


С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин

Задачи по дискретной математике с алгоритмами на Python

2-е издание

Теоретическая часть: основные положения и терминология

Более 800 задач с ответами и решениями

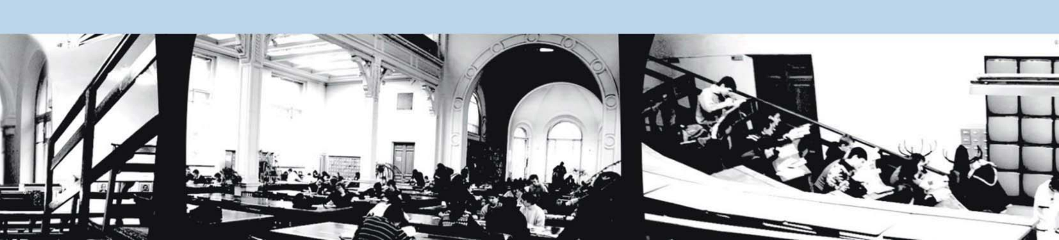
Широкое использование тематики информационно-коммуникационных технологий

Контрольные вопросы к каждой главе

Схема информационной зависимости материала книги

Дополнительная справочная информация

bhv®



УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Б82

Борзунов, С. В.

Б82 Задачи по дискретной математике с алгоритмами на Python / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2022. — 592 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-1214-5

В учебное пособие включены задачи и упражнения вузовского курса дискретной математики, включая разделы, связанные со спецификой информационно-коммуникационных технологий. В каждой главе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения задач разного уровня сложности, ответы и во многих случаях подробные пояснения к решениям.

Во втором издании, в отличие от первого, выходившего под названием «Задачи по дискретной математике», используется язык программирования Python. Добавлены более 50 новых задач с решениями и ответами, а также контрольные вопросы к каждой главе.

Для студентов и преподавателей профильных вузов

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

Рецензенты:

В. А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Самарского национального исследовательского университета им. академика С. П. Королева;

А. М. Шмырин, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики Липецкого государственного технического университета

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

ISBN 978-5-9775-1214-5

Оглавление

Глава 1

Основы математической логики

Математическая логика — наука, изучающая математические доказательства [51, 56][1]. Предметами математической логики являются математические доказательства, методы и средства их построения [51].

Самый простой раздел математической логики — **логика высказываний**. **Высказыванием** называется утверждение, имеющее значение истинности, т. е. оно может быть *истинным* или *ложным* [24, 38, 72]. Соответствующие значения истинности будем обозначать как И и Л.

Составное высказывание может быть построено из простых высказываний с помощью логических операций и скобок. Наиболее часто используемыми логическими операциями являются: **и** (*конъюнкция* или *логическое умножение*), **или** (*дизъюнкция* или *логическое сложение*), **если ... то** (*логическое следствие* или *импликация*, эта операция обозначается также «$\Rightarrow$»), **не** (*отрицание*). Конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию относят к **бинарным** операциям, так как в них используются два операнда, отрицание — **унарная** операция, для нее нужен один операнд.

Два составных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе значений составных частей. Составное высказывание, принимающее истинные значения при любых значениях своих компонент, называется **тавтологией**. Высказывание (**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P) называется **противоположным** или **контрапозитивным** к высказыванию $P \Rightarrow Q$. Запись $P \Rightarrow Q$ читается следующим образом: «P влечет Q», или «из P следует Q», или «Q необходимо для P», или «P достаточно для Q».

Для обоснования логической эквивалентности высказываний используют **таблицу истинности**, в которой перечислены истинностные значения логических выражений для всех возможных наборов истинностных значений компонент (табл. 1.1). Эквивалентность двух высказываний можно установить посредством сравнения их таблиц истинности. У логически эквивалентных высказываний они совпадают.

---

[1] Числами в квадратных скобках обозначены ссылки на литературу из списка, помещенного в конце книги.

Таблица 1.1

Таблица истинности

P	Q	**не** P	P **и** Q	P **или** Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	И

Если высказывания A и B эквивалентны, то пишут $A \Leftrightarrow B$. Последнее высказывание может быть записано через операции конъюнкции и импликации как $(A \Rightarrow B)$ **и** $(B \Rightarrow A)$.

Основные законы алгебры логики перечислены в табл. 1.2. Справедливость перечисленных законов легко доказать построением соответствующих таблиц истинности. Некоторые законы алгебры логики имеют непосредственные аналоги в алгебре вещественных чисел, к ним относятся законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Однако есть и такие законы, как, например, законы де Моргана[1], которые таких аналогов не имеют.

Утверждения о свойствах переменной x называют **предикатами** и обозначают: $P(x)$, $Q(x)$, ... **Областью истинности** предиката называется совокупность всех x, при которых данный предикат становится истинным высказыванием. Свойства предикатов изучает **логика предикатов**.

Для построения сложных логических выражений используются кванторы: $\forall$ (**для всех**) — квантор всеобщности и $\exists$ (**существует**) — квантор существования. **Квантор** — это логическая операция, которая по предикату $P(x)$ строит высказывание, характеризующее область истинности $P(x)$ [15, 55, 72].

Логическое выражение $\forall x\ (P(x))$ (читается «для всех x верно $P(x)$») означает, что для всех возможных значений x высказывание $P(x)$ принимает истинное значение. Выражение $\exists x\ (P(x))$ (читается «существует x такое, что верно $P(x)$») означает, что для некоторого значения x $P(x)$ принимает истинное значение. Скобки после $\forall x$ и $\exists x$ ограничивают область действия квантора. Часто скобки, определяющие область действия, опускают.

Для отрицаний логических выражений с кванторами известны следующие логические эквивалентности:

$$\textbf{не}\ \forall x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x\ (\textbf{не}\ P(x));$$

$$\textbf{не}\ \exists x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x\ (\textbf{не}\ P(x)).$$

[1] де Морган (Augustus de Morgan) (1806–1871).

Таблица 1.2

Законы алгебры логики

Законы идемпотентности

A **или** $A \Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** $A \Leftrightarrow A$

Свойства констант «И» и «Л»

A **или** Л $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** И $\Leftrightarrow A$

A **или** И $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** Л $\Leftrightarrow$ Л

Свойства дополнения

A **или** (**не** A) $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** (**не** A) $\Leftrightarrow$ Л

не (**не** A) $\Leftrightarrow A$

Законы коммутативности

A **или** $B \Leftrightarrow B$ **или** A $\qquad$ A **и** $B \Leftrightarrow B$ **и** A

Законы ассоциативности

A **или** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **или** C

A **и** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **и** C

Законы дистрибутивности

A **или** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** (A **или** C)

A **и** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **или** (A **и** C)

Законы поглощения

A **или** (A **и** B) $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** (A **или** B) $\Leftrightarrow A$

Законы де Моргана

не (A **или** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **и** (**не** B)

не (A **и** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **или** (**не** B)

Примечание. Названия логических операций происходят от латинских слов *conjungere* — объединять, *disjungere* — разъединять, *implicāre* — тесно связывать, *aequālis* — равный, *contrāpositum* — противопоставление. Термины «предикат» и «квантор» восходят к лат. *praedicātio* — высказывание, утверждение и *quantum* — сколько. Названия свойств бинарных операций происходят от лат. *commūtāre* — обменивать, *associāre* — соединять, *distributere* — распределять [27].

Существует несколько основных методов доказательства истинности высказывания вида $P \Rightarrow Q$ [78]:

1) *прямое рассуждение:* предполагается истинность P и выводится истинность Q;

2) *обратное рассуждение:* прямым рассуждением доказывается истинность высказывания (**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P) как логически эквивалентного $P \Rightarrow Q$;

3) метод *«от противного»:* предполагается истинность P и ложность Q и на основе аргументированных рассуждений получается противоречие.

Мощным способом доказательства истинности утверждений относительно всех натуральных чисел (к которым относятся $1, 2, 3, \ldots$) является принцип математической индукции [4, 43, 67] (от латинского *inductio* — выведение).

Принцип математической индукции. *Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n, и пусть выполняются следующие условия:*

1) $P(1)$ *истинно;*

2) $\forall k \geqslant 1$ *импликация* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ *верна.*

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n.

Высказывание *1* обычно называют **базой индукции**, высказывание *2* — **шагом индукции**.

Для доказательства тождеств методом математической индукции поступают следующим образом. Пусть предикат $P(k)$ принимает истинное значение, когда рассматриваемое тождество верно для некоторого натурального числа k. Тогда доказываются два утверждения:

1) база индукции, т. е. $P(1)$;

2) шаг индукции, т. е. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ для произвольного $k \geqslant 1$.

Согласно методу математической индукции, делается вывод о верности рассматриваемого тождества для всех натуральных значений n.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции для доказательства тождеств и неравенств.

Пример 1.1. Докажем, что для всех натуральных n выполняется равенство

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$» через $P(n)$.

Б а з а и н д у к ц и и

Рассмотрим случай $n = 1$. Равенство принимает вид $1^2 = \dfrac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$, что является истинным утверждением.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что $P(k)$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots$ принимает истинное значение, т. е. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2 = \dfrac{k(4k^2-1)}{3}$. Докажем, что $P(k+1)$ — истинно.

Запишем предикат $P(k+1)$ в виде:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Воспользуемся индуктивным предположением и перепишем сумму $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2$ как дробь $\dfrac{1}{3}k(4k^2-1)$:

$$\underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2}_{k(4k^2-1)/3} + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1);$$

$$\frac{1}{3}k(4k^2-1) + (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{1}{3}(4k^3 - k + 3(4k^2+4k+1)) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1);$$

$$\frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Получили верное равенство. Значит, при любом $k = 1, 2, \ldots$ импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ справедлива, и методом математической индукции доказано, что $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ для всех натуральных n. $\square$

В следующем примере в качестве предиката $P(n)$ выступает неравенство.

Пример 1.2. Докажем **неравенство Бернулли**[1] [42]:

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \ \text{ для } \ n=1,2,\ldots \ \text{ и } \ a>-1.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$(1+a)^n \geqslant 1+na$ для $a>-1$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n=1$ неравенство принимает вид $(1+a)^1 \geqslant 1+a$, и это истинное утверждение.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ — истинно, т. е. $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ для некоторого натурального k и $a>-1$. Проверим истинность утверждения $P(k+1)$: $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.

Для этого умножим обе части неравенства, составляющего индуктивное предположение, на положительное число $1+a$:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a).$$

Раскроем скобки в правой части полученного неравенства:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant 1+(k+1)a+ka^2.$$

Принимая во внимание, что $ka^2 \geqslant 0$, получаем:

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a,$$

что составляет утверждение $P(k+1)$. Значит, по принципу математической индукции неравенство Бернулли выполняется для всех натуральных n. □

[1] Бернулли (Jacob Bernoulli) (1654–1705).

Контрольные вопросы к главе «Основы математической логики»

1. Какие утверждения относят к высказываниям?
2. Перечислите основные логические операции.
3. Какие высказывания называют логически эквивалентными?
4. Что такое тавтология?
5. Запишите высказывание, контрапозитивное по отношению к высказыванию $P_1 \Rightarrow P_2$.
6. Для чего используют таблицу истинности логических выражений?
7. Дайте определение понятию предиката.
8. Расскажите, как применяют кванторы для построения логических выражений.
9. Сформулируйте законы алгебры логики.
10. Перечислите основные типы доказательства истинности высказываний.
11. Сформулируйте принцип математической индукции.

Задачи к главе «Основы математической логики»

1.1. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Язык Python относится к высокоуровневым языкам программирования.

2) Пейте морковный сок!

3) Есть ли жизнь на Марсе?

4) Первые компьютеры появились в XVIII веке.

1.2. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Любое квадратное уравнение имеет вещественные корни.

2) Треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$.

3) Неверно, что на Луне нет воды.

4) Да здравствуют Олимпийские игры!

∗1.3. На листе бумаги записано предложение: «Это предложение ложно». Является ли оно высказыванием?

1.4. Покажите, что выполняются следующие логические эквивалентности, известные как законы де Моргана (табл. 1.2):

1) **не** $(A$ **и** $B) \;\Leftrightarrow\;$ (**не** A) **или** (**не** B);

2) **не** $(A$ **или** $B) \;\Leftrightarrow\;$ (**не** A) **и** (**не** B).

∗1.5. Обобщите логические эквивалентности из упражнения **1.4** на случай произвольного числа простых высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n = 2, 3, \ldots$

1.6. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из трех высказываний A, B и C истинное значение принимает ровно одно».

1.7. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из трех высказываний A, B и C истинное значение имеет не менее чем одно из них».

1.8. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из четырех высказываний A, B, C и D три имеют одинаковое значение истинности».

1.9. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A$ **и** $B) \Rightarrow C$.

1.10. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию (**не** $C) \Rightarrow ($(**не** A) **или** (**не** B)).

1.11. Покажите, что высказывание A **или** $(B$ **и** $C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A$ **или** $B)$ **и** $(A$ **или** $C)$.

1.12. Покажите, что высказывание A **и** $(B$ **или** $C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A$ **и** $B)$ **или** $(A$ **и** $C)$.

1.13. Докажите, что высказывание

$$((A \textbf{ или } B) \textbf{ и } (\textbf{не } (A \textbf{ и } B))) \Leftrightarrow ((A \textbf{ и } (\textbf{не } B)) \textbf{ или } ((\textbf{не } A) \textbf{ и } B))$$

является тавтологией.

1.14. Является ли высказывание $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A$ **и** $B) \Rightarrow C)$ тавтологией?

1.15. Являются ли высказывания

1) $(A$ **и** $(B$ **или** $C)) \Rightarrow (A$ **или** $(B$ **и** $C))$,

2) $(A$ **и** $(B \Rightarrow C))$ **и** $(B$ **или** $(B \Rightarrow C))$

тавтологиями?

1.16. Являются ли высказывания

1) $(A \Rightarrow (B$ **или** $C)) \Rightarrow (($**не** $B) \Rightarrow A)$,

2) $((A$ **и** $B) \Rightarrow C) \Rightarrow (($**не** $C) \Rightarrow A)$

тавтологиями?

1.17. Обозначим через A высказывание: «я голоден», через B — «сейчас три часа», а через C — «пора обедать». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если сейчас три часа или я голоден, то пора обедать.

2) Если не пора обедать, то я не голоден.

3) Если я голоден, то пора обедать. Но я не голоден. Значит, или сейчас не три часа, или не пора обедать.

1.18. Обозначим через A высказывание: «светит солнце», через B — «на улице жарко», а через C — «идет снег». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если идет снег, то, если светит солнце, на улице не жарко.

2) Если светит солнце, то на улице либо жарко, либо идет снег (но не одновременно).

1.19. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если гвардейцы кардинала поблизости, то д'Артаньян готов к бою».

1.20. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Арамис станет епископом и Портос получит баронский титул, то д'Артаньяну вручат маршальский жезл».

1.21. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Атос перехватит письмо и Портос уйдет от погони, то Арамис раскроет замысел кардинала».

1.22. Некоторые скобки в составных высказываниях можно опускать, если договориться о порядке действия логических операций согласно их силе связывания. Сила связывания операндов логическими операциями определяется в соответствии с приведенной схемой [69]:

не
и
или
$\Rightarrow$
$\Leftrightarrow$

Наибольшей силой связывания обладает унарная операция отрицания, затем следуют бинарные операции в таком порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и операция эквивалентности.

Пусть A, B, C, D — простые высказывания. Определите, являются ли логически эквивалентными высказывания P_1 и P_2:

1) $P_1 = A\,\textbf{или}\,B\,\textbf{и}\,C\,\textbf{или}\,D,\;\; P_2 = (A\,\textbf{или}\,B)\,\textbf{и}\,(C\,\textbf{или}\,D)$;
2) $P_1 = A \Rightarrow B\ \textbf{или}\ C,\;\; P_2 = A \Rightarrow (B\ \textbf{или}\ C)$.

1.23. Проверьте составлением таблиц истинности, являются ли эквивалентными следующие выказывания:

1) $X = A\ \textbf{или}\ (B \Rightarrow C),\;\; Y = (A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C)$;
2) $X = A \Rightarrow (\textbf{не}\ (B\ \textbf{и}\ C)),\;\; Y = \textbf{не}\ ((A \Rightarrow B)\ \textbf{и}\ (A \Rightarrow C))$;
3) $X = A \Rightarrow ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))\ \textbf{и}\ ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$;
4) $X = A\ \textbf{или}\ ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C))\ \textbf{и}\ ((A\,\textbf{или}\,C) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,B))$.

1.24. Установите, какие из следующих высказываний являются тождественно ложными:

1) $A \Rightarrow (A\ \textbf{или}\ B)$;
2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\textbf{не}\,B \Rightarrow \textbf{не}\,A)$;
3) $(A\ \textbf{и}\ B)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ A\ \textbf{или}\ \textbf{не}\ B)$;
4) $A\ \textbf{и}\ ((A \Rightarrow\ \textbf{не}\,A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\,A \Rightarrow A))$.

1.25. Друзья-мушкетеры заметили в дворцовом парке подозрительного человека в маске. Д'Артаньян считает, что это был кардинал. Портос утверждает, что неизвестный либо кардинал, либо миледи. Арамис доказывает, что если Портос не ошибается, то д'Артаньян прав. Атос уверен, что Портос и Арамис не могут ошибаться.

Дальнейшее расследование показало правильность выводов Атоса. Кто скрывался под маской?

1.26. Капитан королевских мушкетеров де Тревиль получил три письма от своих подчиненных.

В первом сообщалось, что если Атос сломал в бою шпагу, то Портос и Арамис сломали свои.

Второе гласило, что Атос и Арамис либо оба сломали свои шпаги, либо оба сохранили их в целости.

Наконец, в третьем сообщалось: чтобы Арамис сломал шпагу, необходимо, чтобы Портос сломал свою.

Де Тревилю известно также, что из трех писем, отправленных мушкетерами, одно было перехвачено и содержит неверные сведения. Кто из мушкетеров сломал шпагу?

1.27. В ограблении ювелирного магазина подозреваются трое: Александров, Быков и Соколов. Предварительное расследование привело к следующим выводам:

1) если к преступлению причастен Соколов, то причастен и Быков;

2) если виновен Александров, то виновен и Быков.

Первый вывод предварительного расследования подтвердился, второй оказался неверным. Кто совершил ограбление?

∗1.28. Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работают второй и третий. Третий станок работает тогда и только тогда, когда работает четвертый. Кроме того, если работает второй, то четвертый должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

∗1.29. Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работает второй. Второй станок работает тогда и только тогда, когда работает третий, и если работает четвертый, то третий должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

1.30. Высокопроизводительный компьютерный кластер находится под управлением двух серверов: вычислительного и файлового, а система охлаждения кластера состоит из трех блоков. Администратор кластера получил по электронной почте три диагностических сообщения:

1) неисправен файловый сервер, а также первый блок охлаждения;

2) неисправен вычислительный сервер, а также второй блок охлаждения;

3) файловый сервер работает в обычном режиме, но вышел из строя третий блок охлаждения.

Администратору точно известно, что вышли из строя только один сервер и не более одного блока охлаждения. После устранения неисправностей выяснилось, что каждое из диагностических сообщений содержало достоверную информацию либо о работе серверов, либо о состоянии блоков охлаждения, но не одновременно.

В каком сервере и в каких блоках охлаждения администратору пришлось устранять неисправности?

1.31. Высокопроизводительный компьютерный кластер находится под управлением двух серверов: основного и резервного, а система охлаждения кластера состоит из трех блоков. Администратор кластера получил по электронной почте три диагностических сообщения:

1) неисправен основной сервер, а также третий блок охлаждения;

2) неисправен резервный сервер, а также второй блок охлаждения;

3) основной сервер работает в обычном режиме, но вышел из строя первый блок охлаждения.

Администратору точно известно, что вышел из строя только один сервер и не менее двух блоков охлаждения. После устранения неисправностей выяснилось, что каждое из диагностических сообщений содержало достоверную информацию либо о работе серверов, либо о состоянии блоков охлаждения, но не одновременно.

В каком сервере и в каких блоках охлаждения администратору пришлось устранять неисправности?

1.32. Авиасообщение на некоторой территории обеспечивается работой четырех аэропортов: двух основных (A и B) и двух резервных (A_1 для A и B_1 для B). Резервный аэропорт работает тогда и только тогда, когда не работает соответствующий основной. Необходимым условием приема самолетов аэропортом B_1 является работа аэропорта A_1. Пилоты воздушных судов получили указание, что аэропорт B из-за погодных условий не может принимать рейсы. Установите, какие из аэропортов работают.

1.33. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедут Атос или Портос (возможно, вместе), и Портос или Арамис (также, возможно, вместе). Если в путешествии примет участие Портос, то поедет Арамис, и если поедет Атос, то Арамис останется в Париже.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

1.34. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедет либо Атос, либо Арамис (причем только один из них). Если Портос не примет участие в путешествии, то Арамис останется в Париже. Кроме того, если поедет Атос, то поедет Арамис.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

∗1.35. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих отправились на экскурсию, другие загорают на пляже. Либо Богдан, либо Валерия отправились на экскурсию (возможно, записались и Богдан, и Валерия). Если Валерия на пляже и Георгий на пляже, то Алиса тоже отдыхает на пляже. Неверно, что если Алиса на пляже, то Валерия или Георгий на экскурсии. Кто из студентов отправился на экскурсию, а кто пошел на пляж?

∗1.36. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих играют на спортивной площадке, другие готовятся к концерту самодеятельности. Известно, что либо Алиса, либо Богдан играют на спортплощадке (возможно, в одной команде). Если Богдан готовится к концерту и Валерия готовится к концерту, то Георгий тоже готовится к концерту. Кроме того, неверно, что если Георгий готовится к концерту, Богдан или Валерия — на спортплощадке. Кто из студентов играет на спортплощадке?

1.37. Рассмотрим еще две элементарные логические операции [4, 69]. **Штрих Шеффера**[1] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \mid B$, которое ложно тогда, когда оба высказывания истинны, и истинно в остальных случаях:

$$A \mid B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, B).$$

Стрелка Пирса[2] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \downarrow B$, которое истинно тогда, когда оба высказывания ложны, и ложно в остальных случаях:

$$A \downarrow B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\, B).$$

Постройте таблицу истинности для высказываний $A \mid B$ и $A \downarrow B$.

[1] Шеффер (Henry Maurice Sheffer) (1882–1964).
[2] Пирс (Charles Sanders Peirce) (1839–1914).

1.38. Выразите основные логические операции (отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию) через:

1) штрих Шеффера;

2) стрелку Пирса.

∗1.39. Выразите:

1) операцию «стрелка Пирса» через операцию «штрих Шеффера»;

2) операцию «штрих Шеффера» через операцию «стрелка Пирса».

1.40. Какие из следующих предложений являются предикатами:

1) произвольное четное число s можно представить в виде суммы двух нечетных чисел;

2) рациональное число q не больше $-\dfrac{7}{8}$;

3) треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$;

4) переменные x и y принимают одинаковые значения?

1.41. Запишите отрицание предиката P, если

1) $P(n) = \{$натуральное число n является четным$\}$;

2) $P(x, y) = \{x < y\}$.

1.42. Представьте отрицание высказывания T таким образом, чтобы операции отрицания относились к предикатам P и Q:

1) $T = \forall x\,(\exists y\,(P(x, y))$;

2) $T = \exists x\,(\exists y\,(P(x, y)) \Rightarrow Q(x, y))$.

1.43. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\forall x\,(\exists y\,(x > y))$;

2) $\forall x\,(x \neq 0 \Rightarrow \exists y\,(xy = 1))$.

1.44. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\exists x\,(\forall y\,(xy = y))$;

2) $\exists x\,(\forall y\,(x + y = 1))$.

1.45. Как известно из курса математического анализа [33, 42, 75], число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, больших или равных n_0, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

С помощью кванторов приведенное утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}\;\; (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел числовой последовательности $\{a_n\}$ не равен a».

1.46. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0\; \forall x\;\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел функции $f(x)$ в точке x_0 не равен A».

1.47. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0\; \forall x\;\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0».

∗**1.48.** Запишите с помощью кванторов утверждение: «существует единственное значение переменной x, для которого предикат $P(x)$ принимает истинное значение».

1.49. Докажите методом математической индукции высказывание:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ для всех натуральных чисел n.

1.50. Докажите методом математической индукции высказывание:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

для всех натуральных чисел n.

1.51. Докажите методом математической индукции высказывания:

1) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ для всех натуральных чисел n;

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ для всех натуральных чисел n.

1.52. Докажите методом математической индукции, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна квадрату их суммы:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$