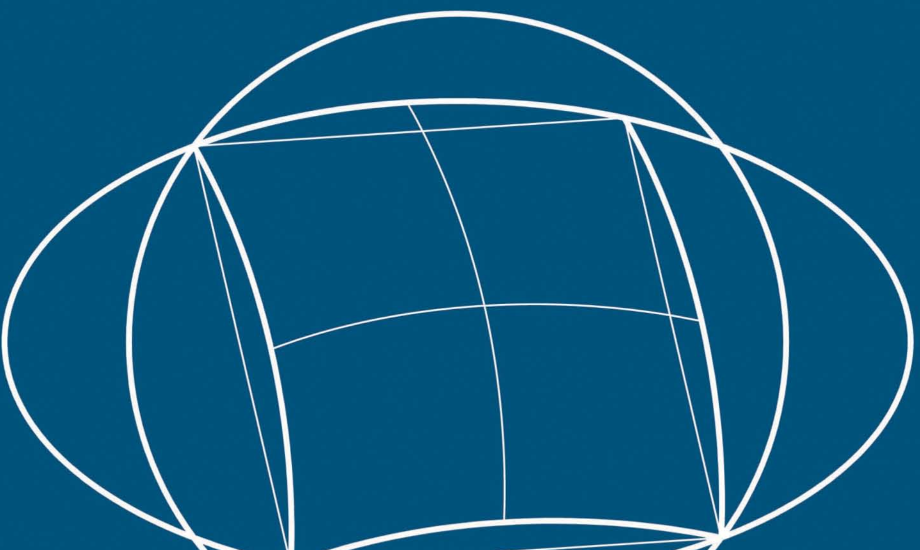
А.А. Амосов

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК



Библиотека научных разработок и проектов МГСУ

А.А. Амосов

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

МГСУ
Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2009

Рецензенты:

зав. кафедрой «Строительная механика» Московской Государственной академии коммунального хозяйства и строительства, профессор

Н.В. Колкунов;

зав. лабораторной «Разработка методов расчета сооружений» ЦНИИСК им. Кучеренко, д.т.н., профессор

С.И. Трушин;

А.А. Амосов

Техническая теория тонких упругих оболочек. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 304 с.

ISBN 978-5-93093-650-6

В книге приводится систематическое изложение снов теории расчёта тонких упругих оболочек и пластин на статику, устойчивость и динамику. Рассматривается простейший вариант теории тонкостенных конструкций, основанный на использовании гипотез Кирхгофа-Лява; даётся вывод основной системы уравнений этой теории - уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений.

Особое внимание уделено классу задач, в которых принимаются дополнительные упрощения, определяемые допущениями технической теории оболочек.

Обсуждаются вопросы применения вариационных принципов и вариационных методов к задачам расчёта пластин и оболочек, в том числе и призматических.

Книга предназначена для студентов, магистров и аспирантов высших учебных заведений, а также и для инженеров, специализирующихся в области расчёта и проектирования тонкостенных конструкций.

Рекомендовано Научно-техническим Советом МГСУ

ISBN 978-5-93093-650-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга содержит систематическое изложение результатов построения простейшего варианта теории упругих оболочек и применения его к решению важнейших задач расчета тонкостенных конструкций на статику, устойчивость и динамику.

В содержательной части материал, излагаемый в данной работе, в значительной степени опирается на курсы лекций по теории расчета пластин и оболочек и тонкостенных пространственных систем, читаемых автором в течение ряда лет в Московском государственном строительном университете для студентов специальности «Теория сооружений». Это обстоятельство следует оговорить особо, поскольку курс теории оболочек является специальным курсом, изучаемым студентами многих технических специальностей — авиастроительных, машиностроительных, кораблестроительных и т.д. Помимо этого математическая теория упругости, в том числе оболочек, является предметом изучения на механико-математических факультетах университетов.

Естественно, что особенности специальности накладывают определенные требования как на объем излагаемого материала и его содержания, так и на форму его представления. К примеру, в данной книге используются привычная для инженеров координатная форма записи математических выражений без привлечения элементов тензорного анализа, тогда как для специалистов механико-математического профиля более уместной и удобной выглядит тензорная форма.

При написании данной книги предполагалось, что читатель достаточно хорошо знаком с основными сведениями из курсов теоретической механики, высшей математики, сопротивления материалов, теории упругости и строительной механики, предусмотренных учебными программами для студентов технических специальностей. Кроме того, желательно иметь навыки использования современных вычислительных средств хотя бы в рамках простейших вычислительных комплексов, что существенно облегчает выполнение заданий, предусмотренных учебным планом.

Помимо предназначения в качестве учебного пособия материал, излагаемый в данной книге, может быть полезен для магистров, стажеров, аспирантов и других читателей, совершенствующихся в области расчетов тонкостенных конструкций. В связи с этим при рассмотрении некоторых вопросов часто используется более развернутая форма изложения, нежели это необходимо для первоначального изучения дисциплины.

Сопутствующие основному тексту упражнения и примеры следует рассматривать как необходимое дополнение к излагаемому материалу, ориентированное на проведение практических занятий и самостоятельную работу при выполнении расчетно-графических заданий.

Во *введении* приводится краткий исторический очерк развития теории оболочек и тонкостенных систем; даются основные понятия и определения, используемые в этой теории, и описываются основные расчетные схемы.

В *первой главе* изложены необходимые сведения из теории поверхностей, используемые в дальнейшем для построения теории тонкостенных систем.

Вторая глава, являющаяся наиболее существенной в теоретическом плане, посвящена построению теории тонких упругих оболочек на основе гипотез Кирхгофа - Лява. Рассматривается один из вариантов этой теории, названный здесь «*простейшим вариантом*», который нашел наиболее широкое применение в технических приложениях. Вероятно, поэтому этот вариант часто называют «*технической*» теорией оболочек [4], [13] и др., хотя, строго говоря, для корректного применения этого термина, как показано в гл. 5, необходимо введение дополнительных предположений. Учитывая, что в данной работе рассматриваются различные прикладные теории расчета тонкостенных систем, так или иначе подпадающие под определение технической теории, было сочтено возможным этот термин вынести в название книги.

В *третьей главе* рассмотрены вопросы применения безмоментной теории к расчету тонких оболочек.

Материал, представленный в *четвертой главе*, где излагается приближенный метод раздельного применения безмоментной и моментной теории к расчету тонких упругих оболочек, несколько необычен в учебно-методическом плане, хотя отдельные примеры применения этого метода для случая осесимметричной деформации оболочек вращения приведены в таких известных работах, как [2], [3], [7] и др.

Пятая глава, являющаяся центральной в этой книге, посвящена систематическому изложению технической теории оболочек. Здесь в дополнение к известным сведениям дается обоснование возможности применения технической теории к расчету обобщенно пологих оболочек.

В *шестой главе* достаточно подробно излагаются наиболее часто используемые прикладные теории расчета круговых цилиндрических оболочек. Особое внимание уделено технической теории Власова - Доннелла и полубезмоментной теории.

Седьмая глава посвящена изложению основных вариационных принципов и вариационных методов, используемых в теории расчета пластин и оболочек. В существующей учебной литературе этот вопрос не нашел достаточно адекватного отражения, хотя, по убеждению автора, важность изучения его трудно переоценить. Один из примеров успешного применения вариационного подхода к построению теории расчета тонкостенных конструкций приводится в *восьмой главе*, посвященной расчету призматических оболочек.

Девятая глава содержит краткое изложение вопросов исследования проблемы устойчивости пластин и оболочек.

Приводятся основные уравнения теории упругой устойчивости пластин и оболочек. Рассматриваются вопросы устойчивости пластин, а также цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внешнем давлении. Приведено решение задачи о потере устойчивости сферической оболочки, нагруженной внешним давлением.

В *десятой главе*, содержащей изложение основ расчета пластин и оболочек на динамические воздействия, особое внимание уделено задачам определения частот и форм собственных колебаний. Рассматриваются поперечные колебания пластин и пологих оболочек на прямоугольном плане, осесимметричные и поперечные колебания цилиндрических оболочек.

Каждую главу завершает список дополнительной литературы, рекомендуемой для более углубленного изучения излагаемых вопросов. Ссылки на дополнительную литературу даются в форме двух чисел, например [9.4], из которых первое обозначает номер главы, а второе — номер литературного источника по дополнительному списку.

ВВЕДЕНИЕ

1. Краткий очерк развития теории оболочек

Составление более или менее подробного обзора по истории становления и развития теории оболочек представляет определенные трудности, связанные с необходимостью анализа весьма обширного списка литературных источников. Поэтому ограничимся упоминанием лишь некоторых основных этапов создания теории оболочек, непосредственно связанных с материалом, излагаемым в данной книге.

В качестве первой работы по теории оболочек обычно называют журнальную статью Г. Арона (1874), упоминаемую А. Лявом (1888). Однако скорее всего именно А. Лява следует считать основоположником теории оболочек, представленной в его знаменитой работе «Математическая теория упругости». Эта работа выдержала четыре переиздания; последнее, наиболее известное, вышло в свет в 1927 г. (русский перевод – в 1935 г.). В этой книге были систематизированы основные результаты по разработке теории оболочек и сформулирована теория расчета тонких упругих оболочек, получившая впоследствии название теории Кирхгофа - Лява.

В числе наиболее значительных работ этого периода следует отметить труды Г. Рейсснера (1912), Е. Мейсснера (1913), С.П. Тимошенко (1913), О. Блюменталя (1914) и др. В этих работах были выявлены основные закономерности формирования напряженно-деформированного состояния тонких оболочек при внешних воздействиях. Особо интересные результаты были получены при исследовании напряженно-деформированного состояния оболочек вращения.

Во-первых, было обнаружено, что при определенных условиях, накладываемых на граничные условия закрепленных краев и на характер действующей внешней нагрузки, в оболочке может быть реализовано безмоментное напряженно-деформированное состояние, определяемое лишь только тангенциальными усилиями и перемещениями при нулевых значениях моментов.

Во-вторых, было установлено (Мейсснер), что моментная теория оболочек в случае осесимметричной деформации описывается двумя дифференциальными уравнениями второго порядка относительно двух функций, определяющих напряжения и перемещения оболочки (уравнения Мейсснера).

30-е годы XX столетия ознаменованы началом возникновения широкого интереса к проблемам теории расчета и проектирования тонкостенных конструкций типа оболочек (Ф. Дишингер, 1928–1932). Возобновляется взаимный интерес механиков и математиков, отчасти нарушенный объективными успехами таких областей механики твердого тела, как сопротивление материалов и строительная механика.

Теория оболочек оказалась той областью науки, где гармонично сочетались интересы как механиков, озабоченных разработкой расчетной двухмерной модели в системе гауссовых координат серединной поверхности оболочки, так и математиков, получивших новые математические модели (например, теория дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной и др.).

Этот период, а также 40-е годы характеризуются особым вниманием к проблемам обоснования области применимости безмоментной теории и разработки соответствующих методов расчета. Здесь прежде всего следует отметить работы отечественных ученых В.Э. Новодворского, В.В. Соколовского, В.З. Власова, Ю.Н. Работнова, А.Л. Гольденвейзера и др. Из зарубежных исследователей, помимо упомянутого выше Ф. Дишингера можно назвать Е. Рейсснера, Р. Рабиха, С. Трусделла, В. Флюгге и др.

В то же время продолжались исследования по построению решений уравнений Мейсснера. Были получены решения в рядах по гипегеометрическим функциям. Однако, как выяснилось позже, эти ряды чрезвычайно медленно сходятся при малых значениях параметра тонкостенности, а потому и неудобны для практического применения. Более удачным оказался подход, основанный на применении метода асимптотического интегрирования — Л.В. Геккелер (1934), И.Я. Штаерман (1933) и др. Наиболее важным результатом этих работ явилось установление того факта, что при действии краевых нагрузок напряженно-деформированное состояние имеет быстрозатухающий характер типа краевого эффекта.

Последующее двадцатилетие (1940 – 1960) занимает особое место в истории развития теории и методов расчета тонкостенных конструкций. В эти годы, по сути дела, была завершена формулировка теории тонких упругих оболочек, основанной на использовании гипотез Кирхгофа - Лява — В.З. Власов (1933, 1949), А.Л. Гольденвейзер (1953), В.В. Новожилов (1951), Н.А. Кильчевский (1939, 1963), А.И. Лурье (1947) и др. Из зарубежных исследований следует отметить работы Л. Доннелла (1933), Е. Рейсснера (1941), С.П. Тимошенко (1940, 1948), В. Флюгге (1951) и др.

Основные результаты этих исследований состояли в следующем. Во-первых, было установлено, что математическая модель теории тонких упругих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа - Лява, определяется двухмерной краевой задачей для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка, согласованной с четырьмя естественными граничными условиями на каждом из краев оболочки. Во-вторых, было показано, что погрешность этой теории составляет величину порядка h/R по отношению к единице.

Наряду с этим проводились многочисленные исследования по разработке методов расчета тонкостенных конструкций различного типа. В.З. Власов и Л. Доннелл (1932–1933) разработали приближенную теорию расчета цилиндрических оболочек, названную впоследствии технической теорией. Эта теория получила широкое применение в задачах устойчивости цилиндрических оболочек.

В.З. Власов и П.Л. Пастернак предложили метод расчета складок и призматических оболочек. Позже расчетная модель оболочки, введенная В.З. Власовым, была им использована для создания полубезмоментной теории цилиндрических оболочек и теории тонкостенных стержней.

Следует отметить работы А.Л. Гольденвейзера по исследованию напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек и обоснованию метода раздельного применения безмоментной и моментной теории (метод расчленения). Ему же принадлежит установление статико-геометрической аналогии для оболочек общего вида. Заметим, что статико-геометрическую аналогию для цилиндрических оболочек использовал ранее и В.З. Власов.

Особого внимания заслуживает разработанная В.З. Власовым (1949) теория пологих оболочек. Ранее Л. Доннелл (1933) и Х.М. Муштари (1938) использовали прием упрощения основных уравнений теории тонких оболочек применительно к задачам устойчивости и геометрической нелинейности. Путем введения ряда предположений относительно геометрии и характера напряженно-деформированного состояния пологой оболочки В.З. Власову удалось свести задачу расчета к решению разрешающей системы двух уравнений, где неизвестными служат функция нормального перемещения (прогиба) w и введенная автором функция напряжений φ. Позднее в работах В.В. Новожилова и В.Л. Бидермана было показано, что уравнения В.З. Власова справедливы и в том случае, когда напряженное состояние быстро изменяется в направлении хотя бы одной из координат.

Существенные успехи были достигнуты в области решения задач устойчивости, как линейной, так и нелинейной постановке. Первые фундаментальные результаты исследования устойчивости цилиндрических оболочек были получены в работах Р. Лоренца (1911), С.П. Тимошенко (1914), Р. Саусвелла (1915), П.Ф. Папковича (1929) и др. Дальнейшее развитие теории устойчивости оболочек содержится в работах Н.А. Алумяэ, Н.А. Алфутова, В.В. Болотина, В.М. Даревского и др. Наиболее полное изложение и анализ результатов, полученных в области исследования проблем устойчивости оболочек и пластин, приведен в работах А.С. Вольмира (1956–1967), а также Э.И. Григолюка и В.В. Кабанова.

Отдельного внимания заслуживают исследования по разработке теории и методов расчета пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке. Здесь следует отметить работы К. Маргерра, Х.М. Муштари, К.З. Галимова, В.В. Новожилова, С.А. Алексеева, М.С. Корнишина, П.А. Лукаша и др.

На базе основных уравнений теории упругости анизотропных тел (А. Ляв, С.Г. Лехницкий) С.А. Амбарцумян (1961–1967) разработал теорию расчета анизотропных пластин и оболочек, получившую дальнейшее развитие в работах Э.И. Григолюка, Л.М. Куршина, В.И. Королева, А.П. Прусакова, В.М. Плеханова и многих других исследователей, в работах которых рассматривались задачи расчета двух, трех и многослойных конструкций. Было обнаружено, что при низкой сдвиговой жесткости теория Кирхгофа - Лява требует уточнения за счет учета деформации поперечного сдвига. Это обстоятельство стимулировало интерес к проблемам построения уточненных теорий типа Тимошенко - Рейсснера.

Последние десятилетия характеризуются возрастанием интереса к проблемам динамического поведения тонкостенных конструкций при различного рода внешних воздействиях и в условиях взаимодействия их с окружающей средой (задачи аэро и гидроупругости, сейсмодинамики, динамической устойчивости и т.д.).

Эти задачи (так же как и задачи термоупругости или упругопластической деформации и др.) требуют отдельного рассмотрения и соответствующей профессиональной подготовки, а поэтому исключены из содержания материала данной книги, предназначенной для изложения основ простейшего варианта теории расчета тонких упругих оболочек.

2. Предмет дисциплины и область ее применения

Предметом дисциплины, излагаемой в данной работе, является определение напряженно-деформированного состояния оболочек и пластин при статических и динамических воздействиях, а также решение проблем обеспечения их устойчивости.

Тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек, как отдельно стоящих, так и в качестве отдельных элементов составных систем, находят широкое применение в различных областях техники — строительстве (промышленно-гражданское, гидростроение, шахтостроение, тоннелестроение и др.), машиностроении, приборостроении, авиастроении, судостроении и пр.

С другой стороны, теория пластин и оболочек может рассматриваться как отдельный раздел общей теории упругости. Неспроста одно из первых систематических изложений курса теории оболочек было представлено в классической работе Лява под названием «Математическая теория упругости». Поэтому вплоть до настоящего времени различные аспекты проблемы совершенствования теории и методов расчета пластин и оболочек продолжают оставаться предметом исследований специалистов по механике твердого тела и прикладной математике.

Специфика области применения оболочек, и вообще, тонкостенных конструкций в значительной степени предопределяет как особенности используемых методов расчета, так и их конструктивные решения. В связи с этим неизбежно возникает необходимость специализации курса по теории оболочек, ориентированного на конкретизацию изучения тех или иных разделов дисциплины, необходимых для практических приложений. Скорее всего именно этим обстоятельством можно объяснить многообразие названий данной дисциплины в учебных планах студентов различных специальностей. Это нашло отражение и в названиях книг, предназначенных для использования в качестве учебных пособий. Например, «Основы расчета упругих оболочек» (Н.В. Колкунов), «Механика тонкостенных конструкций» (В.Л. Бидерман), «Строительная механика оболочек» (С.К. Кан), «Строительная механика корабля», «Строительная механика ракет» и т.д.

Курс теории оболочек предназначен прежде всего для специалистов в области прочностных расчетов тонкостенных конструкций. Поскольку круг решаемых прочностных задач чрезвычайно обширен, постольку возникает настоятельная необходимость выделения основных специфических особенностей постановок задач расчета, связанная как с характером внешних воздействий, так и с многообразием возможных конструктивных решений. Например, в одном случае приоритетными могут быть задачи сейсмодинамики, в другом — учет совместной работы конструкции с окружающей средой (задачи аэроупругости и гидроупругости и др.), в третьем — задачи термоупругости и т.д.

Все это накладывает очень большие требования на уровень профессиональной подготовки инженеров-расчетчиков, тем более в условиях ускорения научно-технического прогресса. Однако все эти трудности не столь уж страшны, если учесть впечатляющие успехи, достигнутые в современной вычислительной математике и вычислительной технике. В настоящее время инженер-расчетчик имеет в своем распоряжении мощные вычислительные комплексы, позволяющие решать столь сложные задачи, которые еще полвека назад считались неразрешимыми.

Вместе с тем, как и в любой другой области деятельности, здесь нужно иметь минимально необходимый объем знаний и владеть определенными навыками, обеспечивающими профессиональную состоятельность работника.

Именно эта цель и является главной при составлении любого учебного пособия.

Курс теории оболочек условно может быть подразделен на две составляющие — теоретическую, где освещаются аналитические и численно-аналитические методы расчета оболочек, и вычислительную, где рассматриваются вычислительные аспекты на основе численных методов МКЭ (метод конечных элементов) или МКР (метод конечных разностей) и ВРМ (вариационно-разностный метод).

Численные методы, лежащие в основе современных промышленных вычислительных комплексов, рассматриваются обычно в отдельных учебных пособиях, предназначенных специально для пользователей ЭВМ.

В данной книге основное внимание уделено аналитическому подходу и некоторым численно-аналитическим решениям задач расчета оболочек.

3. Основные понятия и определения

Расчетные схемы оболочек и их классификация

Оболочкой принято называть трехмерное тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расстояние между которыми, называемое толщиной оболочки h, намного меньше остальных линейных размеров (рис. 0.1, а).

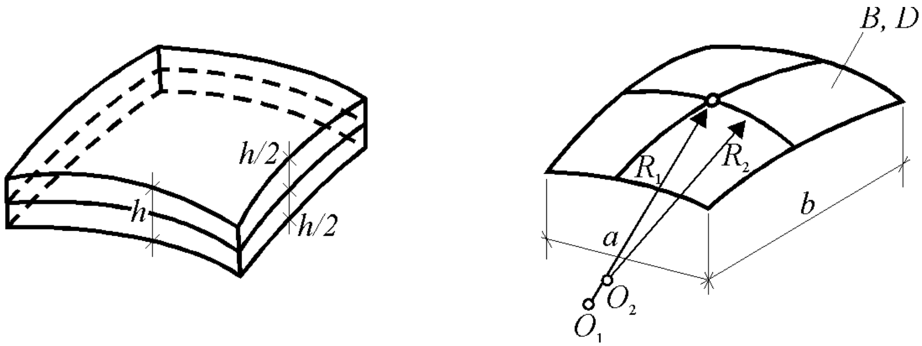


Рис. 0.1. Оболочка и ее расчетная схема

Введем в рассмотрение поверхность, равноотстоящую от граничных (лицевых) поверхностей (см. рис. 0.1, а), которую называют *срединной поверхностью* оболочки.

Припишем ей жесткостные характеристики: B — жесткость оболочки на растяжение (сжатие); D — жесткость оболочки на изгиб. Определение этих параметров будет дано позже. Теперь, применяя известные из строительной механики способы идеализации, будем считать, что срединная поверхность с заданными жесткостными характеристиками является расчетной схемой оболочки (рис. 0.1, б). Здесь a и $б$— некоторые параметры, определяющие линейные размеры оболочки в плане; R_1 и R_2 — параметры, определяющие кривизну срединной поверхности (радиусы кривизны координатных линий на поверхности).

В качестве определяющего параметра тонкостенности оболочки примем отношение h/R, называемое *относительной толщиной* оболочки, где R — наименьшее значение радиуса кривизны.

В зависимости от параметра относительной толщины оболочки подразделяются на тонкостенные, средней толщины и толстостенные:

при $h/R < 1/20$ — тонкостенные;

при $1/20 \le h/R \le 1/5$ — средней толщины;

при $h/R > 1/5$ — толстостенные.

При равнозначности жесткостных параметров оболочки ее относят к *жестким* (конструкционным). Если жесткость на изгиб значительно меньше жесткости на растяжение-сжатие, то оболочку относят к *мягким*; к таким оболочкам относятся, например, пневматические, конструкционная жесткость которых обеспечивается нагнетанием воздуха.

В зависимости от свойств материала оболочки подразделяют на:

— однородные и неоднородные;

— изотропные и анизотропные (в частности, ортотропные).

Конструктивное исполнение тела оболочки тоже отличается большим разнообразием. Можно выделить следующие:

— оболочки постоянной и переменной толщины;

— многослойные (слоистые), в том числе трехслойные, получившие широкое применение;

— ребристые;

— сетчатые (хотя их можно скорее отнести к перекрестной системе криволинейных стержней).

Наиболее емкая классификация оболочек основана на классификации серединных поверхностей. Приведем ее краткое описание.

1. Оболочки вращения. Оболочками вращения называются оболочки, образованные вращением какой угодно линии относительно центральной оси, отстоящей от нее (линии) на некотором расстоянии. Из обширного класса оболочек вращения выделим следующие:

— цилиндрические;

— конические;

— сферические;

— параболические и гиперболические;

— тороидальные;

— эллиптические и т.д.

2. Линейчатые-коноидальные.

3. Пологие оболочки. К пологим оболочкам относятся криволинейные поверхности, незначительно возвышающиеся над плоскостью. В данной работе вводится еще один класс оболочек — обобщенно пологие оболочки.

4. Призматические оболочки — оболочки, получаемые сочленением оболочек различных конструктивных форм, например, цилиндрической — с конической или сферической и др.

Приведенная классификация ни в коем случае не претендует на полноту, поскольку многообразие конструктивных форм поистине неисчерпаемо.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.1. Криволинейные координаты на поверхности

Рассмотрим элемент гладкой поверхности *G* (рис. 1.1). Отнесем эту поверхность к декартовой системе координат. Тогда поверхность *G* может быть описана либо аналитическим выражением

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{1.1}$$

либо радиус-вектором $\bar{r}$, проведенным из начала координат в любую точку *M* поверхности

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{1.2}$$

Здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты декартовой системы координат (рис. 1.1).

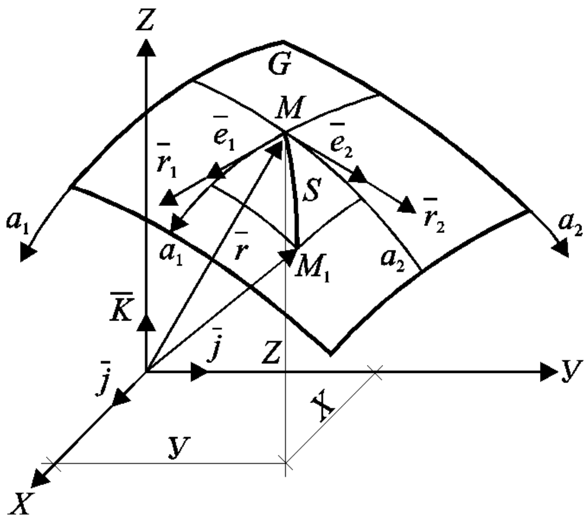


Рис. 1.1. Система гауссовых координат поверхности

Длина этого радиус-вектора будет равна

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.3}$$

В теории поверхностей используется другой, более удобный способ описания поверхностей.

Введем на поверхности *G* (рис. 1.1) какую-либо криволинейную систему координат $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in G$. Пользуясь выражением (1.1), можно установить взаимно - однозначное соответствие между рассмотренными координатными системами:

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2)\,; \quad y = y(\alpha_1, \alpha_2)\,; \quad z = z(\alpha_1, \alpha_2)\,. \tag{1.4}$$

Теперь выражение (1.2) может быть записано в виде

$$\overline{r}(\alpha_1, \alpha_2) = x(\alpha_1, \alpha_2)\overline{i} + y(\alpha_1, \alpha_2)\overline{j} + z(\alpha_1, \alpha_2)\overline{k}\,. \tag{1.5}$$

Фиксируя один из параметров, допустим $\alpha_2 = \alpha_{20}$, получаем на поверхности некоторую линию $\overline{r} = \overline{r}(\alpha_1, \alpha_{20})$, которую можно определить как *координатную линию*. Координатные линии $\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\alpha_2 = \mathrm{const}$ образуют на поверхности координатную сеть и называются *гауссовыми координатами* поверхности.

Составляя выражения для производных

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} = \overline{r_1}\,, \quad \frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_2} = \overline{r_2}\,, \tag{1.6}$$

определяем векторы, касательные к поверхности G в точке M, которые будем называть *координатными* векторами. Соответствующие единичные векторы (орты) вводятся следующими выражениями:

$$\overline{e_i} = \overline{r_i} / \left|\overline{r_i}\right| \qquad (i = 1, 2). \tag{1.7}$$

Заметим, что координатные векторы $\overline{r_i}$ перпендикулярны (ортогональны) вектору $\overline{r}$: $\overline{r_i} \cdot \overline{r} = 0$.

1.2. Первая квадратичная форма поверхности

При перемещении конца радиус-вектора $\overline{r}$ из точки M в точку M_1 (см. рис. 1.1) этот конец опишет на поверхности G некоторую дугу.

Вычисляя элемент этой дуги, имеем

$$d\overline{s} = \overline{r_1} d\alpha_1 + \overline{r_2} d\alpha_2\,. \tag{1.8}$$

Это выражение определяет вектор, касательный к дуге S в точке M. Квадрат длины этого вектора будет равен

$$ds^2 = \overline{r_1} \cdot \overline{r_1} d\alpha_1^2 + 2\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \overline{r_2} \cdot \overline{r_2} d\alpha_2^2\,. \tag{1.9}$$

Вводя обозначения

Учебное издание

Амосов Александр Александрович

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Редактор: *Г.М. Мубаракшина*
Компьютерная верстка: *Е.С. Корнило*
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 30.11.08. Формат 60х90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. 19,0 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – оф.
тел./факс: (499)183-56-83,
e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/