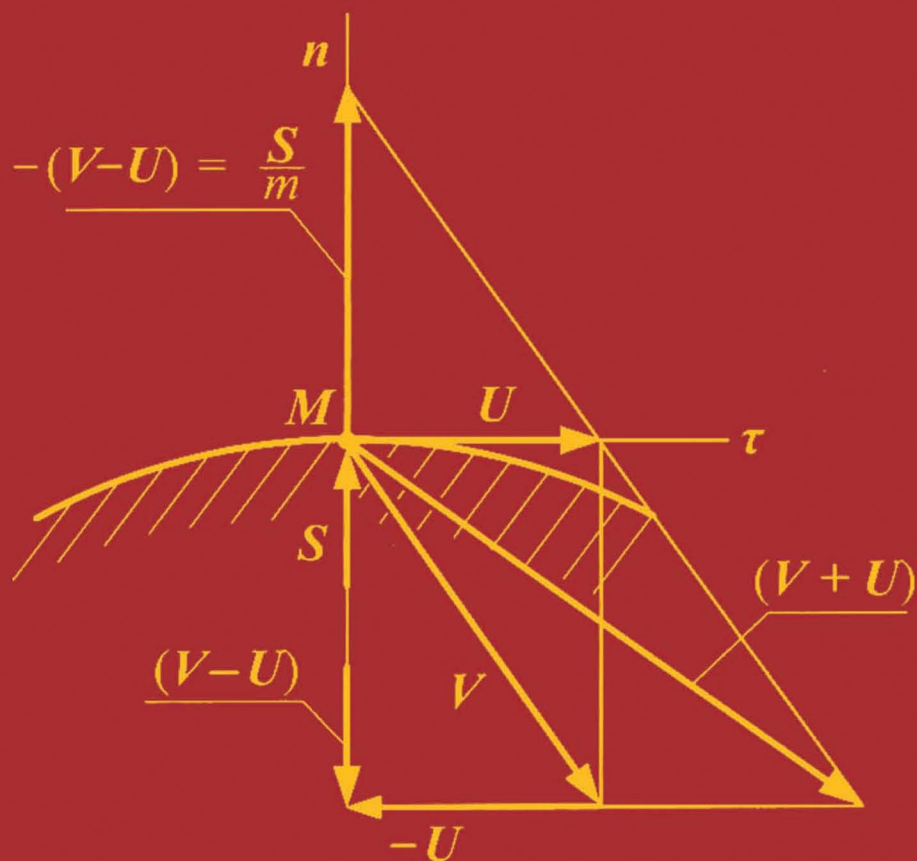


В.Н. Тарасов И.В. Бояркина

М.В. Коваленко С.М. Кузнецов

И.Ф. Шлегель

ТЕОРИЯ УДАРА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ И МАШИНОСТРОЕНИИ



В. Н. ТАРАСОВ, И.В. БОЯРКИНА,
М.В. КОВАЛЕНКО, С.М. КУЗНЕЦОВ,
И.Ф. ШЛЕГЕЛЬ

**ТЕОРИЯ УДАРА
В СТРОИТЕЛЬСТВЕ
И МАШИНОСТРОЕНИИ**



Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва 2006

УДК 531.66(075)

ББК 22.213я73

Т 19

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Основы теории механики и автоматического управления»
Омского государственного технического университета, доктор технических наук,
профессор *Ю.А. Бурьян*;

заведующий кафедрой «Строительные и подъемно-транспортные машины»
Московского государственного строительного университета, доктор технических наук,
профессор *Е.М. Кудрявцев*.

Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В. и др. Теория удара в строительстве и машиностроении. – М.: Научное издание, Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. – 336 с.

ISBN 5-93093-423-1

Рассмотрены основы общей теории и методы расчета задач удара в механических системах, а также методы расчета быстропротекающих динамических процессов, в которых исходным началом является ударное взаимодействие двух тел.

Рассмотрены приложения теории удара, основанные на методе приведения масс: ударное уплотнение грунтов; ударное раскалывание клином деформируемых тел; раз-гон и торможение больших масс гидравлического рабочего оборудования, забивка свай дизель-молотом, ударное прессование глиняных порошков падающим грузом и др.

Издание адресовано студентам, аспирантам, преподавателям, инженерам, связанным с расчетами ударных процессов в механических системах.

The bases of the general theory, methods of solving stroke problems in mechanical systems and methods of solving of quickly proceeding dynamical processes, in which the percussive interaction of two bodies is the initial starting, are considered. The applications of hit theory based on the mass reduction method are considered: percussion consolidation of soils, percussion wedge cleaving of bodies being deformed, acceleration and braking of large masses of hydraulic working equipment, pile ramming by diesel-hammer, percussion pressing of clay powders by falling weight, et al.

The manual is for students, post-graduates, lecturers, engineers bounded up with calculation of stroke processes in mechanical systems.

ISBN 5-93093-423-1

© Издательство АСВ, 2006

© Коллектив авторов, 2006

Научное издание

Тарасов Владимир Никитич, **Бояркина** Ирина Владимировна, **Коваленко** Максим Валерьевич,
Кузнецов Сергей Михайлович, **Шлегель** Игорь Феликсович

ТЕОРИЯ УДАРА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ И МАШИНОСТРОЕНИИ

Оригинал-макет подготовлен РИО Омского государственного технического университета

Дизайн обложки: *Н.С. Кузнецова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Сдано в набор 20.12.05.

Подписано к печати 20.01.06. Формат 70х100/16.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная

Усл. 21 п. л. Заказ № . Тираж 1000 экз.

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, оф. 706 (отдел реализации к. 511)
тел., факс: (495)183-56-83; e-mail: iasv@mgsu.ru, <http://www.iasv.ru/>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
1. Теория удара материальной точки и механической системы	8
1.1. Общие сведения об ударных механических процессах.....	8
1.2. Теория удара материальной точки.....	13
1.2.1. Основные понятия и терминология	13
1.2.2. Упругий и неупругий удары точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления.....	14
1.2.3. Изменение кинетической энергии точки при ударе. Теорема Карно.....	16
1.4.4. Изменение кинетической энергии при ударном освобождении точки от связи	17
1.3. Теорема об изменении количества движения точки и о движении центра масс при ударе	18
1.4. Теорема об изменении кинетического момента при ударе несвободной материальной точки	22
1.5. Удар свободной материальной точки о неподвижную поверхность.....	25
1.6. Векторный вывод теоремы Карно.....	27
1.7. Удар двух свободных материальных точек.....	30
1.8. Удар двух несвободных материальных точек.....	36
1.9. Косой удар несвободной материальной точки о гладкую неподвижную поверхность	37
1.10. Общий случай косоуго удар двух несвободных материальных точек.....	39
1.11. Удар двух тел, вращающихся на одной оси	42
1.12. Удар тела, совершающего пространственное вращение относительно неподвижной оси. Центр удара.....	43
1.13. Особые случаи ударного взаимодействия движущегося тела с неподвижным основанием	47
1.13.1. Преобразование плоского движения тела во вращательное	47
1.13.2. Преобразование поступательного движения тела в плоское	49
1.13.3. Преобразование поступательного движения тела во вращательное	51
1.13.4. Изменение траектории плоского движения тела.....	53
1.13.5. Изменение траектории движения материальной точки.....	55

1.13.6. Преобразование вращательного движения тела в поступательное.....	59
1.14. Удар двух тел на упругом основании	61
1.15. Закон сохранения импульса силы при разгоне и торможении тела	63
1.16. Ударные процессы в автоколебательной механической системе..	65
2. Методы решения задач удара в строительстве и машиностроении	74
2.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода в теории удара механической системы.....	74
2.2. Изменение при ударе угловой скорости вращающегося тела	76
2.3. Послеударные динамические процессы в механической системе с несколькими степенями свободы	77
2.4. Два метода решения задач удара	81
2.5. Решение задач удара методом приведения.....	90
2.6. Удар в сложной механической системе	94
2.7. Удар двух тел, вращающихся на параллельных осях	98
2.8. Удар вращающегося курка	100
2.9. Определение коэффициента восстановления при ударе	102
2.10. Удар упругого однородного стержня по абсолютно жесткой преграде	105
2.11. Распространение ударных волн в упругом однородном стержне	111
2.12. Приближенный метод расчета основной частоты собственных колебаний упругого однородного стержня при ударе о жесткую преграду.....	114
2.13. Удар падающего груза по нижнему торцу однородного стержня, закрепленного верхним торцом в жестком основании.....	118
2.14. Аналитическое описание процесса удара падающего груза по торцу длинного однородного стержня	119
2.15. Удар шара о плоскую поверхность движущегося тела. Модель Герца.....	124
2.16. Удар падающего груза по упругой консольной балке.....	130
2.17. Удар падающего груза по упругой двухопорной балке.....	132
2.18. Мгновенное торможение опускающегося груза на канате.....	138

3. Теория ударного уплотнения грунтов.....	141
3.1. Основные положения и определения.....	141
3.2. Дифференциальное уравнение движения уплотняющего штампа в линейно деформируемом полупространстве при ударе	150
3.3. Теория ударного уплотнения грунтов на основе модели линейно деформируемого полупространства	157
3.4. Расчет параметров трамбуемых рабочих органов	160
4. Динамика раскалывания тел клином	167
4.1. Постановка и решение задачи ударного раскалывания клином деформируемого тела конечных размеров.....	167
4.2. Раскалывание деформируемого тела конечных размеров клином с затупленной кромкой	173
4.3. Решение плоской задачи раскалывания недеформируемого тела клином с затупленной кромкой	176
5. Теория приборов для измерения прочностных характеристик деформируемых сред	180
5.1. Статическое зондирование деформируемых сред конусом	180
5.2. Динамический прибор для определения прочности грунтов	182
5.3. Динамическое зондирование грунтов пробоотборником	188
6. Динамика быстропротекающих процессов разгона и торможения рабочего оборудования стреловой машины.....	195
6.1. Общие положения динамики рабочего оборудования экскаватора	195
6.2. Аналитическое исследование динамики рабочего оборудования по И.А. Вышнеградскому.....	202
6.3. Динамика разгона и торможения рабочего оборудования	206
6.4. Регулирование динамических процессов разгона рабочего оборудования.....	212
7. Теория забивки сваи в грунт падающим грузом.....	222
7.1. Идеализированный подход к процессу забивки сваи в грунт на основе общих теорем динамики	222
7.2. Расчет процесса забивки сваи в грунт падающим грузом	232

8. Теория забивки сваи в грунт дизель-молотом	240
8.1. Технологическая механика процесса забивки сваи в грунт дизель-молотом	240
8.1.1. Математическая модель процесса забивки сваи в грунт дизель-молотом	240
8.1.2. Исследование процесса забивки сваи в грунт дизель-молотом.....	258
8.2. Методика проектирования основных параметров дизель-молотов	269
9. Динамический способ полусухого прессования глиняных порошков	287
9.1. Общие сведения о глиняном порошке	288
9.2. Основные закономерности процесса полусухого прессования порошков.....	292
9.2.1. Кинематические характеристики и параметры процесса полусухого прессования керамических изделий	292
9.2.2. Математическое моделирование сил сопротивления и выходных характеристик процесса прессования	301
9.3. Экспериментальное обоснование параметров математической модели процесса статического прессования керамических изделий из порошков.....	308
9.3.1. Оборудование и методика проведения экспериментальных исследований	308
9.3.2. Экспериментальные исследования процесса прессования керамических изделий.....	312
9.4. Динамический способ полусухого прессования керамических изделий из глиняных порошков	317
9.4.1. Оборудование и методика исследования процесса полусухого прессования порошков падающим грузом	317
9.4.2. Динамика прессования порошка падающим грузом	324
9.4.3. Обоснование параметров динамического способа прессования кирпичей	333
Библиографический список.....	337

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматривается приложение теории удара в строительстве к конкретным технологическим процессам: уплотнение грунтов, раскалывание клином твердых тел, теория приборов для определения прочностных характеристик деформируемых сред, динамика разгона гидравлического рабочего оборудования, забивка свай, динамика прессования глиняных порошков падающим грузом.

Идея книги состоит в расширении понятия теории удара двух тел на ударные процессы, включающие в себя как исходное начало – соударение двух твердых тел и послеударные быстропротекающие динамические процессы технологических машин.

Книга содержит разделы, развивающие общую теорию удара. К ним относятся: векторный вывод теоремы Карно, пример расчета приобретенной кинетической энергии при освобождении точки от связи, приведение масс механической системы к соударяющимся телам и др.

Расширен перечень задач, имеющих связь с теорией удара. К таким задачам относятся задачи преобразования движения тел из одного вида в другие.

В современной технике широко используется гидростатический привод, который, подобно удару, позволяет упрощать механизмы передачи энергии от источника к рабочему телу. При разгоне и торможении больших масс в гидромеханизмах проявляются закономерности общей теории удара – кинематическое состояние системы при разгоне и торможении изменяется за очень короткое время, практически мгновенно.

Послеударные процессы взаимодействия двух тел в книге рассматриваются как быстропротекающие динамические процессы, в которых рабочая среда изменяет свои свойства и характеристики. Такими являются процессы прессования порошков падающим грузом.

Отдельные части книги написали: предисловие, гл. 1, гл. 3, гл. 4, гл. 5, гл. 7 – проф., докт. техн. наук В.Н. Тарасов; гл. 2 – к.т.н., доц. И.В. Бояркина; гл. 6 – к.т.н. М.В. Коваленко, гл. 8 – к.т.н., доцент С.М. Кузнецов, гл. 9 – к.т.н. И.Ф. Шлегель.

Общее научное редактирование книги выполнил член-корреспондент Академии наук Высшей школы, доктор технических наук, профессор Тарасов В.Н.

ТЕОРИЯ УДАРА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.1. Общие сведения об ударных механических процессах

Ударом называют явление, при котором за малый промежуток времени, т.е. почти мгновенно изменяется кинематическое состояние механической системы, происходит мгновенное преобразование механической энергии и возникают ударные импульсы в точках контактирования тел.

В природе и технике можно выделить различные случаи ударного взаимодействия двух тел (рис. 1.1). Фундаментальными случаями, на которых базируется современная теория удара, являются удар свободной материальной точки о неподвижную поверхность (случай 1) и удар двух свободных материальных точек (случай 2).

В случае 1 процесс удара рассматривают как процесс мгновенного наложения связи на движущуюся свободную материальную точку. При ударе двух свободных материальных точек каждая из рассматриваемых точек является связью для другой. В случае 3 представлена схема удара несвободной материальной точки о неподвижную поверхность. В случае 4 показана схема удара двух несвободных материальных точек. В рассмотренных случаях 3 и 4 материальные точки совершают движения по дугам окружностей, которые обеспечиваются наложенными на точку стержневыми связями. Невесомая идеальная стержневая связь в этих случаях кинематически связывает материальную точку с неподвижным основанием.

Многие реальные случаи удара в технике можно рассматривать как удар двух материальных точек. В случаях 5-8 помимо соударяемых тел имеются связи в виде базовых опорных поверхностей или пружин, которые могут не участвовать в процессе удара.

Ударные явления могут быть явного типа, сомневаться в ударном характере которых нет основания (ковка, штамповка, забивка свай, дробление каменных материалов и др.). Однако наряду с такими явлениями удара в природе и технике существуют явления более сложного характера, связанные, например, с мгновенным изменением траектории или характера движения точки или тела, мгновенным преобразованием типов движения (поступательного, вращательного, плоского и др.), которые также являются предметом исследования теории удара.

На рис. 1.2 представлены случаи ударного взаимодействия тел, в которых соударяемые тела имеют поступательные, вращательные или плоские движения в различных сочетаниях. Например, в случае 7 система испытывает удар при мгновенной остановке приводного колеса 2 тормозом 3. В случае 8 колесо 1 имеет 2 степени свободы, обеспечиваемые приводом от колеса 2 и водила 3. Затормаживая приводное колесо 3 или растормаживая его, можно получать эффект мгновенного изменения угловой скорости колеса 1, которое характеризуется как процесс удара. Аналогичный эффект в этом механизме можно получить, мгновенно затормаживая или растормаживая водило 3. И, наконец, на рис. 1.3 представлены особые случаи взаимодействия движущегося тела с основанием или средой, которые имеют также непосредственное отношение к теории удара.

В случае 7 отсутствует непосредственное механическое соударение двух тел, которое имеется во всех других рассматриваемых процессах. Однако благодаря способности гидропривода создавать большие динамические силы в гидроцилиндрах в момент включения золотника распределителя в течение малого времени τ давление в рабочих полостях гидроцилиндров резко возрастает и создает ударный импульс на приведенную массу, который выводит систему из неподвижного состояния. Таким образом, в данном случае происходит ударное взаимодействие тела 1 с жидкостью в гидроцилиндрах, в результате которого на поршне формируется ударный импульс. Данное явление обладает всеми признаками ударного динамического процесса.

На рис. 8, ..., 10 представлены динамические ударные процессы уплотнения грунтов, забивки свай и прессования глиняного порошка.

В данной книге показано, что при ударном взаимодействии двух тел они практически не перемещаются, поэтому тело 2 в течение времени удара τ не взаимодействует с рабочей средой, которая, подобно пружинам, в раннее рассмотренных случаях (например, рис.1.2 случай 6, рис.1.3 случай 3) в процессе соударения тел 1 и 2 себя не проявляет.

Из представленного рассмотрения становится очевидным, что реальные динамические процессы технологических машин часто представляют собой сочетание ударного механического процесса взаимодействия двух тел, в результате которого энергия одного тела (ударника) передается другому (рабочему телу), которое в послепударный период совершает быстропротекающий полезный динамический рабочий процесс, преодолевая рабочие сопротивления.

1.2. Теория удара материальной точки

1.2.1. Основные понятия и терминология

Изменение количества движения материальной точки в векторной дифференциальной форме имеет вид

$$d(m\mathbf{V}) = \mathbf{F} dt. \quad (1.1)$$

В результате интегрирования (1.1) в интервале от $t = 0$ до $t = \tau$, полагая, что сила \mathbf{F} является функцией времени, получим

$$m\mathbf{V} - m\mathbf{V}_0 = \int_0^{\tau} \mathbf{F} dt. \quad (1.2)$$

Равенство (1.2) устанавливает связь приращения количества движения с импульсом силы \mathbf{F} за промежуток времени τ .

Сущность явления удара состоит в том, что при ударе происходит конечное изменение скорости \mathbf{V} и количества движения $m\mathbf{V}$ за очень малый промежуток времени τ , измеряемый для реальных технических процессов тысячными и меньшими долями секунды.

Введем обозначения \mathbf{F}^* - среднее значение силы \mathbf{F} в интервале малого параметра времени τ . По теореме о среднем значении из (1.2) получим

$$m\mathbf{V} - m\mathbf{V}_0 = \mathbf{F}^* \tau. \quad (1.3)$$

Равенство (1.3) показывает, что изменение количества движения и скорости точки в левой части уравнения равно произведению силы и времени удара.

Правая часть (1.3) представляет собой произведение большой и малой величин. Измерять при ударе большие силы \mathbf{F} и малые промежутки времени τ непосредственно неудобно. Поэтому в теории удара принято пользоваться ударными импульсами

$$\mathbf{S} = \int_0^{\tau} \mathbf{F} dt, \quad (1.4)$$

где \mathbf{S} – ударный импульс; \mathbf{F} – ударная сила.

В результате принятых определений уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$m\mathbf{V} - m\mathbf{V}_0 = \mathbf{S}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) представляет собой основное уравнение теории удара: *изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу.*

Уравнение (1.5) запишем в виде

$$m\Delta\mathbf{V} = \mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Путем деления левой и правой частей уравнения (1.6) на время τ получим уравнение Ньютона

$$m\mathbf{a} = F. \quad (1.7)$$

Для решения задач удара более удобным является уравнение (1.6), которое по аналогии с уравнением (1.7) является основным уравнением теории удара материальной точки. В теории удара не удобно пользоваться ускорениями, которые весьма велики.

Следует иметь ввиду, что уравнения (1.5), (1.6) являются конечными уравнениями, которые относятся к общим теоремам динамики и которые позволяют не интегрируя дифференциальных уравнений получать искомое значение скорости по заданному ударному импульсу или наоборот.

Векторное равенство (1.5) можно записать в виде уравнения без правой части

$$\mathbf{S} + (m\mathbf{V}_0 - m\mathbf{V}) = 0. \quad (1.8)$$

Ударный импульс \mathbf{S} можно представить в виде суммы ударных импульсов активных сил \mathbf{S}^F и ударных импульсов сил реакций \mathbf{S}^N . Выражение в скобках представляет собой вектор изменения количества движения материальной точки за время удара, тогда окончательно можно записать

$$\mathbf{S}^F + \mathbf{S}^N + (-m\Delta\mathbf{V}) = 0. \quad (1.9)$$

Основное уравнение теории удара в форме (1.9) отражает следующую закономерность: *векторная сумма векторов ударных импульсов активных сил и векторов ударных импульсов сил реакций связей и вектора изменения количества движения точки представляет собой уравновешенную систему векторов.*

1.2.2. Упругий и неупругий удары точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления

Пусть материальная точка массы m движется со скоростью \mathbf{V} и встречает на своем пути неподвижную поверхность (рис.1.4).

Обозначим скорость точки в конце удара через \mathbf{U} , тогда, используя (1.6) получим

$$m\mathbf{U} - m\mathbf{V} = \mathbf{S}^N. \quad (1.10)$$

Разложим векторы \mathbf{V} и \mathbf{U} по направлениям нормали и касательной к поверхности в точке A . Рассматриваем касательную τ , лежащую в одной плоскости с вектором \mathbf{V} . Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_\tau; \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_n + \mathbf{U}_\tau.$$

Для случая идеальной связи в точке A имеем ударный импульс S^N , направленный по нормали n и поэтому составляющая скорости в процессе удара не изменится

$$V_\tau = U_\tau. \quad (1.11)$$

При ударе материальной точки возможны три случая удара:

1). $U_n = 0$. Случай абсолютно неупругого удара, такую связь называют абсолютно неупругой.

2). $U_n = -V_n$. Случай абсолютно упругого удара точки о связь, такую связь называют абсолютно упругой. В этом случае нормальная составляющая скорости не изменяется по численной величине, а только изменяет свое направление на противоположное.

3). $U_n = -K V_n$, где $0 < K < 1$. Случай упругого удара.

Коэффициент восстановления K введен в теорию удара Ньютоном и представляет собой отношение модулей нормальных скоростей точки в конце удара и в начале удара

$$K = \frac{U_n}{V_n}. \quad (1.12)$$

Обозначая α и β – соответственно углы падения и отражения для векторов скорости, из рис. 1.4 получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_\tau}{V_n}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{V_\tau}{U_n}.$$

Учитывая, что $U_n = -K V_n$, векторы ($0 < K < 1$), найдем

$$K = \frac{U_n}{V_n} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (1.13)$$

При абсолютно неупругом ударе $\beta = \frac{\pi}{2}$, поэтому $K = 0$. При абсолютно упругом ударе $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\alpha = \beta$ и $K = 1$.

При упругом ударе $\alpha < \beta$; $K < 1$.

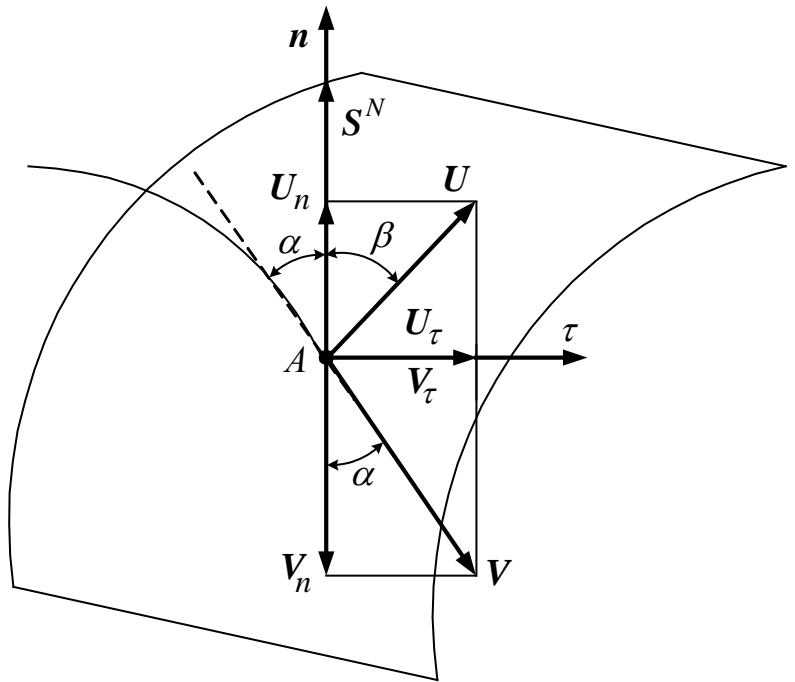


Рис. 1.4. Удар точки о неподвижную поверхность

1.2.3. Изменение кинетической энергии точки при ударе. Теорема Карно

Процесс удара материальной точки рассматривают как явление, при котором на движущуюся материальную точку мгновенно накладывается или с точки мгновенно снимается абсолютно неупругая идеальная связь.

Связь, наложенная на материальную точку, будет существовать и после удара, а связь, снятая во время удара, будет отсутствовать и после удара.

В обоих рассмотренных случаях используем теорему (1.10)

$$m\mathbf{U} - m\mathbf{V} = \mathbf{S}^N.$$

1-й случай: мгновенное наложение связей. Умножим обе части векторного равенства (1.10) скалярно на вектор скорости точки \mathbf{U} после удара

$$m\mathbf{U}^2 - m\mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{S}^N \mathbf{U}.$$

Так как наложенные связи идеальные и угол $\beta = \frac{\pi}{2}$, то скалярное произведение $\mathbf{S}^N \mathbf{U} = 0$.

Поэтому после преобразований из предыдущей формулы имеем

$$\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}\mathbf{U} = 0. \quad (1.14)$$

Определим изменение кинетической энергии при мгновенном наложении связи на движущуюся точку

$$\frac{m\mathbf{U}^2}{2} - \frac{m\mathbf{V}^2}{2} = \frac{m}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2). \quad (1.15)$$

Разность квадратов в формуле (1.15) можно преобразовать путем вычитания из нее удвоенного выражения (1.14). Далее вместо векторных величин можно использовать скаляры, учитывая что

$$|\mathbf{U}^2| = \mathbf{U}\mathbf{U} \cdot \cos 0 = \mathbf{U}^2, \text{ получим}$$

$$\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 = \mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 - 2\mathbf{U}^2 + 2\mathbf{V}\mathbf{U} = -(\mathbf{U}^2 - 2\mathbf{V}\mathbf{U} + \mathbf{V}^2) = -(\mathbf{U} - \mathbf{V})^2.$$

Тогда

$$\frac{m\mathbf{V}^2}{2} - \frac{m\mathbf{U}^2}{2} = \frac{m}{2} (\mathbf{V} - \mathbf{U})^2. \quad (1.16)$$

Полученный результат можно сформулировать так: *кинетическая энергия, потерянная точкой при мгновенном наложении на нее абсолютно неупругой связи, равна кинетической энергии точки, обусловленной потерянной скоростью.*

2-й случай: мгновенное снятие связей. Обе части равенства (1.10) умножаем скалярно на скорость V в начале удара, тогда получим

$$UV - V^2 = 0. \quad (1.17)$$

Теперь равно нулю скалярное произведение $S^N V = 0$, потому что в соответствии со связями находится перемещение точки не после удара, а до удара.

Разность квадратов скоростей приводится к виду

$$U^2 - V^2 = U^2 - V^2 + 2UV - 2V^2 = V^2 - 2VU + U^2 = (U - V)^2.$$

Тогда

$$\frac{mU^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}(U - V)^2. \quad (1.18)$$

Результат выражения (1.18) формулируется так: *кинетическая энергия, приобретенная точкой при мгновенном снятии связей, равна кинетической энергии точки, которая обусловлена приобретенной скоростью.*

1.2.4. Изменение кинетической энергии при ударном освобождении точки от связи

В качестве примера рассмотрим движение точки M по дуговой траектории в горизонтальной плоскости OXY с постоянной скоростью V .

В этом случае точка имеет связь в виде прямого стержня O_1M .

На точку M в горизонтальной плоскости OXY действует только одна центробежная сила N_y .

Предположим, что точка M снабжена отстреливающим устройством, которое в течение малого времени τ освобождает точку M от связей. При воспламенении взрывчатого вещества в камере выстреливающего устройства за короткое время τ давление рабочих газов и выстреливающая сила сначала повышаются до максимального значения, а затем уменьшаются и в момент отделения точки M от связи падают до нуля.

Пусть в данном случае известен ударный импульс выстреливающего устройства

$$S^N = F^* \tau.$$

Величина выстреливающего импульса многократно (например, в сотни раз) превышает импульс постоянной центробежной силы S_y^N . Поэтому величиной этого импульса можно пренебречь.

На точку M в момент отделения от связи действует только один удар-

ный импульс S^N (рис. 1.5), направленный вдоль стержня O_1M .

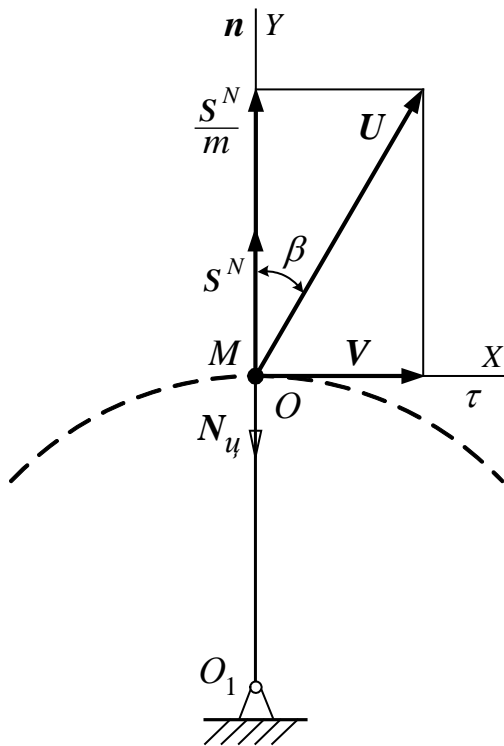


Рис. 1.5. Процесс ударного освобождения точки M от связи

Для рис. 1.5 запишем теорему об изменении количества движения материальной точки (1.10) в момент ударного освобождения от связи

$$mU - mV = S^N. \quad (1.19)$$

В данной задаче неизвестной величиной является вектор скорости точки M после освобождения ее от связи

$$U = V + \frac{S^N}{m}. \quad (1.20)$$

Вектор скорости точки после удара в формуле (1.20) *геометрически равен сумме векторов правой части уравнения.*

Для определения искомых величин: модуля вектора скорости U и угла β выполним аналитическое решение векторного уравнения (1.20).

Запишем проекции уравнения на оси X, Y

$$U \sin \beta = V; \quad U \cos \beta = \frac{S^N}{m}.$$

Откуда находим

$$\beta = \arctg \frac{mV}{S^N}; \quad U = \frac{V}{\sin \beta}.$$

Приобретенная кинетическая энергия точки, после освобождения ее от связи, равна

$$T - T_0 = \frac{m}{2}(U - V)^2.$$

1.3. Теорема об изменении количества движения и о движении центра масс при ударе

Пусть до момента удара точка M массы m движется под действием неударной силы F^* со скоростью V (рис. 1.6).

В момент удара под действием ударной силы F точка изменила свою скорость до значения U и продолжает двигаться по траектории MB . Удар точки M о препятствие характеризуется мгновенным изменением ее скоро-

сти от значения V до U по модулю и направлению.

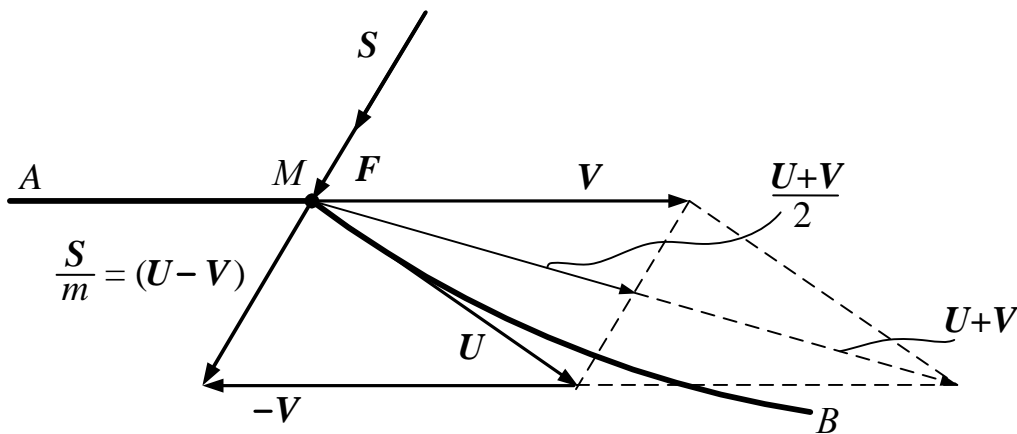


Рис. 1.6. Векторная диаграмма скоростей при взаимодействии свободной материальной точки M с ударным импульсом S

На рис. 1.6 показаны ударная сила F и ударный импульс S , который является аналогом ударной силы.

Применим к движущейся материальной точке теорему об изменении количества движения точки (1.10).

Пренебрегая импульсом неударной силы за время удара, запишем теорему об изменении количества движения точки при ударе для рис. 1.6

$$mU - mV = S. \quad (1.21)$$

Изменение вектора количества движения точки за время удара равно вектору ударного импульса, приложенному к точке.

Такая форма записи теоремы об изменении количества движения, известная Ньютону и Даламберу сохранилась до наших дней в учебной и технической литературе. Рассмотрим другие формы записи этой теоремы.

Из векторного уравнения (1.21) определим вектор скорости точки после удара

$$U = V + \frac{1}{m} S. \quad (1.22)$$

На рис. 1.6 представлен параллелограмм векторов скоростей, отражающий векторную сущность теоремы об изменении количества движения точки: *вектор скорости точки после удара равен диагонали параллелограмма, построенного на векторе скорости точки до удара и векторе скорости, который равен вектору ударного импульса, деленному на массу точки.*

Теперь определим из уравнения (1.21) разность векторов скоростей точки

$$U - V = \frac{1}{m} S. \quad (1.23)$$

Снова обращаемся к рис. 1.6, из которого видим следующий результат: *изменение вектора скорости точки при ударе равно отношению вектора ударного импульса к массе точки.*

Возможна третья форма записи теоремы об изменении количества движения точки при ударе в форме Даламбера

$$S + (-m\Delta V) = 0.$$

Этот результат означает: *импульс внешних ударных сил уравновешен изменением количества движения точки при ударе* (рис. 1.6).

Применим теорему (1.21) к механической системе, которую представим состоящей из N материальных точек.

Действующие силы в системе разделим на внешние и внутренние.

Для точек механической системы получим

$$m_K U_K - m_K V_K = S_K^e + S_K^i, \quad K = 1, 2, \dots, N,$$

где S_K^e и S_K^i – ударные импульсы внешних и внутренних сил.

Суммируя по всем точкам системы, имеем

$$\sum m_K U_K - \sum m_K V_K = \sum S_K^e + \sum S_K^i.$$

Обозначая количество движения системы после и до удара соответственно

$$Q = \sum m_K U_K; \quad Q_0 = \sum m_K V_K$$

и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных, $\sum S_K^i = 0$, получим

$$Q - Q_0 = \sum S_K^e. \quad (1.24)$$

Векторное равенство (1.24) выражает теорему об изменении количества движения механической системы при ударе: *изменение вектора количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов сил, приложенных к точкам системы за это же время.*

Выражая количество движения механической системы через массу системы и скорость центра масс, имеем

$$Q = MU_C; \quad Q_0 = MV_C;$$

где M – масса системы; V_C и U_C – скорости центра масс до и после удара.

С учетом принятых обозначений из (1.24) получаем теорему о движении центра масс системы при ударе в векторной форме:

$$M (\mathbf{U}_C - \mathbf{V}_C) = \sum \mathbf{S}_K^e . \quad (1.25)$$

Проецируя (1.25) на оси координат, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} M (U_{CX} - V_{CX}) &= \sum S_{KX}^e , \\ M (U_{CY} - V_{CY}) &= \sum S_{KY}^e , \\ M (U_{CZ} - V_{CZ}) &= \sum S_{KZ}^e . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Следствия теоремы о движении центра масс

1. Если сумма ударных импульсов внешних сил равна нулю: $\sum \mathbf{S}_K^e = 0$, то из (1.24) и (1.25) следует закон сохранения количества движения и скорости движения центра масс при ударе:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0; \quad \mathbf{U}_C = \mathbf{V}_C .$$

Количество движения механической системы и скорость центра масс не изменяются, если векторная сумма внешних ударных импульсов сил, приложенных к точкам, равна нулю.

2. Если имеется координатная ось, например OX , для которой сумма проекций внешних ударных импульсов на эту ось равна нулю, $\sum S_{KX}^e = 0$, то из (1.26) следует закон сохранения проекции количества движения и скорости движения центра масс при ударе:

$$Q_X = Q_{0X}; \quad U_{CX} = V_{CX} .$$

Вычисление ударных реакций и работы ударных сил представляет определенные трудности, поэтому вычислим работу силы, приложенной к точке при ударе, через кинетическую энергию:

$$T - T_0 = \frac{mU^2}{2} - \frac{mV^2}{2} ,$$

где T , T_0 – кинетическая энергия материальной точки соответственно после и до удара; $T - T_0$ – потеря кинетической энергии за время удара.

Можно записать очевидное равенство

$$T - T_0 = \frac{m}{2}(U^2 - V^2) = \frac{m}{2}(U - V) \cdot (U + V) .$$

Учитывая (1.21), можно записать

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}) .$$

Приравнявая изменение кинетической энергии точки $T - T_0$ работе A ,