А.Б. Золотов, П.А. Акимов,
В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ПРИЛОЖЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Издательство АСВ

А.Б. Золотов, П.А. Акимов,
В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ПРИЛОЖЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Издательство АСВ
Москва
2010

УДК 539.3:624.04

Рецензенты:
Почетный член РААСН, профессор, доктор технических наук *В.И. Сливкер*
профессор, доктор технических наук *С.Б. Косицын*

Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.
Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве: Научное издание. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 стр.

ISBN 978-5-93093-753-4

В книге описаны теоретические основы, алгоритмы и стратегия решений, которые реализуют дискретно-континуальный метод конечных элементов в задачах статического расчета и определения динамических характеристик строительных конструкций, зданий и сооружений. В основе дискретно-континуального метода конечных элементов лежит корректное построение точных аналитических решений многоточечных краевых задач строительной механики. Разработка метода связана с важнейшей и актуальной целью построения универсальных программных комплексов «промышленного типа» для получения достоверных аналитических решений, гарантирующих уточненный характер проводимых расчетов, необходимый для обеспечения техногенной безопасности строительных объектов мегаполиса.

The book is devoted to contemporary so-called discrete-continual finite element method of structural analysis.

ISBN 978-5-93093-753-4

Научное издание

Золотов Александр Борисович
Акимов Павел Алексеевич
Сидоров Владимир Николаевич
Мозгалева Марина Леонидовна

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИЛОЖЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Компьютерный набор и верстка: *П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева*
Редактор: В.Ш. Мерзлякова. Дизайн обложки: Н.С. Романова

Лицензия ЛР №0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 26.05.10. Формат 70x100/16
Бумага офс. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. 21,0 п.л. Тираж 500 экз. Заказ №____

ООО «Издательство АСВ», 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, отдел реализации – оф. 511
тел., факс: (499) 183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/

Строительные конструкции, здания и сооружения, в которых имеется постоянство или регулярность физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений имеют массовое распространение. Это связано, в частности, с тем, что многие такие объекты являются типовыми и технологичными в производстве. Характерными примерами являются балки, балки-стенки, тонкостенные стрежни, полосы, ленточные фундаменты, плиты, пластины, оболочки, высотные и протяженные здания и комплексы, трубопроводы, плотины, рельсы, резервуары и т.д.

Современные мощные программные комплексы, реализующие известные численные методы, в частности метод конечных элементов, разумеется, позволяют проводить всестороннее численное моделирование вышеперечисленных объектов. Тем не менее, для оценки точности и сходимости численных методов, для контроля и верификации используемого программного обеспечения, а также для установления важных качественных особенностей работы строительных конструкций, зданий и сооружений, очень важно уметь корректно строить точные аналитические решения соответствующих задач. В частности, весьма ценным представляется аналитическое определение расчетных факторов (перемещений, деформаций, напряжений и т.д.) вдоль направления постоянства физико-геометрических характеристик объекта (так называемого «основного направления»). Разработанные А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым дискретно-континуальные методы успешно решили данную проблему.

Семейство разработанных дискретно-континуальных методов включает дискретно-континуальный метод конечных элементов, дискретно-континуальный метод граничных элементов и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод. Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по выделяемому направлению постоянства характеристик (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного рода с обоснованно контролируемой степенью точности. Под аналитическим решением здесь понимается наличие явной формулы вычисления напряженно-деформированного состояния объекта в произвольной точке сечения (так, например, решение в рядах с этих позиций не рассматривается как аналитическое).

Изложение теоретических основ и различных вопросов практической реализации дискретно-континуальных методов по мере их развития приводится в предыдущих монографиях авторов:

1. Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.

2. Золотов А.Б., Акимов П.А. Практические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.

3. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.

4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2010. – 336 с.

Эта книга посвящена исключительно дискретно-континуальному методу конечных элементов, являющемуся, по оценкам авторов, наиболее эффективным из всего семейства дискретно-континуальных методов с точки зрения практических приложений.

Дискретно-континуальный метод конечных элементов относится к классу численно-аналитических или, следуя терминологии О. Зенкевича, полуаналитических методов. В последние десятилетия эти методы не получали того внимания, которого заслуживали, особенно в области строительства, где властвовал метод конечных элементов. С другой стороны, нельзя не отметить, что это направление в строительной механике имеет давнюю и богатую историю (метод Л.В. Канторовича, метод В.З. Власова, метод прямых, метод Микеладзе-Ланцоша, метод конечных полос, метод конечных слоев, метод конечных призм и т.д.). Преимущества сочетания качественных свойств замкнутых решений и общности численных методов, безусловно, отмечались и раньше, но, несмотря на былую популярность подобных подходов и участие в исследованиях ряда крупных ученых, многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия необходимого математического аппарата или высокопроизводительной вычислительной техники, либо в той или иной мере не учитывалась специфика возникающих проблем и необходимость последующей компьютерной реализации. В начале XIX века появились объективные возможности для дальнейшей разработки, исследования и развития численно-аналитических методов на качественно ином уровне.

Подобно многим традиционным аналогам, дискретно-континуальный метод конечных элементов, предусматривающий понижение мерности задачи, сводится к решению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Данные системы допускают точное аналитическое решение, и в этом смысле всегда естественна была цель его получения. Однако вплоть до недавнего времени не было предложено универсальных методов построения аналитического решения в устойчивой форме, не зависящей от условий конкретной задачи (длина объекта, жесткостные характеристики, граничные условия, характер нагружения, большое количество дифференциальных уравнений и пр.). Причины такого отсутствия, связанные с определенными математическими сложностями, и сравнения разработанного метода с известными альтернативными подходами обсуждаются в монографии. В публикациях ее авторов впервые были предложены корректные методы получения точных аналитических решений, практически свободные от всех вычислительных недостатков.

Материал книги расположен следующим образом.

В *Главе 1* рассматриваются и анализируются традиционные численно-аналитические методы расчета строительных конструкций и методы аналитического решения краевых задач строительной механики.

В *Главе 2* сформулированы основополагающие операторные и вариационные постановки краевых задач расчета строительных конструкций в рамках метода расширенной области, предложенного А.Б. Золотовым.

Глава 3 посвящена описанию универсальных корректных методов точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики.

В *Главе 4* приведены операторные постановки задач статического расчета конструкций с выделением основного направления.

В *Главе 5* изложены некоторые важные вопросы определения собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов краевых задач статического расчета конструкций с выделенным основным направлением.

Глава 6 призвана разъяснить идею и раскрыть математические особенности реализации дискретно-континуального метода конечных элементов.

В *Главе 7* рассматриваются вопросы численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

В *Главе 8* содержатся операторные постановки проблем определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета конструкций с выделением основного направления.

Наконец, в *Главе 9*, описано определение собственных частот и форм колебаний строительных конструкций, зданий и сооружений с использованием дискретно-континуального метода конечных элементов.

Мы включили в монографию пять приложений.

Приложение 1 посвящено методу базисных вариаций для численного решения краевых задач расчета конструкций. Этот метод широко используется на этапе численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов.

В *Приложении 2* и *Приложении 3* описаны универсальные методы построения матриц жесткости конечных элементов при решении одномерных задач строительной механики для скалярного и векторного случая соответственно. Эти методы применяются при переходах от континуальных к дискретно-континуальным постановкам ряда рассмотренных в книге задач.

В *Приложении 4* изложен аналитический метод вычисления геометрических характеристик поперечных сечений элементов конструкций.

В *Приложении 5* обсуждается проблема оценки числа вещественных собственных значений в задаче об установившихся колебаниях упругого полуцилиндра. Эта близкая к тематике настоящей книги проблема традиционно рассматривалась в работах многих известных ученых-математиков.

Заметим, что все перечисленные приложения носят вспомогательно-справочный характер – их результаты использовались при разработке, исследовании и развитии дискретно-континуального метода конечных элементов.

Настоящая монография отражает результаты исследований последних лет, выполненных на кафедре информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета (МГСУ) в рамках научно-педагогической школы «Численное и экспериментальное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства», основателем и руководителем которой являлся Почетный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), Почетный работник высшего образования России, Почетный профессор МГСУ, профессор, доктор технических наук Александр Борисович Золотов (1937 – 2008).

Авторы выражают благодарность профессору А.М. Белостоцкому, доценту Т.Б. Кайтукову, старшему преподавателю С.Б. Пеньковому, ассистенту О.А. Козыреву (все – МГСУ) и доценту А.В. Ларионову (SIMULIA, USA), в соавторстве с которыми были выполнены отдельные исследования, нашедшие отражение в этой монографии.

Авторы признательны за поддержку, полученную при подготовке монографии от ряда коллег и учеников. При изложении материала книги учитывались высказанные в разное время замечания и пожелания профессоров А.А. Амосова, В.И. Андреева, Е.Б. Кореневой, С.В. Кузнецова, А.Н. Леонтьева, В.Л. Мондруса, Н.С. Никитиной, А.Б. Павлова, В.Н. Савостьянова, С.И. Трушина, В.А. Харитонова, В.И. Ширинского (все – МГСУ), Н.И. Карпенко (Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН (НИИСФ РААСН)), Л.С. Ляховича (Томский государственный архитектурно-строительный университет), В.И. Травуша (Экспериментального научно-проектного института (ЭНПИ)), А.В. Александрова, С.Б. Косицына, Н.Н. Шапошникова (все – Московский государственный университет путей сообщения), В.И. Сливкера (ЗАО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург»), С.М. Алейникова (Воронежский государственный архитектурно-строительный университет), В.И. Ванько (Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана), А.Н. Супруна (Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет), Н.П. Осмоловского и А.А. Шкаликова (оба – Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова).

Список литературных источников, приведенный в конце книги, ни в коей мере не может претендовать на полноту.

Авторы благодарны рецензентам книги, профессорам В.И. Сливкеру и С.Б. Косицыну, за проявленный интерес и доброе отношение к работе.

Большую помощь авторам оказала генеральный директор издательства Международной ассоциации строительных высших учебных заведений (Издательство АСВ), профессор Н.С. Никитина. Также благодарим сотрудников издательства АСВ за содействие в подготовке книги к изданию.

Авторы будут признательны за любые высказанные мнения и замечания по содержанию и изданию книги.

Исследования частично проводились в рамках следующих работ:

1. Грант МД-4641.2009.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых-докторов наук «Разработка и развитие корректных дискретно-континуальных методов статического и динамического расчета строительных конструкций, зданий и сооружений на основе построения точных аналитических решений многоточечных краевых задач строительной механики» на 2009-2010 гг.;

2. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.;

3. Грант №09-08-13697 Российского фонда фундаментальных исследований «Разработка, исследование и развитие корректных численно-аналитических методов расчета строительных конструкций, зданий и сооружений регулярной структуры» на 2009-2010 гг.;

4. Проект «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемый по Аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (регистрационный номер: 2.1.2/6414).

Акимов Павел Алексеевич
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна
e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ИСТОКИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Часть 1. ТРАДИЦИОННЫЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Разработанный авторами дискретно-континуальный метод конечных элементов, разумеется, имеет немало традиционных аналогов. Здесь следует в первую очередь перечислить такие численно-аналитические методы расчета строительных конструкций, как метод Л.В. Канторовича, метод В.З. Власова, метод прямых, метод Микеладзе-Ланцоша, метод конечных полос, метод конечных слоев и метод конечных призм, с рассмотрения которых и начнем первую главу настоящей книги.

§ 1.1. Методы Л.В. Канторовича и В.З. Власова

1.1.1. Метод Л.В. Канторовича.

Метод Л.В. Канторовича был предложен академиком Л.В. Канторовичем [113-118] в 1933 году и представляет собой развитие метода Ритца [191] для функционалов от функций нескольких переменных. Метод Канторовича состоит в следующем.

Пусть, например, имеем вариационную задачу, которая сводится к определению искомой функции $w(x_1, x_2)$ двух переменных x_1, x_2 из условия стационарности некоторого функционала $\Phi[w(x_1, x_2)]$.

В отличие от метода Ритца в методе Л.В. Канторовича в качестве коэффициентов разложения искомой функции $w(x_1, x_2)$ по координатным базисным функциям берутся не неизвестные константы, а неизвестные функции от некоторой одной переменной. Например, для двумерной области с границей S, показанной на рис. 1.1.1, функция $w(x_1, x_2)$ представляется в форме

$$w(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x_1, x_2) f_k(x_1) \tag{1.1.1}$$

и, в частности,

$$w(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x_2) f_k(x_1) \,. \tag{1.1.2}$$

Функции $\varphi_k(x_1, x_2)$ выбираются так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям на контуре S, кроме, быть может, прямых $x_1 = a$ и $x_1 = b$.

Подставляя выражение (1.1.1) в функционал $\Phi[w(x_1, x_2)]$ и выполняя операции интегрирования по x_2, переходим к задаче определения неизвестных функций $f_k(x_1)$, $k = 1, 2, ..., N$ из условия стационарности полученного упрощенного функционала $\Phi[f_1(x_1), f_2(x_1), ..., f_N(x_1), x_1]$.

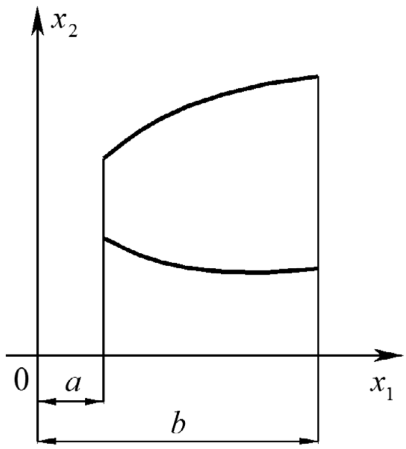

Рис. 1.1.1. Вид двумерной области при использовании метода Л.В. Канторовича.

Таким образом, краевая задача относительно функции $w(x_1, x_2)$ двух переменных заменяется краевой задачей относительно неизвестных функций $f_k(x_1),\ k = 1, 2, ..., N$ одной переменной.

Граничные условия для функций $f_k(x_1),\ k = 1, 2, ..., N$ вытекают из граничных условий для функции $w(x_1, x_2)$ на сторонах контура $x_1 = a$ и $x_1 = b$.

Решая сформированную в результате одномерную краевую задачу с помощью соответствующих описанных в [191] методов, получаем значения функций $f_k(x_1),\ k = 1, 2, ..., N$, а следовательно, и приближенное выражение для $w(x_1, x_2)$.

Один из недостатков метода Л.В. Канторовича состоит в том, что решение получаемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений ведется, как правило, либо некорректными методами, зачастую не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, методы, связанные с повторным разложением в ряд, и т.д.). Вместе с тем проблема решения «разрешающей» системы обыкновенных дифференциальных уравнений является, по сути, центральной в данном подходе. Другим «подводным камнем» метода является то обстоятельство, что далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать базисные функции, например, в разложении (1.1.2) так, чтобы они удовлетворяли некоторым заданным граничным условиям на контуре S.

1.1.2. Метод В.З. Власова.

Метод В.З. Власова, предложенный в 1931 году, широко использовался в работах В.З. Власова. В частности, в [53-55] приведены многочисленные примеры его применения в расчете оболочечных конструкций. Кратко опишем суть метода.

Пусть имеется краевая задача, описываемая внутри области дифференциальным уравнением с частными производными относительно функции двух переменных

$$L^{(2m)}[w(x_1,x_2)] = f(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in V \qquad (1.1.3)$$

и граничными условиями на контуре вида (см. рис. 1.1.1)

$$R_i[w(x_1,x_2)] = g_i(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in S\ . \qquad (1.1.4)$$

Функцию $w(x_1,x_2)$ можно искать в форме (1.1.1) или (1.1.2), при этом предполагается, что принимаемое выражение для функции $w(x_1,x_2)$ удовлетворяет всем граничным условиям на контуре S, за исключением, быть может, прямых $x_1 = a$ и $x_1 = b$ (рис. 1.1.1).

Внося (1.1.1) в уравнение (1.1.3), для ситуации, когда (1.1.1) будет решением, получим тождественное равенство нулю следующего выражения:

$$L^{(2m)}\left[\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x_1,x_2)f_k(x_1)\right] - f(x_1,x_2) = 0, \quad (x_1,x_2) \in V\ . \qquad (1.1.5)$$

В силу того, что тождественный ноль ортогонален любой системе функций, получаем условие

$$\int\left\{L^{(2m)}\left[\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x_1,x_2)f_k(x_1)\right] - f(x_1,x_2)\right\}\varphi_i(x_1,x_2)dx_2 = 0, \quad i = 1, 2, ..., N\ , \qquad (1.1.6)$$

которое после выполнения всех необходимых операций интегрирования превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_k(x_1),\ k = 1, 2, ..., N$. Граничные условия для функций $f_k(x_1)$ получаются из граничных условий (1.1.4).

Нетрудно уловить в методе В.З. Власова идейную общность с методом Бубнова-Галеркина [191]. Отличие состоит лишь в форме задания приближенного выражения для искомой функции нескольких переменных: в методе Бубнова-Галеркина в качестве коэффициентов при координатных функциях берутся неизвестные константы, для определения которых составляется система линейных алгебраических уравнений, тогда как в методе В.З. Власова роль коэффициентов играют неизвестные функции по одной из независимых переменных. Эти функции определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С механической точки зрения этому вариационному методу соответствует расчетная модель конструкции, представляющая собой систему, обладающая конечным числом степеней свободы в направлении одной координаты и бесконечно большим по другой координате. Такие системы В.З. Власовым были названы *дискретно-континуальными* [54], а сам метод зачастую называют *дискретно-континуальным методом Власова* [246].

Недостатки метода В.З. Власова практически совпадают с теми, что были указаны в предыдущем пункте для метода Л.В. Канторовича. Кроме того, необходимо отметить еще одно важное обстоятельство, опять-таки общее для методов Л.В. Канторовича и В.З. Власова: выбор базисных функций в обоих методах был рассчитан, как правило, на ручной счет и не предполагал никакой дискретизации.

1.1.3. Понятие о методе Канторовича-Власова.

Итак, в соответствии с изложенным выше, метод Л.В. Канторовича и метод В.З. Власова идейно очень близки. В этой связи зачастую между ними и вовсе не делается различий, а соответствующий обобщенный метод именуется методом Канторовича-Власова [10,11,122,138,176]. Популярная в настоящее время конечноэлементная форма метода Канторовича-Власова известна под названием метода конечных полос.

1.1.4. Библиография по методам Л.В. Канторовича и В.З. Власова.

Методы Канторовича-Власова излагаются в современных курсах строительной механики и теории упругости [6,53-55,107,110,174,185,191,218], получают развитие в научных трудах математиков и механиков. Здесь, в частности, можно указать работы А.В. Акаева [2], А.В. Александрова [6], В.В. Амельченко [10-11], Е.Ф. Бурмистрова [10], А.И. Вайндинер [39], А.К. Галиньш [59], А.Ф. Дащенко [176], А.М. Джаралла [74], Г.Н. Дульнева [2], Н.В. Егурнова [80], В.Н. Завьялова, И.А. Ивановского [108], В.В. Карпова [119], В.Ф. Кириченко [122], М.Г. Когана [123-124], Л.В. Коломиец [176], А.В. Крысько [80,137], В.А. Крысько [10-11,138], А.Н. Куцемако [138], Н.Н. Леонтьева [55,147-151], А.Е. Майданова [247], М.О. Моисеенко [169], В.Ф. Оробей [175-176], В.В. Петрова [184], А. Рухул [201], Р.С. Сабирова [59], П.В. Селяева [207], П.В. Фрумкина [118], А.М. Черняка, Н.Н. Шапошникова [246-247], J. Awrejcewicz [274], M.S. Cheung [365], S.F. Ng [365], J. Zhao [365].

§ 1.2. Метод прямых и метод Микеладзе-Ланцоша

1.2.1. Понятие о методе прямых.

Метод прямых – весьма эффективный метод понижения размерности исходных краевых задач. В методе прямых производные по одной из независимых переменных в двумерных задачах и по двум независимым переменным в трехмерных задачах заменяются приближенными разностными выражениями [90,100,232]. Использование такой процедуры обеспечивает замену краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Самый серьезный недостаток метода прямых заключается именно в предлагаемых методах решения полученной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [191]. Дело в том, что соответствующие методы решения являются практически нереализуемыми при достаточно большом числе точек (узлов) разбиения, а при небольшом числе, в свою очередь, очевидно, могут приводить к неудовлетворительным результатам. Важным параметром является также и протяженность рассматриваемой конструкции. Так, например, если она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Осложняющим фактором на стадии построения решения краевой задачи выступает и наличие жордановых клеток неединичного порядка в жордановом разложении матрицы коэффициентов системы. Разумеется, данное обстоятельство можно преодолеть путем возмущения матрицы, но при этом возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Развитие метода прямых связано с именами следующих специалистов:

А.М. Александров [7-8], А.А. Атавин [17], Р.Д. Бачелис [22-23], И.С. Березин [31], А.М. Блохин [33], Б.М. Будак, И.В. Буледза [37-38], Ф.П. Васильев [42], Л.П. Винокуров [44], А.Д. Горбунов, К.И. Грицевичюс, Б.П. Демидович [72], Н.П. Жидков [31], А.И. Задорин [81], А.С. Ибрагимова [33], Н.Н. Калиткин, Л.И. Камынин, М.М. Карчевский [120], И.Ю. Король [38], Е.Х. Костюкович [129], Н.Ю. Красников [33], Н.А. Кудряшов [139], Г.Б. Кузнецов [158], С.С. Кучеренко [139], О.А. Лисковец [153], В.П. Матвеенко [158], В.Н. Медведько, В.Г. Меламед [22-23,161], С.Г. Михлин [164-167], Е.А. Одинец [256], А.С. Омуралиев, В.И. Рыбасов, В.И. Рындюк, А.А. Самарский [204], С.Н. Скляр [212], М.Г. Слободянский [214-215], А.Н. Станкевич [219], Ю.И. Сыцько [139], В.В. Тарасевич [17], А.П. Филин [233], Л.М. Чеботарева [240], А.Д. Чернышев, В.Т. Шамин [245], И.Н. Шардаков [158], Л.Т. Шкелев [256], Д.Б. Шляйфер [23], R. Donat [327], D.A. Hartree [311], A. Marquina [327], V. Martinez [327], G. Torres [358], C. Turner [358] и др.

1.2.2. Понятие о методе Микеладзе-Ланцоша.

Метод Микеладзе-Ланцоша, предложенный в работах Ш.Е. Микеладзе [162-163], предназначен для решения линейных и нелинейных краевых задач строительной механики, причем как одномерных, так и многомерных. Идея метода состоит в использовании квадратурных формул, позволяющих выразить определенный интеграл через значения подынтегральной функции и ее производных в конечных точках интервала интегрирования. В этой связи, разумеется, весьма существенен выбор квадратурной формулы. В расчетной практике, в частности, нашла применение формула, предложенная К. Ланцошем [144] и позволившая решить ряд актуальных задач об изгибе и колебаниях пластин и оболочек. Данная формула имеет вид

$$\int_{x_k}^{x_k+1} y(x)dx \approx \frac{1}{D_0^\mu}\sum_{j=1}^{\mu-1} D_{j+1}^\mu \Delta_k^{j+1}[y^{(j)}(x_k)-(-1)^j y^{(j)}(x_{k+q})], \qquad (1.2.1)$$

где μ – число членов разложения; $y^{(j)}(x)$ – j-я производная подынтегральной функции.

$$\Delta_k = x_{k+1}-x_k; \quad D_{j+1}^\mu = \frac{(2\mu-j-1)!}{(\mu-j-1)!(j+1)!}. \qquad (1.2.2)$$

Использование метода Микеладзе-Ланцоша для двумерных краевых задач (например, плоская задача теории упругости, изгиб пластин, вынужденные поперечные колебания балок) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которой используются традиционные методы, недостатки которых рассматриваются во второй части настоящей главы.

§ 1.3. Метод конечных полос, метод конечных слоев, метод конечных призм

1.3.1. Понятие о методе конечных полос.

Метод конечных полос (МКП) – мощный и эффективный современный метод расчета строительных конструкций. Главным образом этот метод используется для расчетов на статику (в упругих постановках), динамику и устойчивость строительных конструкций с постоянными физико-геометрическими характеристиками по одному из направлений (как правило, продольному) и простыми (однотипными) граничными условиями на торцах (например, шарнирно-опертые поперечные сечения) [272,277,278].

Метод конечных полос сочетает идею аналитического метода Канторовича – Власова и технику метода конечных элементов (МКЭ). Используется так называемая дискретно-континуальная модель объекта. Так, например, двумерная конструкция разбивается продольными сечениями (линейными узлами или так называемыми узловыми линиями) и, таким образом, дискретизируется только лишь в одном, поперечном, направлении. В результате получается ансамбль прямолинейных или криволинейных конечных полос. Основные неизвестные (далее основные узловые неизвестные) в методе конечных полос рассматриваются относительно узловых линий.

1.3.2. Варианты метода конечных полос.

В зависимости от выбранного характера этих узловых неизвестных различают несколько вариантов метода конечных полос.

«Жесткостной» вариант метода конечных полос [300] предполагает, что в качестве основных принимаются и далее непосредственно определяются кинематические неизвестные (перемещения, углы поворота и т.д.). Это достаточно хорошо разработанный и исследованный вариант метода, весьма эффективный и широко применяемый на практике.

«Смешанный», а также существующие *«податливостный»* и *«гибридный» варианты метода конечных полос* развиты и изучены в гораздо меньшей степени и используются на практике достаточно редко [300]. Так, например, *«смешанный» вариант метода конечных полос* предусматривает, что в качестве узловых неизвестных могут также фигурировать деформации, кривизны и т.д. В ряде сложных случаев такой подход приводит к минимальному неизменному числу узловых степеней свободы.

В свете отмеченного выше остановимся подробнее на первом варианте метода конечных полос (в перемещениях). Пусть, для определенности, рассматривается двумерная конструкция, физико-геометрические характеристики которой не меняются вдоль координаты x_2 («продольное» направление).

Основные узловые неизвестные $R(x_2)$, так же как и приложенные внешние нагрузки, разлагаются в так называемые обобщенные ряды вида

$$R(x_2) = \sum_{k=1}^{N} R_k X_k(x_2) , \qquad (1.3.1)$$

где $X_k(x_2),\ k = 1, 2, ..., N$ – координатные функции в «продольном» направлении; $R_k,\ k = 1, 2, ..., N$ – соответствующие постоянные коэффициенты разложения аппроксимируемых величин.

В свою очередь, перемещения, равно как и внутренние силы, во внутренних точках конечной полосы, а также приложенные внешние нагрузки разлагаются в обобщенные ряды вида

$$S(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} Y_k(x_1) X_k(x_2)\,, \qquad (1.3.2)$$

где $Y_k(x_1),\ k = 1, 2, ..., N$ – функции координаты, отвечающей «поперечному» направлению полосы.

Функциональные ряды $X_k(x_2),\ k = 1, 2, ..., N$, как правило, непрерывно дифференцируемы или разрывны, при этом система функций $X_k(x_2),\ k = 1, 2, ..., N$ линейно независима относительно переменной x_2 и полна. Элементы этой системы (базисные функции) выбираются таким образом, чтобы априори удовлетворить граничным условиям в соответствующих поперечных сечениях конструкции. В зависимости от выбора «продольных» и «поперечных» базисных функций для перемещений выделяют три основные разработанные версии «жесткостного» варианта метода конечных полос: полуаналитический, аналитический и численный [300].

1.3.3. Краткая характеристика и анализ полуаналитического метода конечных полос.

В качестве базисных функций в «продольном» направлении в полуаналитическом МКП используются: тригонометрические ряды (особенно для случаев шарнирного закрепления граничных поперечных сечений), балочные собственные функции в задачах устойчивости и динамики [288], полиномиальные функции совместно с тригонометрическими функциями или собственными функциями в задачах динамики [314], ортогональные системы полиномов и иные аналитические функции. Перечисленные базисные функции непрерывно дифференцируемы. Тем не менее, для ряда проблем, связанных с расчетом конструкций, работающих на изгиб, характеристики (свойства, нагрузки, опоры, связи и т.д.) которых резко меняются, вторые или третьи производные таких рядов являются разрывными.

В качестве базисных функций в «поперечном» направлении в полуаналитическом МКП используются: простые полиномы или непосредственно интерполяционные полиномы (традиционные функции формы в «поперечном» направлении) разного рода (степенные полиномы, полиномы Лагранжа, полиномы Эрмита) и разного порядка (первого, третьего, пятого и др.) [300]. Эти базисные функции удовлетворяют условиям совместности перемещений вдоль узловых линий, разделяющих соседние конечные полосы, и делают возможным постоянство деформаций полосы по аналогии со стандартным методом конечных элементов [288].

В полуаналитическом МКП вводится понятие конечной полосы низкого порядка аппроксимации [288]. Применение конечных полос данного типа приводит к удовлетворительным результатам относительно определяемых перемещений. В то же время имеет место плохая согласованность напряжений (и соответственно внутренних усилий) на границах, соединяющих две соседние конечные полосы. В большинстве случаев при использовании конечных полос низкого порядка аппроксимации в рамках МКП получается более «колеблющееся» решение, чем имеет место в реальности. Данный факт объясняется известным эффектом Гиббса, возникающим при суммировании рядов Фурье.

Для повышения точности и сходимости получаемых результатов в «продольном» направлении можно, разумеется, увеличить число учитываемых членов ряда, что приведет к необходимости сгущения сетки в «поперечном» направлении, или использовать так называемые конечные высокого порядка точности. Эти полосы обладают большим числом степеней свободы и обеспечивают хорошую согласованность для напряжений (и внутренних усилий) вдоль узловых линий. В ряде конечных полос высокого порядка точности вводятся специальные дополнительные внутренние узловые линии (производится дополнительное разделение полосы на «подполосы»). В этом случае получаются полосы, более адаптированные для решения задач со скачкообразно меняющимися жесткостными характеристиками в «поперечном» направлении. Вводимые при этом дополнительные неизвестные перемещения вдоль внутренних узловых линий исключаются в рамках полуаналитического МКП с помощью процедуры статической конденсации [288].

Расчет каждой полосы ведется исключительно в перемещениях. Матрицы жесткости, масс и внешних нагрузок для полосы формируются с использованием принципа минимума общей потенциальной энергии или принципа возможных перемещений. Указанные матрицы получаются в замкнутой аналитической форме для прямолинейных изотропных и ортотропных полос [288].

Вообще, полуаналитический МКП близок к МКЭ. Современные версии ПМКП в напряжениях и гибридные подходы отсутствуют. Приложения полуаналитического МКП достаточно хорошо разработаны и применяются для расчета широкого класса конструкций. Это наиболее общая, универсальная и мощная версия МКП.

1.3.4. Краткая характеристика и анализ аналитического метода конечных полос.

Вплоть до настоящего времени аналитический МКП применяется для расчета относительно небольшого класса конструкций с простыми типами граничных условий в «поперечных» сечениях. Так, в случаях шарнирного закрепления в «продольном» направлении используются тригонометрические ряды, а в качестве базисных функций в «поперечном» направлении используются точные решения соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую задачу [301-303,314]. Эти решения содержат гиперболические функции и удовлетворяют граничным условиям, задаваемым в соответствующих «поперечных» сечениях. Они также обеспечивают полную (континуальную) совместность перемещений и напряжений (внутренних усилий) на границах, разделяющих соседние полосы.

Точность и сходимость решений, получаемых по аналитическому МКП, в «продольном» направлении может быть повышена путем увеличения числа учитываемых членов ряда, при этом никаких шагов для повышения точности и сходимости решения в «поперечном» направлении предпринимать не требуется. Густота сетки в данном случае на них никак не влияет. В поперечном направлении не требуется также вводить и внутренних дополнительных узловых линий, число степеней свободы здесь соответствует тому, что имеет место при использовании конечных полос низкого порядка аппроксимации в полуаналитическом МКП.

Решение для каждой полосы строится в смешанной форме, в качестве основных неизвестных выступают перемещения и напряжения. Построение решения исключительно в перемещениях в рамках аналитического МКП вплоть до настоящего времени остается малоразработанным вопросом.

Вообще, аналитический МКП близок к аналитическим методам, и прежде всего к методам расчета двумерных конструкций, связанным с разложением в тригонометрические ряды. Используются версии аналитического МКП в перемещениях и полугибридные (частично в напряжениях (разработаны Б. Улицким, 1962 год), частично в напряжениях (разработаны А.В. Александровым, 1963 год [6])). Жесткостные, смешанные и гибридные версии аналитического МКП до сих пор не разработаны [300].

Матрица жесткости в рамках аналитического МКП строится методом базисных вариаций. Поверхностные нагрузки должны удовлетворять условиям Дирихле [302]. Нагрузки, сосредоточенные вдоль линии, должны быть самоуравновешивающими относительно отдельной узловой линии [302]. Матрицы жесткости и внешних нагрузок для изотропной полосы формируются в замкнутой форме [301-303], тогда как для ортотропных соответствующее формирование производится в неявном виде [301].

Несмотря на то, что аналитический МКП разработан для довольно-таки узкого класса конструкций и используется весьма редко, эта версия МКП является наиболее точной и в этой связи может использоваться при проведении верификационных работ и исследований.

1.3.5. Краткая характеристика и анализ численного метода конечных полос.

В рамках численного МКП в качестве базисных функций при аппроксимации перемещений в «продольном» направлении используются сплайны, при этом каждый раз могут быть подобраны разнообразные сплайн-функции с необходимыми условиями непрерывности или разрывов [290]. В поперечном направлении, как правило, выбираются те же функции формы, что и в полуаналитическом МКП. Подчеркнем также, что численный МКП приводит к более гладким решениям по сравнению с действительными [290].

Точность и сходимость результатов в «продольном» направлении может быть в некоторой степени улучшена путем сгущения сетки дополнительного разбиения на участки сплайн-аппроксимации, при этом в «поперечном» направлении также следует сгущать сетку или использовать конечные полосы более высокого порядка аппроксимации [290].

Расчет каждой полосы в численном МКП ведется исключительно в перемещениях. Матрицы жесткости, масс и внешних нагрузок для полосы формируются с использованием принципа минимума общей потенциальной энергии или принципа возможных перемещений, аналогично тому, как это производится в МКЭ. Вплоть до настоящего времени численный МКП разработан лишь для расчета некоторых специализированных типов конструкций (например, мостов с прямолинейными коробчатыми балками) и используется реже, чем полуаналитический МКП [318].

1.3.6. Сравнение версий метода конечных полос.

Сравнивая перечисленные версии МКП по точности получаемых решений, можно сказать следующее. Для многих задач применение полуаналитического МКП ведет к результатам невысокой точности, тогда как численный МКП обеспечивает высокую точность при аналогичной схеме дискретизации, а аналитический МКП еще более уточняет результаты при том же самом выборе базисных функций в «продольном» направлении.

1.3.7. Достоинства и недостатки метода конечных полос.

Достоинства МКП. МКП наиболее эффективен для расчета конструкций с постоянными физико-геометрическими характеристиками в «продольном» направлении и простыми граничными условиями (например, шарнирное опирание, опирание с помощью идеальных диафрагм) в соответствующих «поперечных» сечениях. В этих случаях становится возможной декомпозиция разрешающей системы уравнений на набор подсистем меньшего порядка, каждая из которых соответствует своей компоненте ряда Фурье по «продольному» направлению, которая в результате определяется отдельно. Это достаточно важный и широко встречающийся на практике класс задач, связанный, например, с расчетом пролетов мостов с опиранием по концам в виде идеальных диафрагм. Указанная декомпозиция, по сути, сокращает мерность проблемы на единицу и ведет к существенным упрощениям, как при построении алгоритмов решения, так и реализующего программного обеспечения. Очевидно, что на один порядок уменьшается и количество неизвестных, сокращаются размер и ширина ленты матрицы коэффициентов в разрешающей системе линейных алгебраических уравнений, снижается количество исходных данных, объем получаемых результатов счета, существенно снижаются потребности в ресурсах необходимой компьютерной техники. Все перечисленные факторы в совокупности приводят к резкому упрощению решения задачи в рамках МКП.

Недостатки МКП. Во-первых, важно подчеркнуть, что, если рассматриваемая конструкция имеет не только простые случаи опирания, декомпозиция становится невозможной и эффективность МКП существенно снижается. Во-вторых, МКП очень плохо справляется с учетом сосредоточенных нагрузок, которые, между тем, являются основными для большинства строительных конструкций. МКП также неэффективен и для решения нелинейных задач. Точность и сходимость решений, получаемых по МКП, зависит от вида «поперечных» и «продольных» базисных функций, выбираемых для аппроксимации перемещений, а также от количества учитываемых членов ряда Фурье в «продольном» направлении. В полуаналитическом и численном МКП точность и сходимость могут зависеть также от принятого числа конечных полос, особенно в зонах краевых эффектов, концентраций напряжений и деформаций. Как для сосредоточенных нагрузок, так и для нагрузок, распределенных на небольших участках, следует комбинировать МКП с МКЭ в указанных зонах или использовать специальные методы для повышения скорости сходимости решения в силу того, что в

Оглавление