

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

---

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Часть 4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ.  
ИНТЕГРАЛЫ,  
ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Часть 5

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.  
ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

Э. И. Зверович

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие  
в шести частях

Часть 4

Функциональные последовательности и ряды.  
Интегралы, зависящие от параметра

Часть 5

Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям

Минск

Вышэйшая школа

2008

Излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов на втором курсе. В третьем семестре изучают элементы теории функциональных последовательностей и функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов и интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов. Содержание четвертого семестра составляет теория кратных интегралов и интегралов по многообразиям.

Для студентов математических специальностей высших учебных заведений.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В четвертой части учебного пособия приводится теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в третьем семестре. Его содержание составляют предусмотренные учебными программами факты из теории функциональных последовательностей, функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов Фурье, интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов. Из особенностей изложения следует отметить, что в теории рядов Фурье используется понятие роста.

В пятой части приводится теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в четвертом семестре. Его содержание составляют кратные интегралы Римана, криволинейные и поверхностные интегралы. Кроме того, дается исчисление внешних дифференциальных форм, интегралы по многообразиям и общая теорема Стокса.

Изложение теории кратных интегралов — не концентрическое, т.е. сразу вводятся  $n$ -кратные интегралы (а случаи  $n = 2, 3, \dots$  рассматриваются как примеры). Сначала изучаются интегралы по брусам, поскольку теория таких интегралов мало отличается от теории одномерного интеграла Римана. Затем рассматриваются интегралы по произвольным ограниченными множествам, измеримым по Жордану. Даются теоремы существования таких интегралов, включая критерий Лебега, и все основные свойства.

Теорема Фубини изложена в степени общности, достаточной для всех приложений, важнейшие из которых приведены. Доказана теорема существования разложения единицы (известного также под названием «разбиение единицы»), которое в дальнейшем неоднократно используется. Приведена с полным доказательством теорема о замене переменных в кратных интегралах. Формулы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского даны на современном уровне строгости, без существенного увеличения объема текста и с минимальными ограничениями. Завершается том изложением исчисления внеш-

них дифференциальных форм, элементов анализа на многообразиях, вложенных в  $\mathbb{R}^n$ , и общей теоремы Стокса на таких многообразиях.

Из огромного количества имеющейся учебной литературы по математическому анализу в списке литературы представлены учебники и учебные пособия [2–7], [9–12], а также задачки [1], [8]. Учебники и пособия подобраны по принципу близости по содержанию и методике изложения к предлагаемому мною учебному пособию. К тому же по крайней мере большинство книг [1–12] доступны студентам университетов Республики Беларусь.

Нумерация глав продолжает нумерацию глав предыдущих книг этого учебного пособия. Каждая глава заканчивается подборкой задач по соответствующим темам. Эти подборки задач составила доцент О.Б. Долгополова.

Выражаю благодарность профессору В.Г. Кротову, доцентам А.С. Ляликову и Е.К. Щетникович за квалифицированную помощь при подготовке рукописи в издательской системе L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>, доценту Т.Н. Жоровиной за тщательное вычитывание рукописи, а также рецензентам: ректору Гродненского государственного университета, профессору Е.А. Ровбе и профессору того же университета Ю.М. Вувуникяну, профессору Гомельского государственного университета А.П. Старовойтову.

*Э.И. Зверович*

## Часть 4

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

## 17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

### 17.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИХ ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

В этой главе будут изучаться последовательности и ряды, все члены которых — числовые функции одного переменного (вещественного или комплексного). Условимся через  $z$  (возможно, с индексами) обозначать переменные, которые считаются, вообще говоря, комплексными. Через  $x$  (возможно, с индексами) будем обозначать вещественные переменные.

**Определение 17.1.** *Функциональной последовательностью называется последовательность, все члены которой — функции. Функциональным рядом называется ряд, все члены которого — функции.*

Понятия и обозначения, связанные с функциональными последовательностями и рядами, по форме не отличаются от соответствующих понятий и обозначений, связанных с числовыми последовательностями и рядами, поэтому на них не останавливаемся. Различия начинаются тогда, когда речь заходит о сходимости. Это связано прежде всего с тем, что одна и та же последовательность (или ряд) может сходиться при одних значениях аргумента и расходиться — при других.

**Определение 17.2.** *Говорят, что функциональная последовательность  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  сходится поточечно на множестве  $E \subset \mathbb{C}$  к функции  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , если все функции  $f_n$  определены на множестве  $E$  и  $\forall z \in E$  числовая последовательность  $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$  сходится к числу  $f(z)$ .*

Записывается этот факт так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{или} \quad f_n(z) \rightarrow f(z) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in E.$$

**Определение 17.3.** *Говорят, что функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  сходится поточечно на множестве  $E \subset \mathbb{C}$  к сумме  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , если последовательность его частичных сумм сходится поточечно к функции  $f$  на множестве  $E$ .*

Записывается этот факт так:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{при } z \in E.$$

Напомним, что сходимость последовательностей и сходимость рядов — понятия равносильные в том смысле, что одно из них сводится к другому. Именно сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  определяется как сходимость последовательности  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  его частичных сумм  $s_n := f_1 + \dots + f_n$ . Обратно, сходимость последовательности  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  можно определить как сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , где

$$f_1 = s_1, \quad f_2 = s_2 - s_1, \quad \dots, \quad f_n = s_n - s_{n-1}, \dots$$

Учитывая это замечание, мы в дальнейшем (в зависимости от удобства формулировок) некоторые вопросы будем излагать только для функциональных последовательностей, другие — только для функциональных рядов, а часть вопросов — и для последовательностей, и для рядов.

Для изучения функциональных последовательностей и рядов целесообразно ввести понятие области сходимости.

**Определение 17.4.** *Областью сходимости функциональной последовательности  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  или функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  называется множество всех значений аргумента  $z \in \mathbb{C}$ , для которых сходится числовая последовательность  $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$  или соответственно числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ .*

Рассмотрим простые примеры на нахождение областей сходимости.



**Пример 1.** Пусть  $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Так как

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{1}{x^2 + n} \leq \frac{1}{n},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Поэтому областью сходимости данной последовательности является множество  $\mathbb{R}$  всех вещественных чисел.

**Пример 2.** Пусть  $f_n(z) = nz$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Так как  $f_n(0) = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ . При  $z \neq 0$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = z \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ . Таким образом, область сходимости данной последовательности состоит из одной точки  $z = 0$ .

**Пример 3.** Пусть  $f_n(x) = \frac{n!}{x^2 + n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x^2 + n} = +\infty,$$

то областью сходимости данной последовательности является пустое множество  $\emptyset$ .

Основные проблемы теории функциональных последовательностей и рядов можно сформулировать следующим образом. Пусть все члены функциональной последовательности или ряда обладают некоторым свойством (например, непрерывны, интегрируемы, дифференцируемы и т.п.). Обладает ли предельная функция или сумма ряда соответствующим свойством? Если да, то каковы соотношения между  $f'_n$  и  $f'$ , между интегралами от  $f_n$  и  $f$ , и т.п.?

Пусть, например,  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , где все функции  $f_n$  непрерывны в точке  $x$ . Непрерывность функции  $f_n$  в точке  $x$  означает, что  $\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = f_n(x)$ . Задаваясь вопросом о непрерывности предельной функции  $f$  в точке  $x$ , мы должны проверить равенство  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ . Выражая теперь  $f$  через  $f_n$  и используя непрерывность функции  $f_n$  в точке  $x$ , получим

$$\lim_{t \rightarrow x} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) \right).$$

Таким образом, *вопрос о непрерывности предельной функции*

$f$  в точке  $x$  сводится к вопросу о том, справедливо ли равенство

$$\lim_{t \rightarrow x} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) \right), \quad (17.1)$$

т.е. важен ли порядок, в котором осуществляются предельные переходы?

Мы покажем сейчас на примерах, что, вообще говоря, равенства типа (17.1) неверны. Первый, самый простой пример связан с рассмотрением «двойной последовательности».

**Пример 1.** Положим  $s_{mn} := \frac{m}{m+n}$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ . При каждом фиксированном  $n$  имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+n} = 1,$$

и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Если же фиксировать  $m$ , то получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{m+n} = 0,$$

и, значит,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn} \neq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn}.$$

**Пример 2.** Все функции  $f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , непрерывны на  $\mathbb{R}$  и образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$  при  $x \neq 0$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  сходится. Его сумма

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

разрывна в точке  $x = 0$ . Таким образом, сходящийся ряд, все члены которого — непрерывные функции, может иметь разрывную сумму.

**Пример 3.** Рассмотрим семейство функций  $\{f_{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ , где

$$f_{mn}(x) = |\cos(n! \pi x)|^m.$$

Все эти функции, очевидно, непрерывны на  $\mathbb{R}$ . Однако предел

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \lim_{m \rightarrow \infty} f_{mn}(x) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\cos(n! \pi x)|^m = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \frac{k}{n!}, \\ 0 & \text{при } x \neq \frac{k}{n!} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.2)$$

есть функция, разрывная во всех точках множества  $\left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Таким образом, опять предел последовательности непрерывных функций оказывается разрывной функцией.

Рассмотрим теперь последовательность  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n$  — сужение функции (17.2) на отрезок  $[0, 1]$ . Все функции этой последовательности интегрируемы в силу критерия Лебега<sup>1</sup>. Действительно, каждая из этих функций ограничена и имеет конечное множество точек разрыва. Переходя к пределу по  $n$ , получим знакомую нам функцию Дирихле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

которая всюду разрывна и, значит, не интегрируема по Риману.

**Пример 4.** Пусть  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . В силу очевидного неравенства  $0 \leq \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  имеем  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$ . Все функции  $f_n$  и функция  $f$ , очевидно, дифференцируемы, причем  $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$ ,  $f'(x) \equiv 0$ . Однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \neq f'(x)$ , так как уже при  $x = 0$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \neq 0$ .

**Пример 5.** Пусть  $f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Так как  $f_n(0) = f_n(1) = 0$ , то и  $f(0) = f(1) = 0$ . Далее, при  $x \in (0, 1)$  имеем

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 (1 - x^2)^n) = 0.$$

---

<sup>1</sup>Напоминаю критерий Лебега: *интегрируемость по Риману функции равносильна тому, что она ограничена, а множество всех ее точек разрыва имеет меру нуль.*

## Часть 5

### КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ

## 20. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА

### 20.1. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой главе излагается теория кратных интегралов Римана по ограниченным множествам, измеримым по Жордану.

**Задача об объеме цилиндрического тела.** Вспомним геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции  $f$ : интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен площади  $\mu_2(T)$  криволинейной трапеции  $T$  (рис. 6):

$$\mu_2(T) = \int_a^b f(x) dx .$$

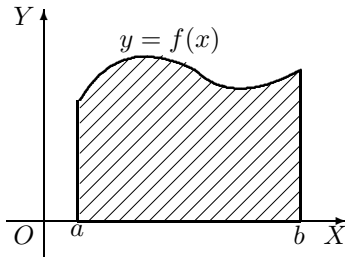


Рис. 6. Криволинейная трапеция

Трехмерными аналогами криволинейных трапеций естественно считать так называемые *цилиндрические тела*  $T \subset \mathbb{R}^3$  (рис. 7). Для задания такого тела берем неотрицательную функцию от двух переменных

$$z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

и по определению полагаем:

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D; 0 \leq z \leq f(x, y)\} . \quad (20.1)$$

Требуется определить и вычислить объем  $\mu_3(T)$  цилиндрического тела (20.1). Напомним, что *определить* означает дать определение, т.е. ответить на вопрос: что такое объем? *Вычислить* означает указать условия и процедуру, позволяющие приписать искомому объему числовое значение. При этом естественно руководствоваться следующими свойствами объема  $\mu_3$ , предполагая, что он существует:

- 1°.  $\mu_3(A) \geq 0$  (неотрицательность);
- 2°.  $A \subset B \implies \mu_3(A) \leq \mu_3(B)$  (монотонность);
- 3°.  $\mu_3(A \cup B) = \mu_3(A) + \mu_3(B) - \mu_3(A \cap B)$  (аддитивность);
- 4°. *объем прямого цилиндра с квадратируемым основанием равен произведению площади основания на высоту.*

Для решения этой задачи предположим, что множество  $D$  из определения (20.1) квадратируемо, и представим его в виде объединения

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$$

квдратируемых множеств, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Совокупность множеств  $\{D_1, \dots, D_N\}$  называется *разбиением* множества  $D$ , а наибольший из диаметров множеств  $D_\nu$  (обозначим его через  $\lambda$ ) — *мелкостью* этого разбиения. Выбрав произвольно точки

$$(\xi_k, \eta_k) \in D_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

заменяем приближенно каждое цилиндрическое тело

$$T_k := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_k, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

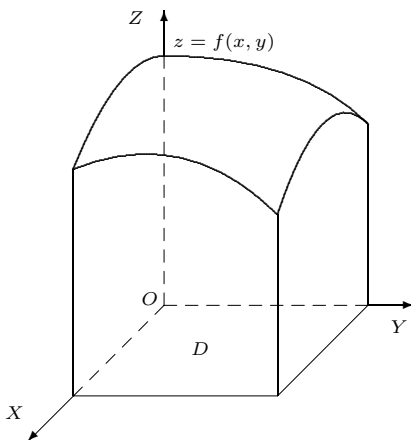


Рис. 7. Цилиндрическое тело

прямым цилиндром с основанием  $D_k$  и высотой  $f(\xi_k, \eta_k)$ . Тогда для искомого объема будет иметь место следующее приближенное равенство:

$$\mu_3(T) \approx \sum_{k=1}^N f(\xi_k, \eta_k) \cdot \mu_2(D_k). \quad (20.2)$$

За точное значение объема естественно принять предел сумм (20.2) при условии, что мелкость разбиения стремится к нулю. С другой стороны, суммы вида (20.2) называются интегральными суммами двойного интеграла от функции  $f$  по множеству  $D$ . Таким образом, имеем

$$\mu_3(T) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(\xi_k, \eta_k) \cdot \mu_2(D_k) =: \iint_D f(x, y) dx dy$$

в предположении, что этот предел существует и является числом. В этом случае цилиндрическое тело называется *кубируемым* (или имеющим конечный объем).

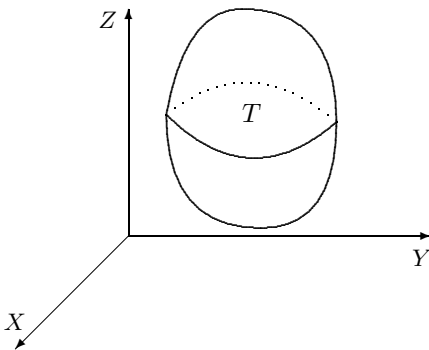


Рис. 8. Тело в  $\mathbb{R}^3$

**Задача о массе неоднородного тела.** Пусть задано *тело*, т.е. ограниченное кубируемое множество  $T \subset \mathbb{R}^3$  (рис. 8). Пусть ставится задача определить и вычислить его массу  $M(T)$ , если известна его объемная плотность, т.е. функция  $\rho : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ . В слу-

чае, когда плотность тела постоянна, т.е.  $\rho = \rho(x, y, z) \equiv \text{const}$ , искомая масса равна  $\rho \mu_3(T)$ . Если же плотность  $\rho$  не постоянна, то представим тело  $T$  в виде объединения  $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_N$  кубируемых тел, попарно не имеющих

общих внутренних точек. Обозначим через  $\lambda$  мелкость этого разбиения, т.е. наибольший из диаметров тел  $T_\nu$ . Выбирая произвольно точки  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in T_k$ , составим интегральную сумму тройного интеграла по множеству  $T$  от функции  $\rho$

$$\sum_{k=1}^N \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \mu_3(T_k), \quad (20.3)$$

которую естественно принять за приближенное значение искомой массы. За точное значение искомой массы естественно принять предел сумм вида (20.3) при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$M(T) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \mu_3(T_k) =: \iiint_T \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Считается, что масса данного тела существует, если этот предел существует и является числом.

## 20.2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО БРУСАМ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА

### 20.2.1. Понятие $n$ -кратного интеграла по брусу

**Определение 20.1.** *Замкнутым  $n$ -мерным брусом будем называть множество  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ , представимое в виде*

$$\Pi := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad (20.4)$$

где  $-\infty < a_k \leq b_k < +\infty$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ .

*Брусу приписывается  $n$ -мерный объем*

$$\mu_n(\Pi) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n). \quad (20.5)$$

*Если  $\mu_n(\Pi) > 0$ , то брус  $\Pi$  называется невырожденным, а в случае  $\mu_n(\Pi) = 0$  — вырожденным.*

На рис. 9 показаны невырожденные брусы малых размерностей, допускающие наглядное геометрическое изображение.





Рис. 9. Брусы малых размерностей

Желая определить понятие  $n$ -кратного интеграла по невырожденному брусу (20.4) от функции  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ , построим для каждого  $k = 1, \dots, n$  разбиение  $a_k = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n_k}^k = b_k$  отрезка  $[a_k, b_k]$ . Эти разбиения порождают разбиение бруса  $\Pi$  на меньшие брусы (условимся называть их *ячейками*):

$$U = [x_\mu^1, x_{\mu+1}^1] \times [x_\nu^2, x_{\nu+1}^2] \times \dots \times [x_\sigma^n, x_{\sigma+1}^n]. \quad (20.6)$$

Объем ячейки (20.6) вычисляется по формуле (20.5):

$$\mu(U) = \mu_n(U) = (x_{\mu+1}^1 - x_\mu^1)(x_{\nu+1}^2 - x_\nu^2) \dots (x_{\sigma+1}^n - x_\sigma^n).$$

Пусть  $N$  — общее число ячеек (20.6). Для того чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что они перенумерованы в каком-нибудь порядке. Множество всех ячеек (20.6)

$$T := \{U_1, U_2, \dots, U_N\} \quad (20.7)$$

будем называть *разбиением* бруса  $\Pi$ . Число

$$\lambda = \lambda(T) = \max_k \{\text{diam } U_k\} \quad (20.8)$$

условимся называть *мелкостью* разбиения  $T$ . Для любого разбиения имеет место очевидное равенство

$$\mu(T) = \sum_{k=1}^N \mu(U_k).$$

Выбирая в каждой ячейке произвольную точку

$$\xi_k = (\xi_k^1, \xi_k^2, \dots, \xi_k^n) \in U_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

обозначим через  $\xi$  множество всех выбранных («отмеченных») точек. Пара  $(T, \xi)$  называется *разбиением с отмеченными точками*.

**Определение 20.2.** *Сумма*

$$\sigma(f; T, \xi) := \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \mu(U_k) \quad (20.9)$$

называется *интегральной суммой  $n$ -кратного интеграла от функции  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  по брусу  $\Pi$ , соответствующей разбиению  $T$  с отмеченными точками  $\xi$* . Функция  $f$  называется *интегрируемой по брусу  $\Pi$* , если существует конечный предел сумм (20.9) при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Этот предел называется  *$n$ -кратным интегралом по брусу  $\Pi$  от функции  $f$* .

Приведем здесь встречающиеся обозначения для интеграла по брусу:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} f &= \int_{\Pi} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \int_{\Pi} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n := \\ &:= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi), \end{aligned} \quad (20.10)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$  — переменная интегрирования, а  $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$  — элемент  $n$ -мерного объема.

Первое (самое короткое) обозначение для интеграла обычно применяется в теоретических исследованиях (т.е. когда интеграл не требуется вычислять). Третье (самое подробное) обозначение для интеграла применяется обычно при вычислениях (т.е. когда ставится задача вычислить интеграл, переходя к координатам). Существуют и другие обозначения, на которых здесь не останавливаемся.

Отметим, что необходимым условием существования интеграла от функции  $f$  по брусу  $\Pi$  является ограниченность функции  $f$ . Доказательство этого простого факта мы пока оставляем читателю в качестве упражнения.

### 20.2.2. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу

Пусть  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, заданная на брусе  $\Pi$ , а  $T = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$  — разбиение бруса  $\Pi$ . Обозначая

$$m_j := \inf_{U_j} f(\mathbf{x}), \quad M_j := \sup_{U_j} f(\mathbf{x}), \quad (20.11)$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Часть 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА</b>	<b>5</b>
<b>17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ . . . . .</b>	<b>6</b>
17.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. ИХ ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ . . . . .	6
17.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ . . . . .	11
17.2.1. Равномерная сходимость. Критерии . . . . .	11
17.2.2. Признак Вейерштрасса и его следствие . . . . .	16
17.2.3. Признаки Дирихле и Абеля . . . . .	18
17.3. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ . . . . .	22
17.3.1. Основная лемма . . . . .	22
17.3.2. Равномерная сходимость и непрерывность . . . . .	24
17.3.3. Равномерная сходимость и интегрируемость . . . . .	27
17.3.4. Равномерная сходимость и дифференцируемость . . . . .	29
17.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ В НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ВОПРОСАХ АНАЛИЗА . . . . .	31

17.4.1. Пример функции, всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой . . . . .	31
17.4.2. Теорема Стоуна — Вейерштрасса . . . . .	35
17.5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ . . . . .	39
17.5.1. Общие свойства степенных рядов и их сумм . . . . .	39
17.5.2. Вторая теорема Абеля и ее следствия . . . . .	42
Задачи . . . . .	45
<b>18. РЯДЫ ФУРЬЕ . . . . .</b>	<b>51</b>
18.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ . . . . .	51
18.1.1. Периодические явления . . . . .	51
18.1.2. Преобразование суммы гармоник к стандартному виду . . . . .	53
18.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ . . . . .	55
18.2.1. Основные понятия . . . . .	55
18.2.2. Ортогональность тригонометрических систем функций . . . . .	57
18.3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ. МИНИМИЗИРУЮЩЕЕ СВОЙСТВО И ЕГО СЛЕДСТВИЯ . . . . .	60
18.3.1. Ортогональные ряды. Ряды Фурье . . . . .	60
18.3.2. Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье и его следствия . . . . .	64
18.4. ЛЕММА ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ . . . . .	68
18.4.1. Лемма об осцилляции . . . . .	68
18.4.2. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле . . . . .	71
18.4.3. Принцип локализации . . . . .	74
18.5. ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДА ФУРЬЕ НА СХОДИМОСТЬ В ТОЧКЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО СУММЫ . . . . .	76
18.5.1. Вводные замечания . . . . .	76
18.5.2. Признаки Дини и Лишшица . . . . .	78
18.5.3. Сходимость ряда Фурье при условиях Дирихле . . . . .	80
18.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ . . . . .	84
18.6.1. Равномерная сходимость рядов Фурье . . . . .	84
18.6.2. Равномерное приближение непрерывных функций многочленами . . . . .	86

18.6.3. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций . . . . .	92
Задачи . . . . .	93
<b>19. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ . . . . .</b>	<b>96</b>
19.1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА . . . . .	96
19.1.1. Теоремы о непрерывности и об интегрируемости . . . . .	96
19.1.2. Теоремы о дифференцируемости . . . . .	101
19.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА . . . . .	105
19.2.1. Предварительные замечания . . . . .	105
19.2.2. Равномерная сходимость . . . . .	107
19.3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА . . . . .	114
19.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ . . . . .	119
19.4.1. Вычисление интеграла Пуассона и его обобщений . . . . .	119
19.4.2. Вычисление интегралов Дирихле и Фейера . . . . .	123
19.4.3. Вычисление интегралов Фруллани . . . . .	126
19.5. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ . . . . .	129
19.5.1. Определение эйлеровых интегралов . . . . .	129
19.5.2. Основные свойства гамма-функции . . . . .	129
19.5.3. Основные свойства бета-функции и ее связь с гамма-функцией . . . . .	133
19.5.4. Вычисление некоторых интегралов с помощью гамма-функции . . . . .	139
19.5.5. Формула Стирлинга . . . . .	143
19.6. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ . . . . .	148
19.6.1. Интеграл Фурье . . . . .	148
19.6.2. Преобразование Фурье . . . . .	154
Задачи . . . . .	157

## Часть 5. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ 167

<b>20. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА</b> . . . . .	168
20.1. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ . . . . .	168
20.2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО БРУСАМ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА . . . . .	171
20.2.1. Понятие $n$ -кратного интеграла по брусу . . . . .	171
20.2.2. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу . . . . .	173
20.2.3. Простейшие свойства интеграла по брусу . . . . .	177
20.3. КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО БРУСУ . . . . .	180
20.3.1. Множества меры нуль в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	180
20.3.2. Критерий Лебега . . . . .	182
20.4. ИНТЕГРАЛ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ МНОЖЕСТВУ ИЗ $\mathbb{R}^n$ . . . . .	185
20.4.1. Допустимые множества . . . . .	185
20.4.2. Интеграл по ограниченному множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ . . . . .	187
20.4.3. Мера Жордана допустимого множества в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	189
20.4.4. Свойства $n$ -кратных интегралов . . . . .	190
Задачи . . . . .	192
<b>21. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ</b> . . . . .	197
21.1. СВЕДЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ПОВТОРНЫМ . . . . .	197
21.1.1. Теорема Фубини . . . . .	197
21.1.2. Некоторые применения теоремы Фубини . . . . .	199
21.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ . . . . .	203
21.2.1. Вводные замечания и вспомогательные предложения . . . . .	203
21.2.2. Теорема существования разложения единицы . . . . .	208
21.2.3. Интеграл по ограниченному открытому множеству . . . . .	211

21.3. ФОРМУЛА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ . . . . .	214
21.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫХ ИН- ТЕГРАЛАХ . . . . .	221
21.4.1. Некоторые факты, связанные с $n$ - мерными объемами . . . . .	221
21.4.2. Некоторые криволинейные коорди- наты в $\mathbb{R}^2$ . . . . .	223
21.4.3. Цилиндрические и сферические ко- ординаты в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	226
21.4.4. Примеры на замену переменных в $n$ -кратных интегралах . . . . .	227
Задачи . . . . .	232
<b>22. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫ- ВАЮЩИЕ КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙ- НЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ . . . . .</b>	<b>239</b>
22.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ . . . . .	239
22.1.1. Длина дуги гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$ . На- туральный параметр . . . . .	239
22.1.2. Криволинейные интегралы 1-го рода (по длине дуги) . . . . .	243
22.1.3. Криволинейные интегралы 2-го рода (по координатам) . . . . .	247
22.2. ФОРМУЛА ГРИНА . . . . .	251
22.3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ ГРИНА . . . . .	259
22.3.1. Первообразная функция для диффе- ренциальной формы в области . . . . .	259
22.3.2. Локальная первообразная и критерий ее существования . . . . .	261
22.3.3. Гомотопия кривых. Теорема о гомотопии . . . . .	264
22.4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ . . . . .	271
22.4.1. Площадь параметризованной глад- кой поверхности с краем . . . . .	271
22.4.2. Поверхностные интегралы 1-го рода (по площади поверхности) . . . . .	280
22.4.3. Поверхностные интегралы 2-го рода (по координатам) . . . . .	282
22.5. ФОРМУЛЫ СТОКСА И ГАУССА — ОСТРО- ГРАДСКОГО . . . . .	284

22.5.1. Оператор Гамильтона «набла» . . . . .	284
22.5.2. Формула Стокса . . . . .	286
22.5.3. Формула Гаусса — Остроградского . . . . .	290
Задачи . . . . .	296
<b>23. ИСЧИСЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ И ОБЩАЯ ТЕОРЕМА СТОКСА . . . . .</b>	<b>305</b>
23.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ . . . . .	305
23.1.1. Тензорное произведение полилинейных форм и его свойства . . . . .	305
23.1.2. Антисимметрические тензоры, альтернирование, внешнее произведение и его свойства . . . . .	308
23.2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ . . . . .	317
23.3. ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЦЕПЕЙ . . . . .	328
23.3.1. Предварительные сведения из геометрии . . . . .	328
23.3.2. Основная теорема . . . . .	332
23.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МНОГООБРАЗИЯМ . . . . .	337
23.4.1. Многообразия, лежащие в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	337
23.4.2. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях . . . . .	340
23.4.3. Теорема Стокса на многообразиях . . . . .	344
23.4.4. Классические формулы интегрального исчисления как частные случаи общей теоремы Стокса . . . . .	348
Задачи . . . . .	351
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	354
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	356
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	357