А. П. Веселов, Е. В. Троицкий

Лекции по аналитической геометрии

ББК 22.3
В92

Веселов А. П., Троицкий Е. В.
Лекции по аналитической геометрии.
Учебное пособие.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
152 с.
ISBN 978-5-4439-3064-0

Учебное пособие содержит конспект лекций по обязательному курсу аналитической геометрии, читаемому авторами на протяжении ряда лет для студентов первого курса механико-математического факультета МГУ.

Основной особенностью данного курса, впервые прочитанного первым автором, а затем переработанного вторым, является помещение в центр внимания теории конических сечений, что позволило, наряду с обычными аналитическими конструкциями, более явно представить геометрическую сторону предмета.

Для студентов первого курса.

Предыдущие издания книги выходили в 2002 г. (издательство МГУ) и в 2003 г. (издательство «Лань).

Подготовлено на основе книги:
Веселов А. П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. Учебное пособие. — Изд. новое. — М.: МЦНМО, 2016. — 152 с. — ISBN 978-5-4439-1064-2

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3064-0

Содержание

1. Элементы векторной алгебры

§ 1.1. Векторы в пространстве

В нашем изложении мы будем следовать наглядно-геометрическим представлениям, хотя возможен и аксиоматический подход.

Закрепленный *вектор* — направленный отрезок, т. е. упорядоченная пара в пространстве точек. Будем обозначать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, … Вектор $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}_A$. *Длина вектора* — расстояние между его концами: $|\overrightarrow{AB}| := \rho(A, B)$. В частности, длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда он нулевой. Закрепленные векторы *коллинеарны*, если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается параллельным, а следовательно, и коллинеарным любому вектору. Закрепленные векторы *компланарны*, если существует плоскость, которой они параллельны. Закрепленные векторы *равны*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Определение 1.1. Напомним, что *отношением эквивалентности* на множестве M называется некоторое множество упорядоченных пар S (т. е. $S \subset M \times M$), причем выполнены аксиомы (условие $(m, n) \in S$ обычно записывается как $m \sim n$):

- $m \sim m$ (аксиома тождества),
- если $m \sim n$, то $n \sim m$ (аксиома симметричности),
- если $m \sim n$ и $n \sim k$, то $m \sim k$ (аксиома транзитивности),

для любых $m, n, k \in M$.

В этой ситуации M распадается на непересекающиеся множества, состоящие из всех элементов, эквивалентных одному. Эти множества называются *классами эквивалентности*. Класс эквивалентности, содержащий $m \in M$, обозначается $[m]$.

Лемма 1.2. *Равенство является отношением эквивалентности на множестве закрепленных векторов.*

Доказательство очевидно. □

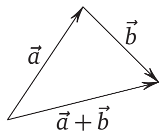
Определение 1.3. *Вектором* (или *свободным вектором*) называется соответствующий класс эквивалентности.

Будем обозначать векторы через $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$ (хотя правильнее $[\overrightarrow{AB}], [\overrightarrow{CD}], \ldots$) или $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$, а вещественные числа — через $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$

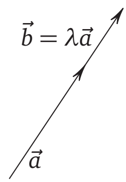
Понятия коллинеарности и компланарности переносятся на (свободные) векторы.

Линейные операции над векторами определяются следующим образом.

1. *Сложение* по правилу треугольника:



2. *Умножение* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ по следующим правилам:



1) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ коллинеарен $\vec{a}$;
2) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
3) $\vec{b}$ сонаправлен с $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противонаправлен, если $\lambda<0$.

Эти операции корректно определены на множестве (свободных) векторов.

Свойства линейных операций над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения = правило параллелограмма);
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ассоциативность сложения = правило четырехугольника);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого вектора $\vec{0}=[\vec{0}_A]$);
4) $\vec{a}+(-1)\cdot\vec{a}=\vec{0}$ (существование обратного);
5) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность);

$$\left.\begin{array}{l} 6)\ (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \\ 7)\ \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \end{array}\right\} \text{(дистрибутивность);}$$

8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (единица).

Определение 1.4. Множество с операцией сложения и операцией умножения на числа, удовлетворяющими этим свойствам, называется *линейным пространством*.

Заметим, что можно рассматривать эти свойства как аксиомы и тогда все основные утверждения про операции над геометрическими векторами могут быть выведены из этих аксиом без привлечения конкретного описания операций (но, например, это не относится к длинам и т. п.). В этом смысле аксиомы образуют полную систему. Более того, она излишне полна (подумайте, что можно выбросить).

§ 1.2. Базисы и координаты

Определение 1.5. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ называется вектор (точнее, выражение вида) $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$. Если все α_i равны нулю, то линейная комбинация называется *тривиальной*, а в противном случае — *нетривиальной*.

Определение 1.6. Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *линейно зависимы*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, т. е. найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. В противном случае, т. е. если из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ всегда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \vec{0}$, векторы *линейно независимы*.

Лемма 1.7. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю: $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Один из коэффициентов, скажем α_i, не равен нулю. Тогда

$$\vec{a}_i = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_{i-1} + \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_{i+1} + \ldots \\ \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_n.$$

Достаточность. Пусть

$$\vec{a}_i = \beta_1\vec{a}_1 + \ldots + \beta_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \ldots + \beta_n\vec{a}_n.$$

Тогда

$$(-1)\vec{a}_i + \beta_1\vec{a}_1 + \ldots + \beta_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \ldots + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

— нетривиальная (первый коэффициент — ненулевой) линейная комбинация, равная нулю. □

Лемма 1.8. *Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — линейно зависимая система векторов. Тогда $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n$ — линейно зависимая система, каковы бы ни были векторы $\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n$.*

Доказательство. Если $\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}$ — нетривиальная комбинация, то $\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_k\vec{a}_k+0\cdot\vec{a}_{k+1}+\ldots+0\cdot\vec{a}_n=\vec{0}$ также нетривиальная комбинация. □

Лемма 1.9. 1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

2. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

3. *Четыре вектора всегда линейно зависимы.*

Доказательство. 1. По определению операции умножения на число.

2. По лемме 1.7 из линейной зависимости следует, что, скажем, $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{c}$ компланарен $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обратно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда они линейно зависимы и по лемме 1.8 векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $\vec{c}$ можно представить в виде $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, «достроив параллелограмм».

3. Если какие-либо три вектора компланарны, то они линейно зависимы по предыдущему пункту, а по лемме 1.8 зависимы все четыре. Если же таких трех векторов среди $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет, то пары $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарны, а следовательно, определяют (с точностью до параллельного переноса) две плоскости, которые не параллельны (иначе все четыре были бы компланарны). Тогда направляющий вектор f прямой пересечения раскладывается, с одной стороны, в линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а с другой — $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (ср. с доказательством п. 2):

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=f=\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}.$$

Если при этом один из коэффициентов, скажем α, равен 0, то $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ компланарны, что противоречит предположению. Таким образом,

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}-\delta\vec{d}=\vec{0}$$

— нетривиальная комбинация. □

Определение 1.10. *Базисом* на прямой (соответственно на плоскости, в пространстве) называется упорядоченный набор из одного независимого вектора (соответственно двух, трех линейно независимых векторов).

Замечание 1.11. Для прямой это просто означает, что вектор ненулевой.

Теорема 1.12. *Всякий вектор пространства (соответственно плоскости, прямой) однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов данного базиса.*

Доказательство. *Докажем существование комбинации.* Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — данный базис, а $\vec{a}$ — произвольный вектор. По лемме 1.9 (п. 3) векторы $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы, так что существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha\vec{a} + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}$. Пусть $\alpha = \vec{0}$. Тогда $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, что противоречит линейной независимости векторов базиса. Значит, $\alpha \neq 0$, и искомая комбинация имеет вид

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_3.$$

Докажем единственность. Пусть имеются две различные тройки: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, причем

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3.$$

Тогда $\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\vec{e}_3$ — нетривиальная комбинация, что противоречит линейной независимости базиса.

Аналогично для прямой и плоскости. □

Определение 1.13. *Координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{a}$ *относительно базиса* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются такие (однозначно определенные) числа α_1, α_2, α_3, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. Будем записывать также $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Лемма 1.14. *Координаты суммы соответствующих векторов равны сумме координат. Координаты вектора $\lambda\vec{a}$ равны $\lambda\alpha_1$, $\lambda\alpha_2$, $\lambda\alpha_3$ (в обозначениях определения).*

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$. По свойствам 1, 2, 5, 6, 7 имеем

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= (\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3)+(\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\beta_3\vec{e}_3) = \\
&= \alpha_1\vec{e}_1+\beta_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\beta_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3+\beta_3\vec{e}_3 = \\
&= (\alpha_1+\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\vec{e}_2+(\alpha_3+\beta_3)\vec{e}_3, \\
\lambda\vec{a} &= \lambda(\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3) = \\
&= \lambda(\alpha_1\vec{e}_1)+\lambda(\alpha_2\vec{e}_2)+\lambda(\alpha_3\vec{e}_3) = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1+(\lambda\alpha_2)\vec{e}_2+(\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.
\end{aligned}$$ □

Определение 1.15. *Аффинная система координат* в пространстве задается выбором *репера* — произвольной точки O и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Координаты точки X относительно репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ определяются как координаты вектора $\overrightarrow{OX}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ (их мы будем обозначать латинскими буквами). Обозначение: $X(x_1, x_2, x_3)$.

Лемма 1.16. *Пусть* $X(x_1, x_2, x_3)$ *и* $Y(y_1, y_2, y_3)$ *— координаты двух точек. Тогда координаты вектора* $\overrightarrow{XY}$ *относительно базиса, входящего в данную аффинную систему координат, равны* $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$.

Доказательство. По определению аффинной системы координат $\overrightarrow{OX}(x_1, x_2, x_3)$ и $\overrightarrow{OY}(y_1, y_2, y_3)$, а $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$. По лемме 1.14 получаем требуемый результат. □

Определение 1.17. Базис называется *ортогональным*, если векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ перпендикулярны. Если они к тому же единичной длины, то базис называется *ортонормированным*. Аффинная система координат называется *прямоугольной*, если соответствующий базис ортонормирован.

§ 1.3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть две точки A и B заданы своими аффинными координатами (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) (в некотором репере) и дано отношение (для начала, положительное) $\dfrac{\lambda}{\mu}$. Найдем аффинные координаты (x_1, x_2, x_3) такой точки X отрезка AB, что $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{\lambda}{\mu}$, т. е. точки, делящей отрезок в данном отношении.

Координаты векторов $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{XB}$ в данном базисе по лемме 1.16 равны соответственно $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$ и $(b_1 - x_1, b_2 - x_2, b_3 - x_3)$. По лемме 1.14 условие отношения (поскольку векторы сонаправлены) перейдет в совокупность условий

$$\mu(x_1 - a_1) = \lambda(b_1 - x_1),$$
$$\mu(x_2 - a_2) = \lambda(b_2 - x_2),$$
$$\mu(x_3 - a_3) = \lambda(b_3 - x_3),$$

имеющую единственное решение

$$x_i = \frac{\mu a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что можно рассматривать и отрицательные λ или μ, так что условие деления в этой общей форме будет иметь вид

$$\mu\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}.$$

Формулы ответа будут, конечно, теми же, что и выше.

§ 1.4. Скалярное произведение

Определение 1.18. *Скалярным произведением* двух (ненулевых) векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Если один из векторов нулевой, то положим $(\vec{a}, \vec{b}) := 0$.

Лемма 1.19. *Пусть в некотором ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты a_1, a_2, a_3. Тогда*

$$a_i = (\vec{a}, \vec{e}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Координаты вектора могут быть найдены путем проекций в прямоугольном параллелепипеде (так как единственность доказана). Таким образом,

$$a_i = |\vec{a}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_i| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = (\vec{a}, \vec{e}_i). \qquad \square$$

Теорема 1.20. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами, определяющими его однозначно*:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (*симметричность*);

2) $(\vec{a} + \vec{b}, c) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}, \vec{b})$ ((2)+(3)= *линейность по первому аргументу*);

4) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$, *в частности*, $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (*положительность и связь с длиной*).

Доказательство. Пункты 1, 3 и 4 очевидны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то п. 2 выполняется. Если же $\vec{c} \neq \vec{0}$, то можно путем деления на $|\vec{c}|$ и применения п. 1 и 3 перейти к случаю $|\vec{c}| = 1$. В этой ситуации рассмотрим ортонормированный базис $\vec{e}_1 = \vec{c}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда соответствующие скалярные произведения совпадают с первыми координатами:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{e}_1) = a_1, \quad (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{e}_1) = b_1.$$

Поскольку координаты суммы равны сумме координат, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = a_1 + b_1 = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

Покажем, что свойства 1—4 однозначно определяют значения скалярного произведения. Свойство 4 определяет $(\vec{a},\vec{a})$. В силу п. 1 и 4 имеем

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})=2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b}),$$

$$(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}\cdot\big((\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})\big). \qquad \square$$

Теорема 1.21. *В произвольном ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ скалярное произведение имеет вид*

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Доказательство. Имеем

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,\vec{b})\overset{(2)}{=}\sum_{i=1}^{3}(a_i\vec{e}_i,\vec{b})\overset{(3)}{=}\sum_{i=1}^{3}a_i(\vec{e}_i,\vec{b})\overset{(1)}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}a_i(\vec{b},\vec{e}_i)=\sum_{i=1}^{3}a_i(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,\vec{e}_i)\overset{(2),(3)}{=}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad \square$$

Следствие 1.22. *В прямоугольной системе координат угол между векторами определяется формулой*

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

§ 1.5. Площадь, объем и ориентация

Вычислим площадь S параллелограмма $\Pi(\vec{a},\vec{b})$, натянутого на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости. Пусть задан ортонормированный базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ плоскости, так что $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$. Тогда (если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ)

$$S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$

$$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)}}=$$

$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}=$$

$$=\sqrt{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2-2a_1b_1a_2b_2}=|a_1b_2-a_2b_1|.$$

Напомним, что выражение $a_1 b_2 - a_2 b_1$ называется *определителем* или *детерминантом* матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ и обозначается $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ или просто $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Определение 1.23. *Ориентированной площадью параллелограмма* $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется величина $S_{or}(\vec{a}, \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Ее абсолютная величина (в случае ортонормированного базиса) совпадает с площадью параллелограмма, а знак (в случае линейно независимых $\vec{a}$ и $\vec{b}$) называется *ориентацией пары* $\vec{a}, \vec{b}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Лемма 1.24. *Ориентированная площадь обладает следующими свойствами*:

1) $S_{or}(\vec{a}, \vec{b}) = -S_{or}(\vec{b}, \vec{a})$ (*кососимметричность*);

2) $S_{or}(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = S_{or}(\vec{a}, \vec{c}) + S_{or}(\vec{b}, \vec{c})$;

3) $S_{or}(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda S_{or}(\vec{a}, \vec{b})$ ((2) + (3) = *линейность по первому аргументу*);

4) $S_{or}(\vec{a}, \vec{a}) = 0$.

Доказательство. Все утверждения следуют немедленно из определения. ☐

Лемма 1.25. *Ориентация пары $\vec{a}, \vec{b}$ относительно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ положительна, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит в том же направлении, что и от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$.*

Доказательство будет ниже проведено сразу для трехмерного случая. ☐

Определение 1.26. *Ориентированным объемом параллелепипеда* $\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ пространства, относительно базиса $\varepsilon := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется определитель

$$V_{or}^{\varepsilon}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \\ = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 a_3.$$

В случае линейно независимых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ знак этого определения называется *ориентацией тройки* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

После доказательства некоторых свойств мы докажем следующее утверждение, оправдывающее это название.

Теорема 1.27. *Абсолютная величина ориентированного объема параллелепипеда, построенного на трех векторах, относительно ортонормированного базиса равна объему этого параллелепипеда.*

Лемма 1.28. *Пусть фиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и некоторый вектор вращается в плоскости или вокруг оси с постоянной скоростью. Тогда его коэффициенты являются непрерывными функциями времени. То же верно для растяжения или сжатия вектора.*

Доказательство. Поскольку компоненты вектора относительно одного фиксированного базиса являются линейными функциями коэффициентов относительно другого базиса (мы это докажем в § 4.1 без использования данной леммы), для доказательства леммы достаточно рассмотреть удобный базис. Для вращения таковым будет следующий базис: $\vec{e}_3$ — ось вращения, причем если смотреть с конца вектора $\vec{e}_3$, то это вращение осуществляется против часовой стрелки, $\vec{e}_1$ — направление проекции начального положения вектора. Тогда (с точностью до выбора скорости вращения) вращающийся вектор будет иметь координаты $(\alpha\cos t, \alpha\sin t, \beta)$. Для растяжения же координаты вектора имеют вид $(\alpha t, \beta t, \gamma t)$, где t пробегает некоторый отрезок. Эти формулы показывают искомую непрерывную зависимость. □

Лемма 1.29 (из курса алгебры). *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк является линейной комбинацией других.*

Лемма 1.30. *Ориентированный объем параллелограмма, построенного на трех векторах, равен нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из предыдущей леммы. □

Под *непрерывной деформацией* будем понимать семейство базисов, каждая координата каждого вектора которых является непрерывной функцией параметра.

Теорема 1.31. *Базис $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет положительную ориентацию относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ тогда и только тогда, когда непрерывной деформацией в пространстве базисов можно его перевести в $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.*

Доказательство. Допустим, такая деформация существует. Тогда определитель $V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t))$ является непрерывной функцией параметра t и принимает все промежуточные значения. В частности, если $V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то в какой-то момент должен получиться 0, так как $V^{\varepsilon}_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$. Это противоречит предыдущей лемме.

Обратно, построим по лемме 1.28 непрерывную деформацию: сначала совместим $\vec{a}$ с $\vec{e}_1$ так, чтобы вектор $\vec{b}$ лежал в плоскости $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ с той же стороны, что и $\vec{e}_2$. Затем совместим $\vec{b}$ с $\vec{e}_2$. В силу положительности определяется $\vec{e}_3$ и $\vec{c}$ лежат с одной стороны от плоскости и их можно совместить. □

Следствие 1.32 (из доказательства)**.** *Два базиса имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда с конца третьего вектора кратчайшее движение от первого ко второму осуществляется в одну и ту же сторону* (*либо против, либо по часовой стрелке*) *для обоих базисов.*

Следствие 1.33. *Все базисы распадаются на два класса, представителей каждого из которых можно связать непрерывной деформацией.*

Определение 1.34. *Заданием ориентации* называется выбор одного из этих классов. Обычно при движении «против» (см. следствие 1.32) ориентация называется правой, а в другом случае — левой. Пространство с выбранной ориентацией будем называть *ориентированным пространством*.

Замечание 1.35. Можно показать, что матрица из координат третьего базиса в первом равна произведению матриц третьего во втором и второго в первом. Определители при этом перемножаются. Таким образом, все базисы внутри одного класса имеют положительный объем друг относительно друга.

Лемма 1.36. *Ориентация векторов $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ противоположна ориентации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Доказательство. Повернем тройку $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ как твердое тело так, чтобы вектор $\vec{b}$ совпал с $\vec{a}$, а $\vec{a}$ — с $\vec{b}$. Тогда $\vec{c}$ и образ $\vec{c}$ окажутся с разных сторон от плоскости $\vec{a}, \vec{b}$. □

Определение 1.37. *Ориентированным объемом* параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *ориентированного пространства*, называется число $V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, равное по абсолютной величине объему этого параллелепипеда и имеющее знак «+», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована, и знак «−» в противном случае.

Заметим (как видно из обозначения), что новое определение не связано с конкретным базисом.

Определение 1.38. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ориентированном пространстве называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ и определяемый следующим образом.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **неколлинеарны**, то $\vec{c}$ обладает следующими свойствами:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$;
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет положительную ориентацию.

По определению ориентации такой вектор $\vec{c}$ существует и однозначно определен.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **коллинеарны**, то $\vec{c} := 0$.

Лемма 1.39. *Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — положительно ориентированный ортонормированный базис. Тогда $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$, $[\vec{e}_1, \vec{e}_3] = -\vec{e}_2$, $[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1$.*

Доказательство. Очевидно. □

Определение 1.40. Число $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle := ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ называется *смешанным произведением* тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Теорема 1.41. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle := V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Доказательство. То, что знаки совпадают, сразу следует из определения ориентации. Проверим совпадение абсолютных величин, т. е. что модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда. Имеем

$$|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle| = |\,[\vec{a}, \vec{b}]\,| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos \measuredangle(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}])| = S \cdot h = |V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

поскольку вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, натянутой на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Здесь через S обозначена площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а h — соответствующая высота параллелепипеда. □

Теорема 1.42. *Смешанное произведение кососимметрично по любой паре аргументов и линейно по каждому из них*:

1) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle$;
2) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$; $\quad \langle \lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$;
$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$; $\quad \langle \vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$;
$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \rangle$; $\quad \langle \vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Доказательство. 1. По предыдущему утверждению абсолютная величина (т. е. объем параллелепипеда) не меняется. Утверждение про знаки следует из леммы 1.36.