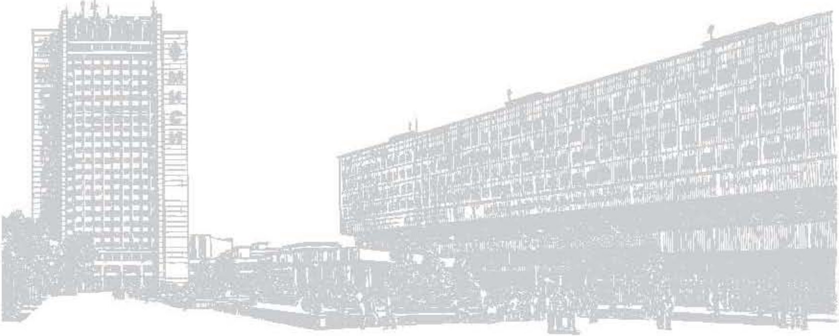
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИСИ

МГСУ



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Б.П. Осиленкер

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебно-практическое пособие

Москва 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.П. Осиленкер

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебно-практическое пособие

Москва 2015

УДК 512.91 (07)
ББК 22.143я73
О-45

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физ.-мат. наук, профессор *А.В. Петров*,
Российский государственный геологоразведочный университет;
доктор физ.-мат. наук, профессор *И.М. Петрушко*,
Национальный исследовательский университет МЭИ

Под редакцией *А.Ю. Лемина*

Осиленкер, Б.П.
О-45 Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б.П. Осиленкер ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. Москва : НИУ МГСУ, 2015. 128 с.
ISBN 978-5-7264-1186-6

Содержит основные теоретические положения по функциональному анализу. Материал дается в виде определений, теорем и формул, а затем проводится разбор решений типовых задач. Пособие адресовано студентам технического вуза. Основное внимание уделено задачам технического и вычислительного характера и задачам, позволяющим глубже уяснить теоретическое понятие и результат.

Для студентов специалитета, обучающихся по специальности 230401.65 Прикладная математика. Может быть использовано инженерами и математиками-прикладниками для самостоятельного изучения курса «Функциональный анализ».

УДК 512.91 (07)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-7264-1186-6

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика». В нем содержатся задачи и упражнения по курсу «Функциональный анализ».

Материал учебного пособия охватывает теорию пространств: метрических, линейных нормированных, гильбертовых (гл. 1 и 2) и теорию линейных операторов (и линейных функционалов) в рассматриваемых пространствах (глава 3).

В заключительной главе (гл. 4) дается применение предыдущего материала к изучению линейных интегральных уравнений и к операторному методу решения задачи Штурма — Лиувилля.

Весь материал разбит на разделы, в начале которых приводится краткая теоретическая сводка и произведен разбор решений нескольких типовых задач из общего списка задач по данной теме.

Сборник неоднороден по своему содержанию. Поскольку задачник предназначен для студентов технического вуза, он содержит сравнительно мало абстрактных теоретических упражнений. Основное внимание уделено задачам технического и вычислительного характера и задачам, позволяющим лучше уяснить то или иное понятие, или результат.

Задачник может быть использован инженерами и математиками-прикладниками для самостоятельного изучения курса «Функциональный анализ». Это тем более важно и полезно в связи с тем, что функциональный анализ является «языком современной прикладной математики».

Некоторые задачи и упражнения в учебном пособии заимствованы из книг [2], [6], [8], [10], [12].

1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Понятие метрического пространства. Полнота метрических пространств

Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, $y \in X$ ставится в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3. для любых трех элементов $x, y, z \in X$ справедливо неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Функция $\rho(x, y)$ называется *метрикой* (или расстоянием между элементами x и y). (X, ρ) обозначает метрическое пространство с метрикой ρ, если же метрика ρ фиксирована, то пишем просто X. Элементы x, y, z… — точки метрического пространства X.

Последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots \equiv \{x_n\}$, $x_n \in (X, \rho)$, $n \in N$ метрического пространства (X, ρ) *сходится к элементу* $x_0 \in (X, \rho)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, или $x_n \xrightarrow{X} x_0$ $(n \to \infty)$, или $x_n \to x_0$ (при $n \to \infty$).

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ $(n \in N)$ элементов метрического пространства X сходится к пределу $x_0 \in X$ по метрике пространства X.

Примеры метрических пространств.

1. Пространство $R = R^1$. Числовая прямая, где в качестве расстояния принято

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Сходимость в этом пространстве есть обычная сходимость.

2. Пространство (E^n, ρ_p) $(1 \leq p \leq \infty)$.

Элемент этого пространства определяется упорядоченным набором n чисел $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$, $(\xi_k \in R)$ (или $\xi_k \in C$) и метрикой: если $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$ и $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n\}$, то

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_k - \eta_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}\left|\xi_k-\eta_k\right|.$$

В частности, при p = 2, получаем евклидово n-мерное пространство R^n с метрикой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k-\eta_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Сходимость последовательности $x_m=\{\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\ldots\,\xi_n^{(m)}\}$ к элементу $x_0=\{\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\ldots\,\xi_n^{(0)}\}$ в пространстве (E^n, ρ_p) означает

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\,\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(0)}\,|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad (1\le p<\infty),\ (m\to\infty)$$

$$\max_{1\le k\le n}|\,\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(0)}\,|\to 0.$$

Сходимость по метрике пространства (E^n, ρ_p) эквивалентна сходимости по координатам.

3. Пространство $C[a, b]$.

Элементы пространства — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

Метрика вводится по формуле

$$\rho_C(x, y) = \rho(x, y) = \max_{a\le t\le b}|\,x(t) - y\,(t)\,|.$$

(равномерная метрика или Чебышевская метрика).

Сходимость последовательности по метрике пространства означает равномерную сходимость последовательности непрерывных функций $x_n(t)$ к (непрерывной) функции $x_0(t)$:

$$\rho_C(x_n, x_0) = \max_{a\le t\le b}|\,x_n(t) — x_0(t)\,| \to 0 \text{ (при } n\to\infty).$$

4. Пространство $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1\le p<\infty)$.

Элементы пространства — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$. Метрика вводится по формуле

$$\rho_p(x,y)=\rho(x,y)=\left(\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ (1\le p<\infty).$$

При p = 2 получаем среднеквадратическое расстояние между элементами.

Сходимость последовательности элементов $x_n \in \widetilde{L}_p[a,b]$ ($n \in N$) к элементу $x_0 \in \widetilde{L}_p[a,b]$ по метрике пространства означает

$$\rho_p(x_n, x_0) = \left(\int_a^b \left| x_n(t) - x_0(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ (n \to \infty).$$

В ряде вопросов полезно следующее обобщение этого пространства. Пусть задана непрерывная положительная на $[a, b]$ (или (a, b)) функция $w(t)$, назовем ее весовой функцией (весом). На множестве непрерывных функций определим метрику по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b \left| x(t) - y(t) \right|^p w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

В полученном метрическом пространстве (которое обозначим через $\widetilde{L}_{p,w}[a,b]$ сходимость имеет вид

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\int_a^b \left| x_n(t) - x_0(t) \right|^p w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

5. Пространство $D^k[a, b]$, $k \geq 1$, $k \in N$ — фиксированное число.

Элементами пространства являются k раз непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции с метрикой

$$\rho(x, y) = \max\{\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|, \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)|, \ldots$$
$$\max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\}.$$

Сходимость последовательности $x_n \in D^k[a, b]$ к элементу $x_0 \in \in D^k[a, b]$ означает равномерную сходимости последовательности $x_n(t)$ и ее производных до k-го порядка включительно к функции $x_0(t)$ и ее производным соответствующего порядка.

6. Пространство l_p $(1 \leq p \leq \infty)$.

Элементы пространства определяются упорядоченным набором $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots\}$, $\xi_n \in R$ (или $\xi_n \in \mathbb{C}$), при этом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_n \right|^p < \infty \ \ (1 \leq p < \infty) \ \text{ или } \ \sup_{n \in N} |\xi_n| < \infty \ \ (p = \infty).$$

Метрика вводится по формуле: если $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots\} \in l_p$, то

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k-\eta_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ \ (1\le p<\infty),$$

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in N} |\xi_n - \eta_n|.$$

Сходимость последовательности $x_n \in l_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $x_n = \{\xi_m^{(n)}\}$ $(n \in N)$ к элементу $x_0 = \{\xi_m^{(0)}\}$ по метрике пространства l_p означает:

1) в случае $1 \le p < \infty$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m^{(n)}-\xi_m^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (n\to\infty)$$

2) в случае $p = \infty$ покоординатную сходимость, равномерную относительно номера.

Сходимость по метрике пространства l_p называют «сходимостью в среднем порядка p», а в случае $p = 2$ — «сходимостью в среднем квадратическом».

7. Пространства $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ — лебеговы пространства.

Мера Лебега на конечном промежутке $[a, b]$ это неотрицательная счетно-аддитивная функции μE, определенная на специальном классе множеств («измеримых по Лебегу»). Этот класс включает все открытые и замкнутые подмножества отрезка $[a, b]$ (о структуре открытых и замкнутых множеств см. следующий параграф).

Для открытого множества G, являющегося объединением конечного или счетного числа непересекающихся интервалов Δ_n, полагают

$$\mu(G)=\sum_n\left|\Delta_n\right|, \text{ где } |\Delta_n| \text{ — длина интервала } \Delta_n.$$

Для замкнутого множества $F = [a, b] \setminus G$ полагают $\mu(F) = b - a - \mu(F)$.

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G и такое замкнутое множество F, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$.

Мерой измеримого (по Лебегу) множества A называется

$$\mu(A)=\sup_{F\subset A}\mu(F)=\inf_{G\supset A}\mu(G).$$

Для любого измеримого множества $A \subset [a, b]$ имеем

$0 \le \mu(A) \le b - a$.

Счетная аддитивность меры Лебега: если A_n $(n = 1, 2\ldots)$ измеримые непересекающиеся множества, то их объединение измеримо и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Множество $M \subset [a, b]$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная или счетная система отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$, что

$$M \subseteq \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n], \quad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon.$$

Две функции $x(t)$ и $y(t)$, заданные на $[a, b]$, называются *эквивалентными*, если они равны на $[a, b]$ всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Если для последовательности функций $x_n(t)$ всюду на $[a, b]$ за исключениием множества меры нуль, существует предел, равный $x_0(t)$, то говорят, что $x_n(t)$ сходится к $x_0(t)$ почти всюду на $[a, b]$. Запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{(п. в.)}.$$

В основе определения интеграла Лебега лежит понятие простой функции. Функция $x(t)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *простой*, если $[a,b] = \bigcup_n \delta_n$, где δ_n — измеримые непересекающиеся множества в конечном или счетном числе, и $x(t) = c_n$ при $t \in \delta_n$ для всех n, где c_n — некоторое постоянное число. Простая функция называется *интегрируемой по Лебегу*, если ряд $\sum_n c_n \mu(\delta_n)$, (где $\mu(\delta_n)$ — мера множества δ_n) абсолютно сходится; при этом полагают

$$(L)\int_a^b x(t)dt = \sum_n c_n \mu(\delta_n).$$

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная функция на $[a, b]$. Она называется *измеримой по Лебегу*, если множество $E = \{t,\, t \in [a, b],\, x(t) \le c\}$ измеримо при любом $c \in R$ (очевидно, любая простая функция — измерима).

Измеримая функция $x(t)$ называется *интегрируемой* (по Лебегу), если существует последовательность интегрируемых простых функций $x_n(t)$, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к $x(t)$. При этом

$$(L)\int_a^b x(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)dt,$$

где предел справа существует, конечен и не зависит от выбора последовательности $x_n(t)$, приближающей $x(t)$.

Интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана и применим к существенно более широкому классу функций.

Теорема (*об интегрируемости по Риману*). Для того, чтобы функция $x(t)$ была интегрируема по Риману на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a, b]$ и множество ее точек разрыва имело меру ноль.

Теорема (*о связи интегралов Римана и Лебега*). Если функция интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, и оба интеграла равны между собой.

Теорема (*об интегрируемости по Лебегу*). Всякая ограниченная измеримая на E функция интегрируема по Лебегу на этом множестве (предполагается, что E — множество конечной меры).

Теорема (*об интегрируемости эквивалентных функций*). Если ограниченные функции $x(t)$ и $y(t)$ эквивалентны на промежутке $[a, b]$ и одна из функций интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, то и вторая из функций также интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и выполняется

$$(L)\int_a^b x(t)dt = (L)\int_a^b y(t)dt.$$

В дальнейшем, если не оговорено, будут рассматриваться функции, интегрируемые по Риману. Поэтому знак (L) перед интегралом будет опускаться.

Пространство $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ — это множество функций $x(t)$, измеримых на отрезке $[a, b]$ и интегрируемых по Лебегу в p степени, т.е. таких, что $|x(t)|^p$ интегрируема по Лебегу.

Если считать две эквивалентные функции одним элементом, то на $L_p[a, b]$ можно ввести метрику по формуле

$$\rho_p(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сходимость последовательности $x_n(t) \in L_p \to x_0(t) \in L_p$ $(n \to \infty)$ означает

$$\rho_p(x_n, x_0) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \;\; (n \to \infty),$$

«сходимость в среднем порядка p» ($p = 2$ — «сходимость в среднем квадратическом»).

Последовательность $\{x_n\}$ ($n \in N$) элементов метрического пространства X называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*, *последовательностью Коши*), если

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Всякая сходящаяся последовательность — фундаментальна. Обратное верно не во всяком пространстве.

Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел (принадлежащий этому пространству).

Из рассмотренных выше пространств полными пространствами являются

$E^n(\rho_p)$ $(1 \le p \le \infty)$, $C[a, b]$, $D^k[a, b]$, l_p $(1 \le p \le \infty)$, $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$;

Пространство $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ — неполное пространство.

Решение типовых задач

Задача 14. Доказать интегральное неравенство Гельдера:

Пусть $x(t) \in L_p[a, b]$, $y(t) \in L_q[a, b]$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1)$.

Тогда

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Решение. Сначала докажем числовую лемму.

Лемма. Пусть u и v — положительные числа, тогда имеет место неравенство

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \le \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Действительно, введем функцию $\varphi(t) = t^\alpha - \alpha t$ ($0 < t < \infty$, при $\alpha \in (0, 1)$). Нетрудно видеть, что $\max_{0<t<\infty} \varphi(t) = \varphi(1) = 1 - \alpha$. Тогда $t^\alpha \le \alpha t + (1 - \alpha)$. Положим $t = \frac{u}{v}$, имеем $u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1 - \alpha)v$ и осталось положить $\alpha = \frac{1}{p}$.

Перейдем к доказательству неравенства Гельдера. Отметим, прежде всего, что можно считать

$$0 < \int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty, 0 < \int_a^b |y(t)|^q \, dt < \infty.$$

Если один из интегралов — 0 или ∞, то доказываемое неравенство очевидно.

Положим в лемме

$$u = \frac{|x(t)|^p}{\int_a^b |x(t)|^p \, dt}, v = \frac{|y(t)|^q}{\int_a^b |y(t)|^q \, dt}.$$

Получим

$$\frac{|x(t)|}{(\int_a^b |x(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y(t)|}{(\int_a^b |y(t)|^q \, dt)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \frac{|x(t)|^p}{\int_a^b |x(t)|^p \, dt} + \frac{1}{q} \frac{|y(t)|^q}{\int_a^b |y(t)|^q \, dt} .$$

Интегрируя почленно последнее соотношение, получаем неравенство Гельдера.

Задача 20. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = -3t + 4$ в пространствах $C[0, 2]$, $\widetilde{L}_1[0, 2]$, $\widetilde{L}_2[0, 2]$, $D^1[0, 2]$.

Решение.

1. Рассмотрим пространство $C[0, 2]$. Имеем

$\rho_C(x, y) = \max_{0 \le t \le 2} |t^3 + 3t — 4|$.

Так как функция $z(t) = t^3 + 3t — 4 = (t — 1)(t^2 + t + 4)$, то

$$|t^3 + 3t - 4| = \begin{cases} (1-t)(t^2+t+4), & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)(t^2+t+4), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\text{и} \quad |z(t)|' = \begin{cases} -3(t^2+1) & 0 \le t < 1 \\ 3(t^2+1) & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

Поэтому, учитывая значения $z(0) = 4$, $z(2) = 10$, получаем $\rho_C(x, y) = 10$.

2. В пространстве $\widetilde{L}_1[0, 2]$

$$\rho_{\widetilde{L}_1}(x, y) = -\int_0^1 (t^3 + 3t - 4) dt + \int_1^2 (t^3 + 3t - 4) dt = 6.5.$$

3. В пространстве $\widetilde{L}_2[0, 2]$ имеем

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Осиленкер Борис Петрович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебно-практическое пособие

Ответственная за выпуск *М.Э. Исмаилова*
Компьютерная правка, верстка макета *О.В. Суховой*
Дизайн обложки *Д.Л. Разумного*

Подписано в печать 27.11.2015 г. И-107. Формат 60×84/16.
Уч.-изд. 9. Усл.-печ. л. 7,3. Тираж 100 экз. Заказ 396

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет» (НИУ МГСУ).
129337, Москва, Ярославское ш., 26.
Издательство МИСИ — МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru.
Отпечатано в типографии Издательства МИСИ — МГСУ.
Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44