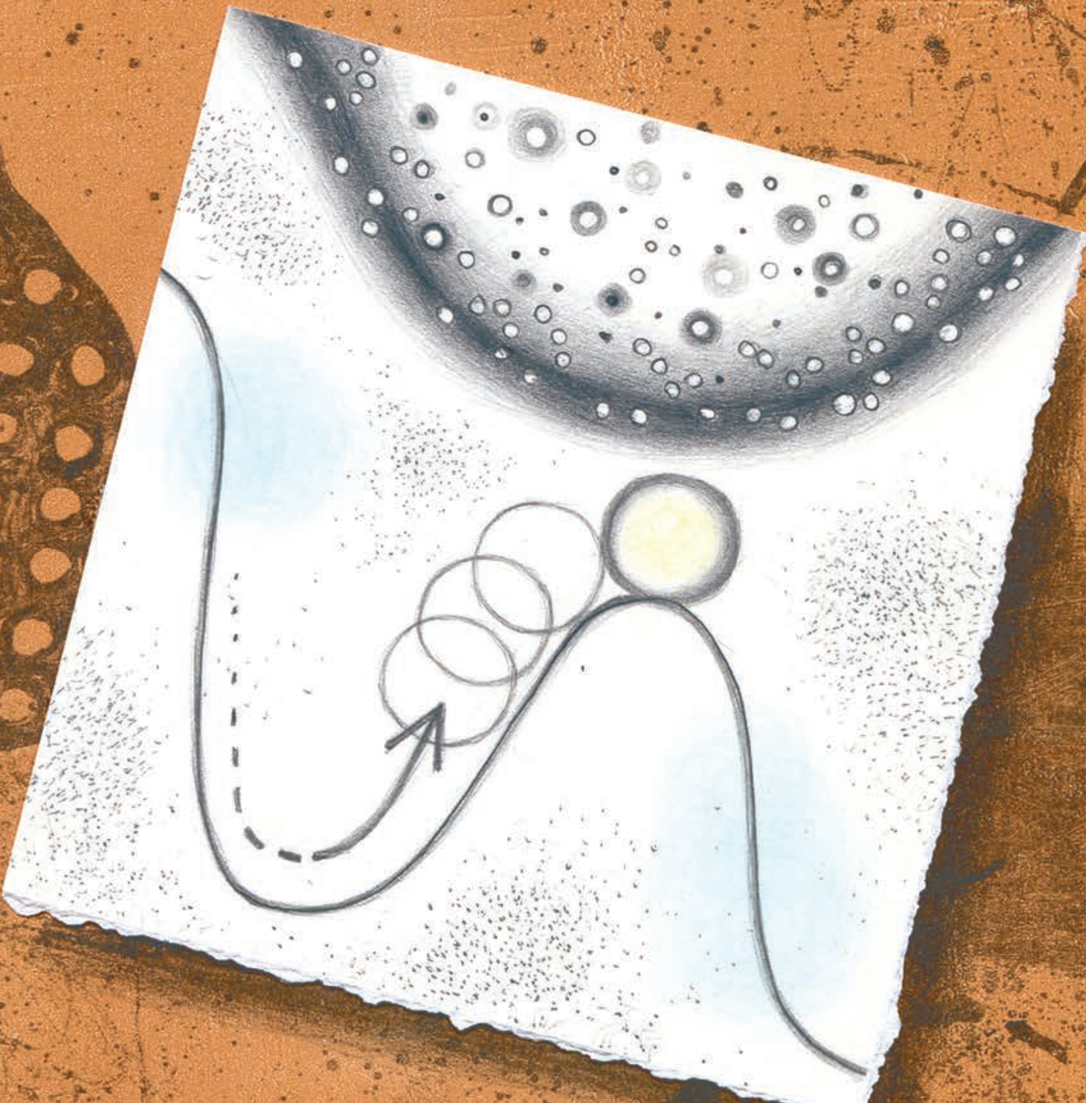
ФЕВРАЛЬ
ISSN 0130-2221
2017 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КВАНТ ФЕВРАЛЬ 2017 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Об одной «олимпиадной» задаче про графы. *А.Райгородский*

9 Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные (окончание). *С.Дворянинов, В.Соловьев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

14 Задачи М2450–М2453, Ф2457–Ф2460

16 Решения задач М2436–М2440, Ф2443–Ф2447

21 Какие бывают повороты. *С.Дворянинов, П.Кожевников*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

24 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

25 Термодинамика и мотоЦИКЛ. *А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

27 Принцип Ферма и необычное поведение света. *М.Ромашка, М.Ермилов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Инвенсоры

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

36 Задачи 16–19

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

37 Птолемеева ось треугольника. *К.Козеренко, П.Факанов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

41 Эксперименты с эффектом Магнуса. *А.Андреев, А.Панов, П.Панов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

45 Загадка целых углов. *К.Кноп*

ОЛИМПИАДЫ

52 XXXVIII Турнир городов

54 Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике

58 Ответы, указания, решения

Нам пишут (50, 51)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье «Космология Фридмана ...»*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

Об одной «олимпиадной» задаче про графы

А.РАЙГОРОДСКИЙ

1. Постановка задачи

На Московской олимпиаде 2016 года мне довелось поруководить составлением варианта 9-го класса. И даже сочинить для него 6-ю задачу. Подобное уже случалось, например, в 2010 году, и в результате появилась моя работа со Львом Шабановым, а также наша совместная статья в Кванте (см. [1]). Вот и теперь мне хочется рассказать о задаче и о том, с какими замечательными объектами «большой науки» она связана. Начнем с олимпиадной формулировки.

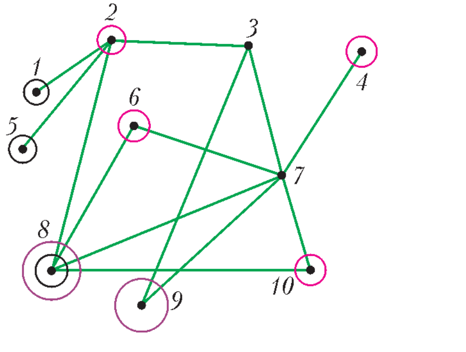
Задача. *В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые двое из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \le k \le \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.*

Задачу в результате решили два человека. Один из них доказал даже более сильную оценку – «хотя бы $4mn$ пар людей», а другой написал забавный комментарий: «Это похоже на кнезеровский граф». Про оценку первого 9-классника, получившего за нее спецприз, мы поговорим в пятом разделе, а кнезеровские графы обсудим прямо сейчас: комментарий второго 9-классника совершенно по делу!

Давайте сведем нашу задачу к задаче о графе. Для этого обозначим языки числами 1, 2, …, n, а лингвистов будем представлять тройками чисел – номерами их языков. Скажем, что вершина графа – это и есть тройка чисел (лингвист) и две вершины соединены ребром, если соответствующие тройки не пересекаются. Тогда выражение «могут поговорить без посредников» означает «нет ребра». Понятно, что m – это число вершин. А что же такое k как характеристика нашего графа?

Назовем множество вершин произвольного графа *независимым*, если никакие две вершины в этом множестве не соединены ребром. На рисунке приведены примеры независимых множеств. Количество вершин в любом из самых больших независимых множеств графа G называется *числом независимости* и обозначается $\alpha(G)$. Ясно, что в этих терминах k и есть число независимости нашего графа.

Наконец, пусть даны числа n и r. Назовем *кнезеровским* граф $KG_{n,r}$, у которого вершины – это все возмож-



Примеры независимости множеств: {1, 5, 8}, {2, 4, 6, 10}, {8, 9} ные r-элементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (всего вершин C_n^r), а ребра образуют все возможные пары непересекающихся вершин (легко понять, что всего ребер $\frac{1}{2}C_n^r C_{n-r}^r$).

Является ли кнезеровским наш граф? Не совсем. Наш граф – это подграф кнезеровского графа $KG_{n,3}$ на m вершинах. Осознав все это, приходим к следующей переформулировке задачи.

Задача′. *Пусть G – произвольный подграф графа $KG_{n,3}$ с m вершинами и числом независимости k, удовлетворяющим неравенствам $11n \le k \le \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда число ребер графа G не меньше mn.*

Сразу ясно, что $m \le C_n^3$ и что в то же время $m \ge 22n$, т.е., в частности, $n \ge 13$.

Отметим, что о кнезеровских графах мы и явно, и неявно уже не раз писали на страницах «Кванта». В статье [2] мы рассказали об удивительной связи топологии с задачей отыскания «хроматического числа» графа $KG_{n,r}$. А недавно вышла статья [3], в которой доказана замечательная теорема Эрдеша–Ко–Радо, утверждающая, что при $r \le \frac{n}{2}$ имеет место равенство $\alpha\left(KG_{n,r}\right) = C_{n-1}^{r-1}$. В той статье выражение «кнезеровский граф» не встречается, но суть остается неизменной. Кстати, оценка $\alpha\left(KG_{n,r}\right) \ge C_{n-1}^{r-1}$ очевидна: достаточно взять независимое множество, в котором все вершины содержат элемент 1. Иными словами, пафос теоремы Эрдеша–Ко–Радо в том, что бóльших независимых множеств не бывает.

Дальше мы построим наше изложение так: в разделе 2 расскажем о классическом «турановском» подходе к решению задач, подобных нашей, и обнаружим, что подход результата не дает (впрочем, в разделе 4 нам этот подход еще сослужит добрую службу); в разделе 3 мы приведем «каноническое» решение задачи, т.е. то, которое влечет в аккурат оценку величиной mn; в разделе 4 обсудим замечательный недавний результат об устойчивости числа независимости кнезеровского графа к случайным разрушениям ребер (это и будет кульминацией статьи, так как именно тогда станет ясно, зачем в науке нужна наша олимпиадная задача); в пятом разделе мы скажем несколько слов об улучшениях оценки в олимпиадной задаче и о том, как это отражается на большой науке; в разделе 6 поговорим про неожиданную связь нынешней темы с темой нашей же квантовской статьи [1] о другой олимпиадной задаче.

2. Неудачная попытка решить задачу

Пусть $G = (V, E)$ – наш подграф. Рассмотрим произвольное независимое множество $W \subset V$, имеющее максимальную мощность, т.е. $|W| = k$. Ясно, что каждая вершина из множества $V \setminus W$ имеет хотя бы одного соседа в W (иначе W не максимально). Таким образом, мы имеем не менее $m - k$ различных ребер в графе G. Удалим из графа G множество W вместе со всеми ребрами, концы которых принадлежат W. Получится новый граф G', у которого $m - k$ вершин и $\alpha(G') \le k$. Возьмем в G' максимальное по мощности независимое множество вершин W'. Снова понимаем, что каждая вершина из множества $V \setminus W \setminus W'$ соединена хотя бы с одной вершиной из W'. Имеем как минимум $m - 2k$ новых ребер. И так далее. В итоге получаем

$$|E| \ge (m-k) + (m-2k) + \\ + (m-3k) + \ldots + \left(m - [m/k]k\right),$$

где $[x]$ – это целая часть числа x. Просуммировав, имеем

$$|E| \geq m\left[\frac{m}{k}\right] - k\frac{\left[\frac{m}{k}\right]\left(\left[\frac{m}{k}\right]+1\right)}{2}.$$

Эту несложную идею придумал в 1941 году замечательный венгерский математик Пал Туран. Легко показать, что в общем случае оценку Турана улучшить нельзя (подумайте над примером!). Что же, однако, дает оценка в условиях нашей задачи?

Мы знаем, что $k \leq \frac{m}{2}$, откуда $[m/k] \geq \geq 2$. Следовательно, $m[m/k] \geq 2m$. Даже если бы в оценке Турана не было вычитаемого, то и тогда бы мы оказались крайне далеки от искомого неравенства $|E| \geq mn$.

Не удалась попытка! Ну ничего: неравенством Турана мы еще воспользуемся в разделе 4, а в разделе 3 мы приведем решение олимпиадной задачи. Разумеется, оно будет использовать специфику кнезеровского графа, которую турановское рассуждение никак не улавливает.

3. Решение задачи

Будем рассуждать так же, как в начале турановского доказательства: берем максимальное по мощности независимое множество $W \subset V$, $|W| = k$; по-прежнему каждая вершина из $V \setminus W$ имеет соседа в W. Пусть, например, вершина $A \in (V \setminus W)$ соединена ребром с вершиной $B \in W$. Это значит, что по определению кнезеровского графа $A \cap B = \varnothing$.

Покажем, что помимо B в W есть еще масса вершин, соединенных ребрами с A. Пусть, напротив, $C \in W$ и $(C, A) \notin E$ (вершина C не соединена ребром с вершиной A). Тогда, разумеется, $C \cap A \neq \varnothing$. Более того, поскольку W – независимое множество, имеем также $C \cap B \neq \varnothing$. Таким образом, вершина (тройка) C пересекается с обеими тройками A и B. Общее количество троек, которые в принципе могут обладать указанным свойством, заведомо не превосходит $9n$ (тремя способами выбирается общий элемент C и A, еще тремя способами выбирается общий элемент C и B, и, наконец, n – верхняя оценка числа способов добавить третий элемент к двум выбранным). Значит, количество вершин из W, которые соединены ребрами с A, никак не меньше $k - 9n$. Но $k \geq 11n$, откуда получаем, что у вершины A не менее $2n$ соседей в W.

Полученная оценка числа соседей верна для каждой вершины $A \in \in (V \setminus W)$. Следовательно,

$$|E| \geq 2n|V \setminus W| =$$

$$= 2n(m-k) \geq 2n \cdot \frac{m}{2} = mn.$$

Задача решена! Более того, нам хватило только одного – первого – шага турановского рассуждения.

Заметим, что параметры в задаче подобраны для красоты. Из приведенного рассуждения видно, что всегда верна оценка

$$|E| \geq (k - 9n)(m - k),$$

и этим результатом мы еще воспользуемся в разделе 4.

4. Случайные подграфы кнезеровских графов

Удивительный результат. Рассмотрим кнезеровский граф. Например, $KG_{n,3}$. Возьмем монетку, которая с вероятностью $1/2$ падает кверху решкой и с вероятностью $1/2$ – орлом. Подбросим монетку столько раз, сколько есть ребер в графе $KG_{n,3}$. Если при очередном бросании получается решка, проводим очередное ребро. Иначе – не проводим. Возникает «случайный подграф кнезеровского графа» $KG_{n,3,1/2}$. Мы не знаем, сколько в нем ребер: все зависит от случая. Однако интуитивно ясно, что в среднем половина ребер пропадет. Казалось бы, разгром значительный и велик шанс, что число независимости тоже существенно вырастет. Может же, скажем, «случайно» получиться граф, в котором и вовсе нет ребер: у него число независимости равно C_n^3 (число всех вершин), тогда как у исходного графа число независимости, согласно теореме Эрдеша–Ко–Радо, равнялось C_{n-1}^2. При этом

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6},$$

$$C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \sim \frac{n^2}{2},$$

т.е. разница огромная. Мы пишем «$f(n) \sim g(n)$» для функций f и g, принимающих ненулевые значения, если $f(n)/g(n) \to 1$ при $n \to \infty$.

Тем не менее, имеет место совершенно удивительный результат: с вероятностью, стремящейся к единице, при n, стремящемся к бесконечности, число независимости случайного подграфа кнезеровского графа почти не растет. Вот точная формулировка.

Теорема 1. *С вероятностью, стремящейся к единице, при n, стремящемся к бесконечности, число независимости случайного подграфа кнезеровского графа не превосходит величины $C_{n-1}^2(1+1/n)$. Более коротко это записывают так:*

$$\mathrm{P}\left(\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) \le C_{n-1}^2(1+1/n)\right) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Теорема 1 говорит, что если число независимости и растет при удалении примерно половины ребер, то не более чем в $1 + \frac{1}{n}$ раз. Это поразительно!

Именно для доказательства теоремы 1 и нужен результат олимпиадной задачи. В этом мы убедимся в следующем параграфе.

Доказательство удивительного результата. Положим

$$m = \left[C_{n-1}^2(1+1/n)\right],$$

где квадратные скобки по-прежнему обозначают целую часть числа. Выбор буквы m не случаен! Скоро мы увидим, что это то самое m, которое фигурирует в олимпиадной задаче.

Нам достаточно доказать, что

$$\mathrm{P}\left(\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) \le m-1\right) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\mathrm{P}\left(\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) > m-1\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Давайте скажем явно, что это за события, про которые мы хотим доказать, что их вероятности стремятся к 0. Событие «$\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) > m-1$» состоит в том, что найдется множество вершин кнезеровского графа, которое имеет мощность m и в котором пропали все ребра после того, как мы побросали монетку в процессе построения графа $KG_{n,3,1/2}$. Подчеркнем, что в исходном графе в любом множестве вершин мощности m ребра есть ввиду теоремы Эрдеша–Ко–Радо.

Перечислим все множества вершин кнезеровского графа мощности m. Их количество, которое мы обозначим N, равно $C_{C_n^3}^m$. Обозначим сами множества $A_1, \ldots, A_N$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, N\}$ рассмотрим событие B_i, состоящее в том, что в множестве A_i пропали все ребра. Тогда наше событие «$\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) > m-1$» можно описать так: «произошло хотя бы одно из событий B_i». А значит,

$$\mathrm{P}\left(\alpha\left(KG_{n,3,1/2}\right) > m-1\right) \le \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(B_i).$$

Чему же равна вероятность события B_i? Каждое ребро, находившееся в множестве A_i, пропадает с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если число ребер в A_i изначально (т.е. в исходном кнезеровском графе) равно некоторой величине e_i, то, разумеется, $\mathrm{P}(B_i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{e_i}$. Однако мы не знаем e_i!

Поскольку нам нужны верхние оценки вероятностей, величины e_i нужно оценивать снизу. Но в этом-то и состоит смысл турановских оценок и оценки из олимпиадной задачи.

Пусть G_i – подграф кнезеровского графа, порожденный множеством вершин A_i, т.е. множество его вершин и есть A_i, а ребер в нем ровно e_i. Обозначим k_i число независимости этого графа. Все, мы попали в условия олимпиадной задачи: есть подграф кнезеровского графа на m вершинах, есть его число независимости k_i, и нам нужно оценить снизу число его ребер e_i. Мы знаем, что если $11n \le k_i \le \frac{m}{2}$, то гораздо лучше применять олимпиадную оценку $e_i \ge mn$. Что ж, это подсказывает, как надо действовать.

Итак, разобьем сумму $\sum_{i=1}^{N}\mathrm{P}(B_i)$ на три части:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathrm{P}(B_i)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3 .$$

В первой части будут только те слагаемые, для которых $k_i<11n$, во второй – только те, для которых $11n \le k_i \le \frac{m}{2}$, в третьей – только те, для которых $\frac{m}{2}<k_i \le C_{n-1}^2$. Благодаря теореме Эрдеша–Ко–Радо мы знаем, что других слагаемых и не бывает.

Для слагаемых в Σ_1 применим оценку Турана:

$$e_i \ge m\left[\frac{m}{k_i}\right]-k_i\frac{\left[\frac{m}{k_i}\right]\left(\left[\frac{m}{k_i}\right]+1\right)}{2}.$$

Заметим, что

$$m=\left[C_{n-1}^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\sim\frac{n^2}{2},\ k_i<11n .$$

Значит, под знаками целых частей стоят стремящиеся к бесконечности функции, откуда

$$m\left[\frac{m}{k_i}\right]\sim\frac{m^2}{k_i},\ k_i\frac{\left[\frac{m}{k_i}\right]\left(\left[\frac{m}{k_i}\right]+1\right)}{2}\sim\frac{m^2}{2k_i},$$

т.е.

$$e_i \ge \varphi_1\cdot\frac{m^2}{2k_i}>\varphi_2\cdot\frac{n^4}{88n}=\varphi_2\cdot\frac{n^3}{88},$$

где φ_1, φ_2 – некоторые величины, стремящиеся к единице (запись $f\sim g$ равносильна записи $f=\varphi\cdot g$).

Для слагаемых в Σ_2 применим оценку из олимпиадной задачи:

$$e_i \ge mn \ge \varphi_3\cdot\frac{n^3}{2}.$$

Для слагаемых в Σ_3 применим обобщение оценки из олимпиадной задачи (см. конец раздела 3):

$$\begin{aligned}
e_i &\ge (k_i-9n)(m-k_i)\ge\\
&\ge\left(\frac{m}{2}-9n\right)\left(\left[C_{n-1}^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-k_i\right)\ge\\
&\ge\left(\frac{m}{2}-9n\right)\left(C_{n-1}^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-1-k_i\right)\ge\\
&\ge\left(\frac{m}{2}-9n\right)\left(C_{n-1}^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-1-C_{n-1}^2\right)=\\
&=\left(\frac{m}{2}-9n\right)\left(\frac{C_{n-1}^2}{n}-1\right)=\varphi_4\cdot\frac{n^2}{4}\cdot\frac{n}{2}=\\
&=\varphi_4\cdot\frac{n^3}{8}.
\end{aligned}$$

Видно, что во всех трех случаях получается оценка, кубическая по n и от i не зависящая. Поскольку нас интересует в итоге предел, то мы спокойно пренебрегаем маленькими значениями n и говорим, что всегда

$$e_i \ge \frac{n^3}{100}$$