории функциональных последовательностей, функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов Фурье, интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов. Из особенностей изложения следует отметить, что в теории рядов Фурье используется понятие ростка.

В пятой части приводится теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в четвертом семестре. Его содержание составляют кратные интегралы Римана, криволинейные и поверхностные интегралы. Кроме того, дается исчисление внешних дифференциальных форм, интегралы по многообразиям и общая теорема Стокса.

Изложение теории кратных интегралов — не концентрическое, т.е. сразу вводятся n-кратные интегралы (а случаи $n = 2\,,\ 3\,,\ \ldots$ рассматриваются как примеры). Сначала изучаются интегралы по брусам, поскольку теория таких интегралов мало отличается от теории одномерного интеграла Римана. Затем рассматриваются интегралы по произвольным ограниченным множествам, измеримым по Жордану. Даются теоремы существования таких интегралов, включая критерий Лебега, и все основные свойства.

Теорема Фубини изложена в степени общности, достаточной для всех приложений, важнейшие из которых приведены. Доказана теорема существования разложения единицы (известного также под названием «разбиение единицы»), которое в дальнейшем неоднократно используется. Приведена с полным доказательством теорема о замене переменных в кратных интегралах. Формулы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского даны на современном уровне строгости, без существенного увеличения объема текста и с минимальными ограничениями. Завершается том изложением исчисления внешних дифференциальных форм, элементов анализа на многообразиях, вложенных в $\mathbb{R}^n$, и общей теоремы Стокса на таких многообразиях.

Из огромного количества имеющейся учебной литературы по математическому анализу в списке литературы представлены учебники и учебные пособия [2–7], [9–12], а также задачники [1], [8]. Учебники и пособия подобраны по принципу близости по содержанию и методике изложения к предлагаемому мною учебному пособию. К тому же по крайней мере большинство книг [1–12] доступны студентам университетов Республики Беларусь.

Нумерация глав продолжает нумерацию глав предыдущих книг этого учебного пособия. Каждая глава заканчивается подборкой задач по соответствующим темам. Эти подборки задач составила доцент О.Б. Долгополова.

Выражаю благодарность профессору В.Г. Кротову, доцентам А.С. Ляликову и Е.К. Щетникович за квалифицированную помощь при подготовке рукописи в издательской системе LaTeX 2_ε, доценту Т.Н. Жоровиной за тщательное вычитывание рукописи, а также рецензентам: ректору Гродненского государственного университета, профессору Е.А. Ровбе и профессору того же университета Ю.М. Вувуникяну, профессору Гомельского государственного университета А.П. Старовойтову.

Э.И. Зверович

Часть 4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

17.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИХ ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

В этой главе будут изучаться последовательности и ряды, все члены которых — числовые функции одного переменного (вещественного или комплексного). Условимся через z (возможно, с индексами) обозначать переменные, которые считаются, вообще говоря, комплексными. Через x (возможно, с индексами) будем обозначать вещественные переменные.

Определение 17.1. *Функциональной последовательностью называется последовательность, все члены которой — функции. Функциональным рядом называется ряд, все члены которого — функции.*

Понятия и обозначения, связанные с функциональными последовательностями и рядами, по форме не отличаются от соответствующих понятий и обозначений, связанных с числовыми последовательностями и рядами, поэтому на них не останавливаемся. Различия начинаются тогда, когда речь заходит о сходимости. Это связано прежде всего с тем, что одна и та же последовательность (или ряд) может сходиться при одних значениях аргумента и расходиться — при других.

Определение 17.2. *Говорят, что функциональная последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно на множестве $E \subset \mathbb{C}$ к функции $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, если все функции f_n определены на множестве E и $\forall z \in E$ числовая последовательность $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(z)$.*

Записывается этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{или} \quad f_n(z) \to f(z) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,\ z \in E\,.$$

Определение 17.3. *Говорят, что функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится поточечно на множестве* $E \subset \mathbb{C}$ *к сумме* $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, *если последовательность его частичных сумм сходится поточечно к функции* f *на множестве* E.

Записывается этот факт так:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{при} \quad z \in E\,.$$

Напомним, что сходимость последовательностей и сходимость рядов — понятия равносильные в том смысле, что одно из них сводится к другому. Именно сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n$ определяется как сходимость последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм $s_n := f_1 + \ldots + f_n$. Обратно, сходимость последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ можно определить как сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, где

$$f_1 = s_1\,,\ f_2 = s_2 - s_1\,,\ \ldots\,,\ f_n = s_n - s_{n-1}\,, \ldots\,.$$

Учитывая это замечание, мы в дальнейшем (в зависимости от удобства формулировок) некоторые вопросы будем излагать только для функциональных последовательностей, другие — только для функциональных рядов, а часть вопросов — и для последовательностей, и для рядов.

Для изучения функциональных последовательностей и рядов целесообразно ввести понятие области сходимости.

Определение 17.4. *Областью сходимости функциональной последовательности* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *или функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *называется множество всех значений аргумента* $z \in \mathbb{C}$, *для которых сходится числовая последовательность* $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ *или соответственно числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Рассмотрим простые примеры на нахождение областей сходимости.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\forall x \in \mathbb{R} \,:\; 0 \leqslant \frac{1}{x^2+n} \leqslant \frac{1}{n}\,,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому областью сходимости данной последовательности является множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Пример 2. Пусть $f_n(z) = nz$, где $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Так как $f_n(0) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. При $z \neq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = z \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Таким образом, область сходимости данной последовательности состоит из одной точки $z = 0$.

Пример 3. Пусть $f_n(x) = \dfrac{n!}{x^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^2+n} = +\infty\,,$$

то областью сходимости данной последовательности является пустое множество $\varnothing$.

Основные проблемы теории функциональных последовательностей и рядов можно сформулировать следующим образом. Пусть все члены функциональной последовательности или ряда обладают некоторым свойством (например, непрерывны, интегрируемы, дифференцируемы и т.п.). Обладает ли предельная функция или сумма ряда соответствующим свойством? Если да, то каковы соотношения между f_n' и f', между интегралами от f_n и f, и т.п.?

Пусть, например, $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$, где все функции f_n непрерывны в точке x. Непрерывность функции f_n в точке x означает, что $\lim\limits_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$. Задаваясь вопросом о непрерывности предельной функции f в точке x, мы должны проверить равенство $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$. Выражая теперь f через f_n и используя непрерывность функции f_n в точке x, получим

$$\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right).$$

Таким образом, *вопрос о непрерывности предельной функции*

f в точке x сводится к вопросу о том, справедливо ли равенство

$$\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right) , \tag{17.1}$$

т.е. важен ли порядок, в котором осуществляются предельные переходы?

Мы покажем сейчас на примерах, что, вообще говоря, равенства типа (17.1) неверны. Первый, самый простой пример связан с рассмотрением «двойной последовательности».

Пример 1. Положим $s_{mn} := \dfrac{m}{m+n}$, где m, $n \in \mathbb{N}$. При каждом фиксированном n имеем

$$\lim_{m\to\infty} s_{mn} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+n} = 1\,,$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s_{mn}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,.$$

Если же фиксировать m, то получим

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{m+n} = 0\,,$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s_{mn}\right) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0\,.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{mn} \neq \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{mn}\,.$$

Пример 2. Все функции $f_n(x) := \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на $\mathbb{R}$ и образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1$ при $x \neq 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится. Его сумма

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0\,, \\ 1 & \text{при } \ x \neq 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$. Таким образом, сходящийся ряд, все члены которого — непрерывные функции, может иметь разрывную сумму.

Пример 3. Рассмотрим семейство функций $\left\{f_{mn} \;\middle|\; m\,,\, n \in \mathbb{N}\right\}$, где

$$f_{mn}(x) = |\cos(n!\pi x)|^m\,.$$

Все эти функции, очевидно, непрерывны на $\mathbb{R}$. Однако предел

$$f_n(x) := \lim_{m\to\infty} f_{mn}(x) = \\ = \lim_{m\to\infty} |\cos(n!\pi x)|^m = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = \dfrac{k}{n!}\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \neq \dfrac{k}{n!} \end{cases} \tag{17.2}$$

есть функция, разрывная во всех точках множества $\left\{ \dfrac{k}{n!} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Таким образом, опять предел последовательности непрерывных функций оказывается разрывной функцией.

Рассмотрим теперь последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где f_n — сужение функции (17.2) на отрезок $[0\,,\,1]$. Все функции этой последовательности интегрируемы в силу критерия Лебега[1]. Действительно, каждая из этих функций ограничена и имеет конечное множество точек разрыва. Переходя к пределу по n, получим знакомую нам функцию Дирихле

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

которая всюду разрывна и, значит, не интегрируема по Риману.

Пример 4. Пусть $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. В силу очевидного неравенства $0 \leqslant \dfrac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$. Все функции f_n и функция f, очевидно, дифференцируемы, причем $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, $f'(x) \equiv 0$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x)$, так как уже при $x = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \neq 0$.

Пример 5. Пусть $f_n(x) = n^2 x\,(1 - x^2)^n$, $x \in [0\,,\,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Так как $f_n(0) = f_n(1) = 0$, то и $f(0) = f(1) = 0$. Далее, при $x \in (0\,,\,1)$ имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} \left(n^2(1 - x^2)^n \right) = 0\,.$$

[1] Напоминаю критерий Лебега: *интегрируемость по Риману функции равносильна тому, что она ограничена, а множество всех ее точек разрыва имеет меру нуль.*

Часть 5

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ИНТЕГРЛЫ
ПО МНОГООБРАЗИЯМ

20. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА

20.1. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой главе излагается теория кратных интегралов Римана по ограниченным множествам, измеримым по Жордану.

Задача об объеме цилиндрического тела. Вспомним геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции f: интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади $\mu_2(T)$ криволинейной трапеции T (рис. 6):

$$\mu_2(T) = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

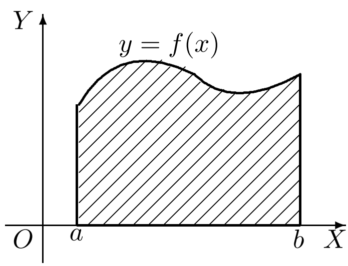

Рис. 6. Криволинейная трапеция

Трехмерными аналогами криволинейных трапеций естественно считать так называемые *цилиндрические тела* $T \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 7). Для задания такого тела берем неотрицательную функцию от двух переменных

$$z = f(x\,,\,y) \geqslant 0\,,\ (x\,,\,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

и по определению полагаем:

$$T := \big\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x\,,\,y) \in D\,;\ 0 \leqslant z \leqslant f(x\,,\,y)\big\}\,. \quad (20.1)$$

Требуется определить и вычислить объем $\mu_3(T)$ цилиндрического тела (20.1). Напомним, что *определить* означает дать определение, т.е. ответить на вопрос: что такое объем? *Вычислить* означает указать условия и процедуру, позволяющие приписать искомому объему числовое значение. При этом естественно руководствоваться следующими свойствами объема μ_3, предполагая, что он существует:

1°. $\mu_3(A) \geqslant 0$ (неотрицательность);

2°. $A \subset B \implies \mu_3(A) \leqslant \mu_3(B)$ (монотонность);

3°. $\mu_3(A \cup B) = \mu_3(A) + \mu_3(B) - \mu_3(A \cap B)$ (аддитивность);

4°. *объем прямого цилиндра с квадрируемым основанием равен произведению площади основания на высоту.*

Для решения этой задачи предположим, что множество D из определения (20.1) квадрируемо, и представим его в виде объединения

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_N$$

квадрируемых множеств, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Совокупность множеств $\{D_1 , \ldots , D_N\}$ называется *разбиением* множества D, а наибольший из диаметров множеств D_ν (обозначим его через λ) — *мелкостью* этого разбиения. Выбрав произвольно точки

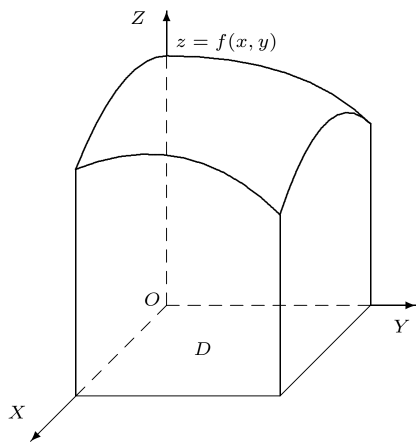

Рис. 7. Цилиндрическое тело

$$(\xi_k , \eta_k) \in D_k , \quad k = 1, \ldots , N ,$$

заменим приближенно каждое цилиндрическое тело

$$T_k := \big\{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| (x , y) \in D_k , 0 \leqslant z \leqslant f(x , y)\big\}$$

прямым цилиндром с основанием D_k и высотой $f(\xi_k\,,\,\eta_k)$. Тогда для искомого объема будет иметь место следующее приближенное равенство:

$$\mu_3(T) \approx \sum_{k=1}^{N} f(\xi_r\,,\,\eta_k)\cdot\mu_2(D_k)\,. \tag{20.2}$$

За точное значение объема естественно принять предел сумм (20.2) при условии, что мелкость разбиения стремится к нулю. С другой стороны, суммы вида (20.2) называются интегральными суммами двойного интеграла от функции f по множеству D. Таким образом, имеем

$$\mu_3(T) := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_l\,,\,\eta_k)\cdot\mu_2(D_k) =: \iint\limits_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

в предположении, что этот предел существует и является числом. В этом случае цилиндрическое тело называется *кубируемым* (или имеющим конечный объем).

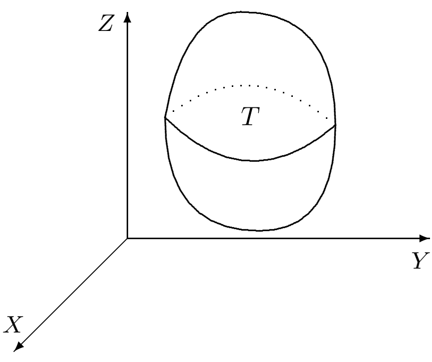

Рис. 8. Тело в $\mathbb{R}^3$

Задача о массе неоднородного тела. Пусть задано *тело*, т.е. ограниченное кубируемое множество $T \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 8). Пусть ставится задача определить и вычислить его массу $M(T)$, если известна его объемная плотность, т.е. функция $\rho : T \longrightarrow \mathbb{R}_+$. В случае, когда плотность тела постоянна, т.е. $\rho = \rho(x,y,z) \equiv \equiv \mathrm{const}$, искомая масса равна $\rho\,\mu_3(T)$. Если же плотность ρ не постоянна, то представим тело T в виде объединения $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_N$ кубируемых тел, попарно не имеющих общих внутренних точек. Обозначим через λ мелкость этого разбиения, т.е. наибольший из диаметров тел T_ν. Выбирая произвольно точки $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in T_k$, составим интегральную сумму тройного интеграла по множеству T от функции ρ

$$\sum_{k=1}^{N} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \mu_3(T_k)\,, \tag{20.3}$$

которую естественно принять за приближенное значение искомой массы. За точное значение искомой массы естественно принять предел сумм вида (20.3) при $\lambda \to 0$:

$$M(T) := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{N} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \mu_3(T_k) =: \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Считается, что масса данного тела существует, если этот предел существует и является числом.

20.2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО БРУСАМ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА

20.2.1. Понятие n-кратного интеграла по брусу

Определение 20.1. *Замкнутым n-мерным брусом будем называть множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде*

$$\Pi := [a_1\,,\, b_1] \times [a_2\,,\, b_2] \times \ldots \times [a_n\,,\, b_n]\,, \tag{20.4}$$

где $-\infty < a_k \leqslant b_k < +\infty$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Брусу приписывается n-мерный объем

$$\mu_n(\Pi) := (b_1 - a_1)\,(b_2 - a_2)\, \ldots\, (b_n - a_n)\,. \tag{20.5}$$

Если $\mu_n(\Pi) > 0$, то брус Π называется невырожденным, а в случае $\mu_n(\Pi) = 0$ — вырожденным.

На рис. 9 показаны невырожденные брусы малых размерностей, допускающие наглядное геометрическое изображение.

Рис. 9. Брусы малых размерностей

Желая определить понятие n-кратного интеграла по невырожденному брусу (20.4) от функции $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$, построим для каждого $k = 1, \ldots, n$ разбиение $a_k = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b_k$ отрезка $[a_k, b_k]$. Эти разбиения порождают разбиение бруса Π на меньшие брусы (условимся называть их *ячейками*):

$$U = [x_\mu^1\,,\, x_{\mu+1}^1] \times [x_\nu^2\,,\, x_{\nu+1}^2] \times \ldots \times [x_\sigma^n\,,\, x_{\sigma+1}^n]\,. \tag{20.6}$$

Объем ячейки (20.6) вычисляется по формуле (20.5):

$$\mu(U) = \mu_n(U) = (x_{\mu+1}^1 - x_\mu^1)\,(x_{\nu+1}^2 - x_\nu^2)\,\ldots\,(x_{\sigma+1}^n - x_\sigma^n)\,.$$

Пусть N — общее число ячеек (20.6). Для того чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что они перенумерованы в каком-нибудь порядке. Множество всех ячеек (20.6)

$$T := \{U_1\,,\, U_2\,,\, \ldots\,,\, U_N\} \tag{20.7}$$

будем называть *разбиением* бруса Π. Число

$$\lambda = \lambda(T) = \max_k \{\operatorname{diam} U_k\} \tag{20.8}$$

условимся называть *мелкостью* разбиения T. Для любого разбиения имеет место очевидное равенство

$$\mu(T) = \sum_{k=1}^{N} \mu(U_k)\,.$$

Выбирая в каждой ячейке произвольную точку

$$\boldsymbol{\xi}_k = (\xi_k^1, \xi_k^2\,,\, \ldots\,,\, \xi_k^n) \in U_k\,,\ \ k = 1, \ldots, N\,,$$

обозначим через ξ множество всех выбранных («отмеченных») точек. Пара (T, ξ) называется *разбиением с отмеченными точками.*

Определение 20.2. *Сумма*

$$\sigma(f; T, \xi) := \sum_{k=1}^{N} f(\boldsymbol{\xi}_k)\, \mu(U_k) \tag{20.9}$$

называется интегральной суммой n-кратного интеграла от функции $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ по брусу Π, соответствующей разбиению T с отмеченными точками ξ. Функция f называется интегрируемой по брусу Π, если существует конечный предел сумм (20.9) *при $\lambda(T) \to 0$. Этот предел называется n-кратным интегралом по брусу Π от функции f.*

Приведем здесь встречающиеся обозначения для интеграла по брусу:

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\!\!\int\limits_{\Pi} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n := \\ := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f; T, \xi)\,, \tag{20.10}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$ — переменная интегрирования, а $d\boldsymbol{x} = dx_1 \dots dx_n$ — элемент n-мерного объема.

Первое (самое короткое) обозначение для интеграла обычно применяется в теоретических исследованиях (т.е. когда интеграл не требуется вычислять). Третье (самое подробное) обозначение для интеграла применяется обычно при вычислениях (т.е. когда ставится задача вычислить интеграл, переходя к координатам). Существуют и другие обозначения, на которых здесь не останавливаемся.

Отметим, что необходимым условием существования интеграла от функции f по брусу Π является ограниченность функции f. Доказательство этого простого факта мы пока оставляем читателю в качестве упражнения.

20.2.2. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу

Пусть $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, заданная на брусе Π, а $T = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ — разбиение бруса Π. Обозначая

$$m_j := \inf_{U_j} f(\boldsymbol{x})\,, \qquad M_j := \sup_{U_j} f(\boldsymbol{x})\,, \tag{20.11}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ