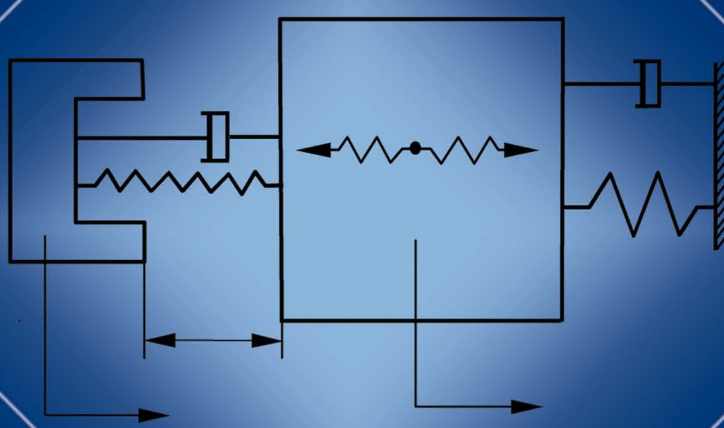
А.В. Дукарт

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УДАРНЫХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ



А.В. Дукарт

Задачи теории ударных гасителей колебаний

Издательство Ассоциации Строительных Вузов

Москва 2006

УДК 534.01:624.042

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук А.А. Зевин (Институт транспортных систем и технологий НАН Украины)

доктор тех. наук, профессор В.Л. Мондрус (Московский государственный строительный университет)

Дукарт А.В. *"Задачи теории ударных гасителей колебаний":* Монография. − М.: Издательство АСВ, 2006.-219с.

ISBN 5-93093-462-2

Монография посвящена развитию теории ударных гасителей колебаний и их приложению для виброзащиты строительных и машиностроительных конструкций. Предложены методы построения точных решений, описывающих периодические движения механических систем с ударными гасителями колебаний, представляющих собой системы с непропорциональным трением. Приведены сведения об оптимальных параметрах, эффективности и конструктивных формах ударных гасителей колебаний и виброзащитных устройств, включающих ударные звенья, при гармонических и импульсивных воздействиях. Монография написана на основе работ автора.

Предполагается, что читатель знаком с основами теории механических колебаний.

Книга представляет интерес для научных и инженерно-технических работников, преподавателей и аспирантов вузов, специализирующихся в области виброзащиты конструкций.

ISBN 5-93093-462-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное развитие техники характеризуется появлением новых, более мощных, быстроходных и производительных машин и механизмов. Интенсификация промышленного производства и увеличение мощностей оборудования приводят к значительному росту динамических нагрузок, передаваемых на фундаменты и другие строительные конструкции зданий и сооружений, воздействующих на прецизионное оборудование, технологические процессы и обслуживающий персонал. В этой связи актуальной становится проблема защиты строительных конструкций и сооружений, приборов, машин и оборудования от вибрационных и ударных воздействий. Проблема снижения уровня колебаний связана с повышением усталостной прочности, надежности и долговечности строительных конструкций и сооружений, машин и механизмов, либо является следствием технологических требований точных производств и эксплуатации измерительных комплексов, а также возникает по причинам санитарно-гигиенического характера.

Разработка средств и методов виброзащиты является одной из важнейших научно-технических проблем в различных областях техники - судостроении, авиастроении, приборостроении, транспортном и энергетическом машиностроении, промышленном и гражданском строительстве и других. Для снижения уровня колебаний применяются [4,14,41,48,60-62,103,115-117,125,134,138,143,159,181,183,192,198, 207-209, 212,214,221, 230,245,254,258,262,318]: пассивная и активная виброизоляция; балансировка и уравновешивание возмущающих нагрузок машин и механизмов; экранирование упругих волн, распространяющихся от источника вибрации; изменение соотношения между частотами возмущения и собственными частотами конструкции с целью отстройки от резонансов; демпфирующие покрытия; различные демпферы; разнообразные гасители колебаний; конструкционное демпфирование; жесткие и упругие ограничители хода и другие способы.

Среди указанных средств и методов борьбы с вибрациями важное место принадлежит гасителям колебаний, представляющим собой дополнительные динамические устройства, присоединенные к объекту виброзащиты с целью изменения его вибрационного состояния. Гасители колебаний делятся на ударные и динамические, регулируемые и нерегулируемые, пассивные и активные. Простота конструкции ударных гасителей колебаний, высокая надежность и безотказность работы и вместе с тем достаточно высокая эффективность виброгашения способствовали их применению в машиностроении, авиастроении, приборостроении, строительстве и других областях техники.

В последнее время особенно интенсивно развивается теория динамических гасителей колебаний, что нашло свое отражение в научной [4,48,103,117,125,159,181,192, 318], справочной [41,60-62,198,230] и нормативной [209] литературе. Существенно расширилась область их применения в различных областях техники. Теория ударных гасителей колебаний менее разработана. Это является одной из причин более редкого использования метода ударного виброгашения, особенно в строительстве, где возникает большое число специфических задач виброзащиты, которое связано с необходимостью рассмотрения разнообразных конструкций и сооружений при динамических воздействиях различных типов, а также с многообразием технических решений и конструктивных форм ударных гасителей колебаний.

Данная книга, фактический материал которой основан на работах ее автора, посвящена развитию теории ударных гасителей колебаний и устройств, содержащих ударные звенья, и их приложению для виброзащиты механических систем с сосредоточенными и распределенными массами. Книга состоит из введения, семи глав и библиографического списка.

Во **введении** приведены типы и области применения виброгасителей ударного действия, краткий обзор истории вопроса, основных методов и результатов, полученных в теории ударных гасителей колебаний.

Первая глава посвящена построению точных решений, описывающих периодические режимы движения неавтономных механических систем с одной и несколькими степенями свободы, оборудованных ударными виброгасителями и представляющих собой системы с непропорциональным трением. Предполагается, что в промежутках между соударениями масс движение системы описывается линейными дифференциальными уравнениями. Эффект соударения масс оценивается соотношениями стереомеханической теории удара. Рассеяние энергии в звеньях защищаемой системы и гасителя в промежутках между соударениями учитывается в соответствии с гипотезами вязкого или частотно-независимого трения. Предлагается способ построения периодических режимов движения многомассовых систем с одним и несколькими ударными гасителями колебаний, основанный на использовании линейной независимости частных решений дифференциальных уравнений колебаний и простой форме записи условий периодичности движения системы.

Полученные соотношения используются во **второй главе** для решения задач определения оптимальных параметров ударных гасителей колебаний одностороннего действия без демпфирования, с вязким и частотно-независимым трением при гармоническом воздействии с фиксированной, находящейся в узком диапазоне и нестабильной частотой. Защищаемый объект моделируется системой с одной степенью свободы. При указанном возмущении для основного режима периодических колебаний системы с одним соударением между массами за период решение получено в явном виде. Изучается влияние параметров гасителя на поведение амплитудно-частотных характеристик колебаний массы защищаемого объекта и дана оценка эффективности гашения резонансных колебаний при заданных критериях качества виброзащиты.

В **третьей главе** рассматриваются задачи определения оптимальных параметров и оценки эффективности ударного виброгашения для другого важного класса внешних динамических воздействий - при импульсивных нагрузках. Предполагается, что внешние импульсы являются мгновенными, а защищаемый объект представляет собой систему с одной степенью свободы. На примере ударных гасителей одностороннего действия изучаются особенности гашения резонансных колебаний защищаемого объекта, вызванных периодическими импульсивными воздействиями с фиксированной, мало изменяющейся и нестабильной частотой. Рассматривается также задача виброзащиты гибких элементов конструкций, опирающихся на массивную поддерживающую конструкцию, при действии на последнюю мгновенного импульса. В этом случае гаситель снижает не только уровень, но и увеличивает темп затухания нестационарных колебаний защищаемого элемента.

Четвертая глава посвящена изучению возможностей применения ударных гасителей колебаний для снижения уровня вибрации фундаментов под машины, опирающихся непосредственно на грунтовое основание. С точки зрения динамики сооружений система "фундамент - грунтовое основание" представляет собой сильно демпфированную систему. Фундамент рассматривается как жесткое тело (штамп), а моделью грунта является однородное упругое изотропное полупространство. Изучается эффективность ударного виброгашения при вертикальных, горизонтальных и изгибных колебаниях фундаментов с плоским круговым и квадратным основаниями при гармонических воздействиях с мало изменяющейся и нестабильной частотой. При расчете используются известные решения соответствующих динамических контактных задач о штампе, расположенном на упругом полупространстве.

В **пятой главе** приведены описания технических решений виброзащитных устройств повышенной эффективности, предназначенных для гашения колебаний виброизолированных и невиброизолированных конструкций и установок, мачтовых и башенных сооружений. Они представляют собой одномассовые и многомассовые системы, в качестве элементов структуры которых могут быть использованы ударные звенья. Изучаются двухмассовые виброзащитные системы с последовательным соединением масс, составляющих ударную пару. Выполнен детальный анализ влияния параметров виброзащитных устройств на амплитудные характеристики колебаний массы защищаемого объекта и дана оценка эффективности гашения колебаний при гармонических воздействиях.

В **шестой главе** рассматриваются вопросы, связанные с уменьшением кратковременных контактных сил, возникающих при соударениях гасителя с защищаемым объектом. Дано описание конструкции виброзащитного устройства, сохраняющего основные динамические свойства обычных ударных гасителей и вместе с тем позволяющего значительно уменьшить силы контактного взаимодействия, а, следовательно, местные контактные напряжения и уровень шума. Приводится приближенный способ исследования периодических колебаний континуальных систем, оборудованных ударным гасителем предлагаемой конструкции, учитывающий сопоставимость длительности ударного импульса с периодом основного тона колебаний защищаемого объекта. Найдены точные решения задач, описывающие периодические режимы колебаний одномассовой системы с ударными гасителями одностороннего и двустороннего действия при произвольном законе изменения сил контактного взаимодействия. Полученные решения используются для оценки эффективности ударного гасителя одностороннего действия, снабженного вязкоупругим контактным элементом, при гармоническом воздействии с нестабильной частотой.

Седьмая глава посвящена решению некоторых задач теории ударного виброгашения и теории колебаний систем с распределенными параметрами. Сначала рассматриваются задачи виброзащиты прямолинейных стержней. Защищаемая конструкция с присоединенным гасителем представляет собой систему с непропорциональным трением. Разработан способ построения периодических режимов движения таких систем и исследована эффективность ударного гасителя колебаний одностороннего действия при изгибных и сдвиговых колебаниях стержней, вызванных гармоническим воздействием. Кроме того, рассматриваются актуальные задачи вычисления частот собственных колебаний двумерных систем, в частности мембран сложной формы, и определения обобщенных масс весомых стержней, несущих дополнительные сосредоточенные массы или имеющих другие особенности типа сосредоточенной силы.

Монография представляет интерес для научных и инженерно-технических работников, преподавателей и аспирантов вузов, специализирующихся в области виброзащиты конструкций.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам А.А.Зевину и В.Л.Мондрусу за полезные замечания, а также М.Н.Скляровой за кропотливую работу по подготовке рукописи.

А.В.Дукарт

Глава 1

УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ, ОБОРУДОВАННЫХ УДАРНЫМИ ГАСИТЕЛЯМИ КОЛЕБАНИЙ

Рассматриваются периодические колебания механических систем, оборудованных ударными гасителями. Учитывая, что для большинства механических систем, колебания которых сопровождаются соударениями отдельных элементов, продолжительность контакта при ударе чрезвычайно мала по сравнению с временем безударного движения [14, 39, 59, 114, 133, 134, 136, 180], анализ таких систем может производиться с помощью стереомеханической модели удара [50, 114, 174, 189, 244].

Предполагается,что в промежутках между соударениями масс движение системы описывается линейными дифференциальными уравнениями. При использовании стереомеханической теории эффект соударения эквивалентен приложению к соударяющимся массам мгновенных импульсов, поэтому движение системы может быть получено, суммируя периодические колебания линейной системы при действии заданного возмущения $P(t)$ и установившиеся колебания, вызываемые ударными импульсами [134].

Заданное воздействие считаем произвольной периодической функцией времени $P(t+T)=P(t)$, либо функцией, изменяющей свой знак через полупериод $P(t+0{,}5T)=-P(t)$, где T- период воздействия. Вынужденные колебания являются частным интегралом системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих движение в промежутках между соударениями, и при заданном воздействии $P(t)$ определяются известными методами теории колебаний и динамики сооружений [13, 25, 38, 56, 60-62, 92, 159, 178, 188, 198, 230, 245, 318]. Установившееся движение линейной системы под действием периодических мгновенных импульсов полностью определяется моментами времени их приложения и величинами разрывов скоростей масс, которые, в свою очередь, зависят от величин импульсов, вызванных соударениями.

Рабочему режиму движения системы с ударным гасителем обычно отвечают установившиеся периодические колебания с периодом внешнего воздействия, внутри которого реализуется одно или два соударения. Такие режимы движения для систем с ударным гасителем колебаний являются основными [14, 41, 60, 133, 134, 209, 230]. Вместе с тем, при некоторых значениях параметров защищаемых конструкций и гасителей не исключается возможность появления более сложных периодических режимов движений или движений с хаотическими соударениями [44, 59, 134]. В дальнейшем всегда предполагается, что рассматриваемые режимы колебаний могут быть реализованы.

Особенность полученных в данной главе решений заключается в том, что они позволяют раздельно учитывать диссипативные силы в защищаемой системе и гасителе. Это дает возможность оценить влияние различных видов сопротивлений в ударном гасителе колебаний на его эффективность и установить область изменения параметров, для которой демпфирование в ударном гасителе является целесообразным.

В первом параграфе рассматриваются периодические режимы движения одномассовой системы с ударными гасителями колебаний пружинного типа одно- и двустороннего действия. Рассеяние энергии в звеньях защищаемой системы и гасителя между соударениями учитывается в соответствии с гипотезами вязкого или частотно-независимого трения. В следующем параграфе предлагается способ построения периодических режимов движения многомассовых виброударных систем. Способ основан на использовании линейной независимости частных решений дифференциальных уравнений колебаний системы, вызываемых мгновенными соударениями масс, и простой форме записи условий периодичности движения. В последнем параграфе предлагаемый способ используется для решения задач о колебаниях многомассовых систем с одним или несколькими ударными гасителями.

1.1. Периодические режимы движения одномассовой системы с ударным гасителем колебаний

В ряде случаев в качестве расчетной схемы защищаемого объекта можно ограничиться системой с одной степенью свободы. Сюда можно отнести: фундаменты машин; виброизолированные установки; балки и плиты, несущие тяжелый сосредоточенный груз (мощный электродвигатель, вентилятор и т.п.), по сравнению с которым их собственный вес невелик; конструкции с разреженным спектром собственных частот и многие другие. Несмотря на простоту, такая расчетная схема позволяет получить достаточно полную и достоверную информацию о поведении защищаемого объекта, снабженного гасителем колебаний, о характере взаимодействия защищаемого объекта с гасителем, определить с высокой степенью точности оптимальные параметры и эффективность работы гасителя.

1.1.1.Несимметричный режим движения системы с одним соударением за период воздействия

Для определенности будем считать [65], что на защищаемом объекте (элементе) установлен ударный гаситель колебаний одностороннего действия [14, 41, 106] с вязким трением (рис. 1.1.1). Масса гасителя присоединена к массе защищаемого элемента с помощью упругой связи (например, пружины). В такой системе реализуется, как правило, периодический режим движения с одним соударением между массами за период внешнего воздействия $P(t)$. Соответствующая линейная система, которую назовем безударной, представляет собой динамический гаситель колебаний с вязким трением [41, 56, 159].

В соответствии с принятой моделью удара эффект соударения масс оценивается так называемым коэффициентом восстановления $0 < R < 1$ [14, 50, 58, 114, 189]. Как уже отмечалось, в этом случае движение системы в интервале между любыми двумя последовательными соударениями можно рассматривать как колебания безударной системы, к которой наряду с заданным воздействием $P(t)$ приложена бесконечная последовательность мгновенных импульсов

$$S(t) = S_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - t_0). \tag{1.1.1}$$

Здесь $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака; t_0 - момент соударения масс; S_0 - величина ударного импульса; T - период приложения импульсов. Обозначим (рис.1.1.1): $x_1(t)$, $x_2(t)$ - абсолютные координаты соответственно массы защищаемого объекта $m_1 = M$ и массы гасителя $m_2 = m$. Тогда,

$$x_j(t) = x_j^P(t) + x_j^S(t)\,;\;\; j = 1{,}2, \tag{1.1.2}$$

где $x_j^P(t)$ - вынужденные колебания j-ой массы, определяемые заданным воздействием $P(t)$; $x_j^S(t)$ - периодические колебания j-ой массы, вызванные последовательностью импульсов $S(t)$. Относительные колебания массы гасителя ограничены начальным зазором D (рис. 1.1.1)

$$x(t) = x_2(t) - x_1(t) \le D, \tag{1.1.3}$$

причем соударения масс происходят, когда в (1.1.3) выполняется равенство и относительная скорость $\dot{x}(t)$ положительна.

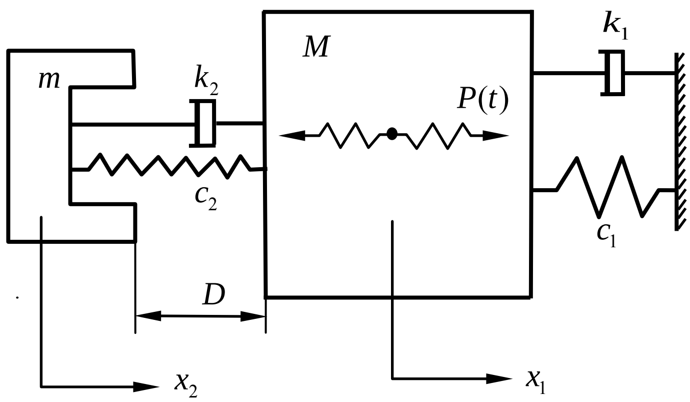


Рис. 1.1.1.Расчетная схема системы с ударным гасителем колебаний одностороннего действия

Решим сначала вспомогательную задачу об установившихся периодических колебаниях рассматриваемой двухмассовой системы, вызываемых противоположно направленными импульсами (1.1.1), прикладываемых к массам M и m, то есть импульсами такого типа, которые возникают при соударениях. Предположим, что диссипативные силы защищаемого объекта также описываются гипотезой вязкого трения.

В промежутках между двумя любыми последовательно действующими импульсами система совершает свободные колебания, дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} &M\ddot{x}_1^S + k_1\dot{x}_1^S + c_1 x_1^S + k_2(\dot{x}_1^S - \dot{x}_2^S) + c_2(x_1^S - x_2^S) = 0;\\ &m\ddot{x}_2^S + k_2(\dot{x}_2^S - \dot{x}_1^S) + c_2(x_2^S - x_1^S) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Здесь c_j, k_j- соответственно квазиупругий коэффициент и коэффициент вязкого трения j-го звена системы. Общее решение уравнений (1.1.4) в интервале времени $t_0 \le t \le t_0 + T$ описывается функциями [124]

$$x_1^S(t) = \sum_{l=1}^{4} A_l e^{\lambda_l (t - t_0)}\,;\;\; x_2^S(t) = \sum_{l=1}^{4} A_l B_l e^{\lambda_l (t - t_0)}\,, \tag{1.1.5}$$

где λ_l- корни характеристического уравнения ($l=\overline{1,4}$)

$$M\lambda_l^4+2\left[Mh_0+(M+m)h_\Gamma\right]\lambda_l^3+\left[M(\omega_0^2+4h_0h_\Gamma)+\right.$$
$$\left.+(M+m)\omega_\Gamma^2\right]\lambda_l^2+2M(h_\Gamma\omega_0^2+h_0\omega_\Gamma^2)\lambda_l+M\omega_0^2\omega_\Gamma^2=0; \qquad (1.1.6)$$
$$B_l=(2h_\Gamma\lambda_l+\omega_\Gamma^2)/(\lambda_l^2+2h_\Gamma\lambda_l+\omega_\Gamma^2); \qquad (1.1.7)$$
$$h_0=k_1/(2M);\ h_\Gamma=k_2/(2m);\ \omega_0=\sqrt{c_1/M};\ \omega_\Gamma=\sqrt{c_2/m};$$

ω_0, ω_Γ- соответственно частота свободных колебаний защищаемой системы при отсутствии гасителя и парциальная частота колебаний гасителя; A_l- произвольные постоянные, определяемые из условий периодичности движения масс системы

$$\begin{aligned} &x_1^S(t_0+T)=x_1^S(t_0); && \dot{x}_1^S(t_0+T)=\dot{x}_1^S(t_0)-\frac{S_0}{M};\\ &x_2^S(t_0+T)=x_2^S(t_0); && \dot{x}_2^S(t_0+T)=\dot{x}_2^S(t_0)+\frac{S_0}{m} \end{aligned} \qquad (1.1.8)$$

и удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{4}A_l(e^{\lambda_l T}-1)=0; && \sum_{l=1}^{4}A_l\lambda_l(e^{\lambda_l T}-1)=-\frac{S_0}{M};\\ &\sum_{l=1}^{4}A_lB_l(e^{\lambda_l T}-1)=0; && \sum_{l=1}^{4}A_lB_l\lambda_l(e^{\lambda_l T}-1)=\frac{S_0}{m}. \end{aligned} \qquad (1.1.9)$$

При рассматриваемых ниже значениях параметров защищаемой системы и гасителя величины λ_l, B_l и A_l являются комплексно-сопряженными числами [169,178]; запишем их в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_{2\nu-1,2\nu}=-0{,}5h_\nu\pm i\omega_\nu;\ B_{2\nu-1,2\nu}=\beta_{2\nu-1}\pm i\beta_{2\nu};\\ &A_{2\nu-1,2\nu}=\frac{S_0}{M}\left(\alpha_{2\nu-1}\pm i\alpha_{2\nu}\right);\quad i=\sqrt{-1};\quad \nu=1,2. \end{aligned} \qquad (1.1.10)$$

Используя (1.1.10), представим функции отклонений масс (1.1.5) в вещественной форме

$$\begin{aligned} x_1^S(t)&=\frac{2S_0}{M}\sum_{\nu=1}^{2}e^{-0{,}5h_\nu(t-t_0)}\left[\alpha_{2\nu-1}\cos\omega_\nu(t-t_0)-\alpha_{2\nu}\sin\omega_\nu(t-t_0)\right];\\ x_2^S(t)&=\frac{2S_0}{M}\sum_{\nu=1}^{2}e^{-0{,}5h_\nu(t-t_0)}\left[(\alpha_{2\nu-1}\beta_{2\nu-1}-\alpha_{2\nu}\beta_{2\nu})\cos\omega_\nu(t-t_0)-\right.\\ &\left.-(\alpha_{2\nu}\beta_{2\nu-1}+\alpha_{2\nu-1}\beta_{2\nu})\sin\omega_\nu(t-t_0)\right], \end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{2\nu-1}&=\left[(0{,}25h_\nu^2-h_\Gamma h_\nu+\omega_\Gamma^2-\omega_\nu^2)(\omega_\Gamma^2-h_\Gamma h_\nu)+2h_\Gamma\omega_\nu^2(2h_\Gamma-h_\nu)\right]/\sigma_\nu;\\ \beta_{2\nu}&=\left[2h_\Gamma\omega_\nu(0{,}25h_\nu^2-h_\Gamma h_\nu+\omega_\Gamma^2-\omega_\nu^2)-\omega_\nu(\omega_\Gamma^2-h_\Gamma h_\nu)(2h_\Gamma-h_\nu)\right]/\sigma_\nu;\\ \sigma_\nu&=(0{,}25h_\nu^2-h_\Gamma h_\nu+\omega_\Gamma^2-\omega_\nu^2)^2+(2h_\Gamma-h_\nu)^2\omega_\nu^2. \end{aligned} \qquad (1.1.12)$$

Подставляя (1.1.11) в (1.1.8), получим относительно величин α_l $(l=\overline{1,4})$ систему алгебраических уравнений, которую запишем в матричном виде

$$\overline{B}\cdot\vec{Q}=\vec{F}, \tag{1.1.13}$$

где $\overline{B}=\left[b_{jl}\right]_1^4$; $\vec{Q}=\left[\alpha_1,...,\alpha_4\right]^T$; $\vec{F}=0{,}5\left[0{,}0{,}1,-\dfrac{M}{m}\right]^T$;

индекс " T "означает операцию транспонирования матриц. Элементы матрицы $\overline{B}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
&b_{1,2\nu-1}=1-e^{-0{,}5h_\nu T}\cos\omega_\nu T; \quad b_{1,2\nu}=e^{-0{,}5h_\nu T}\sin\omega_\nu T;\\
&b_{2,2\nu-1}=\beta_{2\nu-1}b_{1,2\nu-1}+\beta_{2\nu}b_{1,2\nu};\ b_{2,2\nu}=\beta_{2\nu-1}b_{1,2\nu}-\beta_{2\nu}b_{1,2\nu-1};\\
&b_{3,2\nu-1}=\omega_\nu b_{1,2\nu}-0{,}5h_\nu b_{1,2\nu-1};\ b_{3,2\nu}=-(\omega_\nu b_{1,2\nu-1}+0{,}5h_\nu b_{1,2\nu});\\
&b_{4,2\nu-1}=\beta_{2\nu-1}b_{3,2\nu-1}+\beta_{2\nu}b_{3,2\nu};\ b_{4,2\nu}=\beta_{2\nu-1}b_{3,2\nu}-\beta_{2\nu}b_{3,2\nu-1.}
\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Решение системы уравнений (1.1.13) $\vec{Q}=\overline{B}^{-1}\cdot\vec{F}$, где $\overline{B}^{-1}$ - матрица, обратная к $\overline{B}$, определяется в замкнутом виде

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2\nu-1}=\frac{u_{1\nu}b_{1,2\nu-1}-v_{1\nu}b_{1,2\nu}}{\Delta_S(b^2_{1,2\nu-1}+b^2_{1,2\nu})};\\
&\alpha_{2\nu}=\frac{u_{1\nu}b_{1,2\nu}+v_{1\nu}b_{1,2\nu-1}}{\Delta_S(b^2_{1,2\nu-1}+b^2_{1,2\nu})}.
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Здесь

$$u_{11}=-u_{12}=2\left[\omega_2\beta_2\beta_3-\omega_1\beta_1\beta_4+m^{-1}M(\beta_2\omega_2-\beta_4\omega_1)\right]-\beta_2\beta_4(h_2-h_1);$$

$$v_{11}=2\left[\omega_2(\beta_1\beta_3-\beta_3^2-\beta_4^2)+\omega_1\beta_2\beta_4\right]-\beta_1\beta_4(h_2-h_1)+m^{-1}M\left[\beta_4(h_1-h_2)+\right.$$
$$\left.+2\omega_2(\beta_1-\beta_3)\right];$$

$$v_{12}=2\left[\omega_2\beta_2\beta_4+\omega_1(\beta_1\beta_3-\beta_1^2-\beta_2^2)\right]+\beta_2\beta_3(h_2-h_1)+m^{-1}M\left[\beta_2(h_2-h_1)-\right.$$
$$\left.-2\omega_1(\beta_1-\beta_3)\right];$$

$$\Delta_S=4\left\{\omega_1\omega_2\left[(\beta_1-\beta_3)^2+\beta_2^2+\beta_4^2\right]-\beta_2\beta_4\left[0{,}25(h_1-h_2)^2+\omega_1^2+\omega_2^2\right]\right\}.$$

Подставляя (1.1.15) в (1.1.11), с учетом (1.1.14) получим искомое периодическое решение

$$x_j^S(t)=\frac{S_0}{M\Delta_S}\sum_{\nu=1}^{2}\frac{e^{-0{,}5h_\nu(t-t_0)}}{\mathrm{ch}0{,}5h_\nu T-\cos\omega_\nu T}\left\{\left[u_{i\nu}(e^{0{,}5h_\nu T}-\cos\omega_\nu T)-v_{j\nu}\sin\omega_\nu T\right]\times\right.$$
$$\left.\times\cos\omega_\nu(t-t_0)-\left[v_{j\nu}(e^{0{,}5h_\nu T}-\cos\omega_\nu T)+u_{j\nu}\sin\omega_\nu T\right]\sin\omega_\nu(t-t_0)\right\}, \tag{1.1.16}$$

где

$$u_{2\nu} = u_{1\nu}\beta_{2\nu-1} - v_{1\nu}\beta_{2\nu};\; v_{2\nu} = u_{1\nu}\beta_{2\nu} + v_{1\nu}\beta_{2\nu-1}.$$

Выражение (1.1.16) определяет движение системы в интервале времени $t_0 \le t \le t_0 + T$; при $-T + t_0 \le t \le t_0$ необходимо заменить t на $t + T$.

Аналогично может быть найдено решение рассматриваемой задачи, когда силы неупругого сопротивления в звеньях системы предполагаются частотно-независимыми [66, 67]. Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} &M\ddot{x}_1^S + c_1(u_1 + iv_1)x_1^S + c_2(u_2 + iv_2)(x_1^S - x_2^S) = 0; \\ &m\ddot{x}_2^S + c_2(u_2 + iv_2)(x_2^S - x_1^S) = 0; \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

При описании частотно-независимого трения (ЧНТ) в соответствии с гипотезой Е.С. Сорокина [226] коэффициенты $u_j,\ v_j\ \ (j = 1{,}2)$ вычисляются по формулам

$$u_j = \frac{4 - \gamma_j^2}{4 + \gamma_j^2}; \quad v_j = \frac{4\gamma_j}{4 + \gamma_j^2}; \tag{1.1.18}$$

при использовании зависимостей А.И. Цейтлина [259, 260]

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_j^2}}; \quad v_j = \frac{\gamma_j}{\sqrt{1 + \gamma_j^2}}, \tag{1.1.19}$$

где γ_1, γ_2 - коэффициенты неупругого сопротивления звеньев системы.

Разыскивая решение системы уравнений (1.1.17) по-прежнему в форме (1.1.5), получим следующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &M\lambda_l^4 + \left[M\omega_0^2(u_1 + iv_1) + \omega_\Gamma^2(m + M)(u_2 + iv_2)\right]\lambda_l^2 + \\ &\quad + M\omega_0^2\omega_\Gamma^2\left[(u_1u_2 - v_1v_2) + i(u_1v_2 + u_2v_1)\right] = 0; \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

коэффициенты B_l определяются по формуле

$$B_l = \omega_\Gamma^2(u_2 + iv_2)/\left[\lambda_l^2 + \omega_\Gamma^2(u_2 + iv_2)\right].$$

Используя соотношения (1.1.10), условия периодичности (1.1.8) или уравнения (1.1.9), получим периодическое решение для данного случая в виде (1.1.16), причем

$$\begin{aligned} \beta_{2\nu-1} &= \omega_\Gamma^2\left[(0{,}25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2\omega_\Gamma^2)u_2 + (v_2\omega_\Gamma^2 - h_\nu\omega_\nu)v_2\right]/\sigma_\nu; \\ \beta_{2\nu} &= \omega_\Gamma^2\left[(0{,}25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2\omega_\Gamma^2)v_2 - (v_2\omega_\Gamma^2 - h_\nu\omega_\nu)u_2\right]/\sigma_\nu; \\ \sigma_\nu &= (0{,}25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2\omega_\Gamma^2)^2 + (v_2\omega_\Gamma^2 - h_\nu\omega_\nu)^2. \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Рассмотрим суммарные колебания системы, вызванные заданным воздействием $P(t)$ и периодическими мгновенными импульсами $S(t)$. Для определения неизвестных величин ударного импульса S_0 и момента соударения масс t_0 представим относительное движение массы гасителя в виде

$$x(t) = x^P(t) + x^S(t). \tag{1.1.22}$$

Решение $x^P(t) = x_2^P(t) - x_1^P(t)$, описывающее вынужденные колебания системы, предполагается известным. Колебания $x^S(t) = x_2^S(t) - x_1^S(t)$ найдем, воспользовавшись решением (1.1.16). Относительную доударную скорость $\dot{x}(t_0 + T - 0)$ будем считать положительной, соответственно и величина импульса также положительна ($S_0 > 0$).

В соответствии с теоремой импульсов при прямом центральном ударе величина ударного импульса S_0 связана с относительной доударной скоростью $\dot{x}(t)$ движения массы гасителя при $t = t_0 - 0$ соотношением [174]

$$S_0 = \frac{mM}{m+M}(R+1)\dot{x}(t_0 - 0). \tag{1.1.23}$$

Величина коэффициента восстановления при ударе *R* зависит от собственных физических свойств соударяющихся материальных точек (тел) и принимается на основе экспериментальных исследований. При отсутствии экспериментальных данных величина коэффициента R может приниматься в соответствии с рекомендациями по проектированию гасителей колебаний [209], справочной и другой литературой.

Выразим относительную скорость массы гасителя с помощью (1.1.22) и (1.1.16):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \dot{x}^P(t) + \frac{S_0}{M\Delta_S}\sum_{\nu=1}^{2}\frac{e^{-0,5h_\nu(t-t_0)}}{\operatorname{ch}0{,}5h_\nu T - \cos\omega_\nu T}\Big\{\Big[(v_{2\nu} - v_{1\nu})(e^{0,5h_\nu T} - \cos\omega_\nu T) + \\ + (u_{2\nu} - u_{1\nu})\sin\omega_\nu T\Big]\Big[0{,}5h_\nu \sin\omega_\nu(t - t_0) - \omega_\nu \cos\omega_\nu(t - t_0)\Big] - \\ - \Big[(u_{2\nu} - u_{1\nu})(e^{0,5h_\nu T} - \cos\omega_\nu T) - (v_{2\nu} - v_{1\nu})\sin\omega_\nu T\Big]\times \\ \times\Big[0{,}5h_\nu \cos\omega_\nu(t - t_0) + \omega_\nu \sin\omega_\nu(t - t_0)\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Используя (1.1.24), найдем относительную доударную скорость движения масс m и M при $t = t_0 + T$, причем в силу условия периодичности $\dot{x}^P(t_0 + T) = \dot{x}^P(t_0)$. Подставляя значение доударной скорости в (1.1.23), получим формулу для определения величины ударного импульса

$$S_0 = \frac{mM(R+1)\dot{x}^P(t_0)}{(m+M)[1+(R+1)\Phi]}, \tag{1.1.25}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi = -\frac{m}{(m+M)\Delta_S}\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\operatorname{ch}0{,}5h_\nu T - \cos\omega_\nu T}\Big\{\Big[0{,}5h_\nu \sin\omega_\nu T - \omega_\nu(\cos\omega_\nu T - e^{-0,5h_\nu T})\Big]\times \\ \times(v_{2\nu} - v_{1\nu}) - \Big[0{,}5h_\nu(\cos\omega_\nu T - e^{-0,5h_\nu T}) + \omega_\nu \sin\omega_\nu T\Big](u_{2\nu} - u_{1\nu})\Big\}.\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Геометрическое условие соударения масс (1.1.3)

$$x^P(t_0) + x^S(t_0) = D$$

Оглавление