Е. А. Морозова, Е. Г. Скляренко

Аналитическая геометрия

Методическое пособие

УДК 513
ББК 22.151
М80

Морозова Е. А., Скляренко Е. Г.
Аналитическая геометрия. Методическое пособие.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
96 с.
ISBN 978-5-4439-3023-7

В книге разобраны около 100 типовых задач различной трудности, охватывающих почти все разделы программы по аналитической геометрии. Приведено более 20 вопросов для самоконтроля.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей университетов.

Предыдущее издание книги вышло в 2004 г. (издательство мехмата МГУ).

Подготовлено на основе книги:
Морозова Е. А., Скляренко Е. Г.
Аналитическая геометрия. Методическое пособие. — Новое изд. —
М.: МЦНМО, 2016. — 96 с. — ISBN 978-5-4439-1023-9

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3023-7

1. Векторная алгебра

1.1. Векторы. Операции над векторами

Свободные векторы. Операции над векторами: *сложение векторов, умножение вектора на число.*

[1; гл. 2, § 1, 2; задачи 2, 5]
[2; 1.1]
[3; 65, 66, 69—71, 74—77].

Пример 1. Докажите, что для любого конечного набора точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (в пространстве) существует и единственна точка M, для которой

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}.$$

Решение. Пусть O — любая точка. Предположим, что M существует, тогда $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_i}$. Просуммировав по i, получим $n \cdot \overrightarrow{OM} = \sum\limits_i \overrightarrow{OA_i}$, или $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n} \sum\limits_i \overrightarrow{OA_i}$. Этим установлена единственность. Проверка показывает, что точка M искомая: $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}$ и $\sum\limits_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$. □

1.2. Базисы и координаты

Линейная зависимость векторов, геометрический смысл линейной зависимости. Проекции векторов. Координаты вектора. Радиус-векторы точек. Аффинная система координат.

[1; гл. 2, § 4—7]
[2; 1.2]
[3; 81—89]

1.3. Деление направленного отрезка в данном отношении

[1; гл. 1, § 6, гл. 3, § 3; задачи 1, 3, 4]
[2; 1.3]
[3; 6—15, 92, 93]

Пример 2. В точках $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ помещены массы m_1 и m_2. Найдите координаты (x, y, z) центра тяжести этой системы материальных точек (система координат аффинная).

Решение. Центр тяжести C лежит между точками A и B и делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\dfrac{m_2}{m_1}$. Поэтому для радиусов-векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеем

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \dfrac{m_2}{m_1} \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2},$$

следовательно,

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},$$

и аналогично для y и z. □

Пример 3. Найдите точку пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (система координат аффинная).

Решение. Пусть S — точка пересечения медиан треугольника ABC. Обозначим через D середину отрезка BC. Координаты точки D имеют вид

$$x_D = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_D = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Точка S делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении $2:1$, поэтому координаты точки S имеют вид

$$x_S = \frac{x_1 + 2x_D}{1+2} = \frac{x_1 + 2\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_3 + x_3}{3}$$

и аналогично

$$y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$ □

Замечание. Методом полной индукции доказывается, что координата x центра тяжести системы из n точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, \ldots, n$, в которых помещены массы, соответственно равные $m_1, m_2, \ldots m_n$, определяется по формуле

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

и аналогично для y и z.

Пример 4. Три последовательные вершины трапеции $ABCD$ находятся в точках $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найдите четвёртую вершину D этой трапеции, зная, что длина основания $|\overrightarrow{AD}|$ равна 15. Найдите также точку M пересечения диагоналей трапеции и точку S пересечения её боковых сторон.

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{BC}(8,4,1),\quad |\overrightarrow{BC}|=9,\quad |\overrightarrow{AD}|=15,\quad \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{5}{3}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ параллельны (как основания трапеции) и одинаково направлены (по условию $\overrightarrow{AB}$ — боковая сторона трапеции), в силу предыдущего

$$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}=\left(\frac{40}{3},\frac{20}{3},\frac{5}{3}\right),$$

и поэтому $D=\left(\frac{31}{3},\frac{14}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Так как треугольник AMD подобен треугольнику CMB, получаем, что

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}}=\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{5}{3}.$$

По формуле деления отрезка $\overrightarrow{AC}$ в данном отношении

$$M=\left(\frac{9}{2},3,\frac{17}{8}\right),$$

и из подобия треугольников ASD и BSC находим

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}=-\frac{5}{3}.$$

Снова применяя формулу деления отрезка в данном отношении к отрезку $\overrightarrow{AB}$, находим $S(7,8,9)$. □

1.4. Скалярное произведение

Определение скалярного произведения и его основные свойства. Выражение скалярного произведения двух векторов через координаты этих векторов. Длина векторов. Угол между векторами. Условие перпендикулярности векторов. Направляющие косинусы.

[1; гл. 4, § 1 (п. 2), § 2, задачи 7—12]

[2; 1.4]

[3; 96, 99—101, 104, 105, 107, 111, 113, 120, 121]

Пример 5. Найдите координаты центра M и радиус r окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-2,-2)$, $B(2,6)$, $C(5,-3)$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ — центр окружности, описанной около треугольника ABC, тогда

$$|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{CM}|,\quad\text{или}\quad |\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{BM}|^2=|\overrightarrow{CM}|^2,$$

или

$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y+3)^2,$$

или

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+(y-6)^2,\\(x-2)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y+3)^2,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}8x+16y-32=0,\\6x-18y+6=0,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x+2y-4=0,\\x-3y+1=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=2$, $y=1$. Центр окружности: $M(2, 1)$. Радиус окружности:

$$r=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(2+2)^2+(1+2)^2}=5. \qquad \square$$

Пример 6. Найдите вектор $\vec{c}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{a}(8, 4, 1)$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{b}(2, -2, 1)$.

Решение. Вектор $\vec{a}-\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, поэтому $\vec{a}-\vec{c}=$ $=(2t, -2t, t)$, откуда $\vec{c}=(8-2t, 4+2t, 1-t)$. Имеем $(\vec{b}, \vec{c})=0$, или $2(8-2t)-2(4+2t)+1-t=9-9t=0$, откуда $t=1$. $\square$

Ответ. $\vec{c}=(6, 6, 0)$.

Пример 7. Найдите сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора $\vec{a}$ на стороны равностороннего треугольника ABC.

Решение. Выберем систему координат: начало в точке A, $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$, тогда $(\vec{e}_1, \vec{e}_1)=1$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_2)=1$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)=|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Пусть в этой системе $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$. Вычислим проекцию $\vec{a}_{\overrightarrow{AB}}$ вектора $\vec{a}$ на $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{a}_{\overrightarrow{AB}}=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{e}_1, \vec{a})\cdot\vec{e}_1=|\vec{a}|\cdot\frac{(\vec{e}_1, \vec{a})}{|\vec{a}|}\cdot\vec{e}_1=\left(a_1+\frac{1}{2}a_2\right)\vec{e}_1.$$

Аналогично вычислим проекцию $\vec{a}_{\overrightarrow{AC}}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ и проекцию $\vec{a}_{\overrightarrow{CB}}$ на вектор $\overrightarrow{CB}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\overrightarrow{AC}}&=\left(\frac{1}{2}a_1+a_2\right)\vec{e}_2;\\
\vec{a}_{\overrightarrow{CB}}&=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2, \vec{e}_1-\vec{e}_2)(\vec{e}_1-\vec{e}_2)=\\
&=(a_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1)+a_2(\vec{e}_2, \vec{e}_1)-a_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2)-a_2(\vec{e}_2, \vec{e}_2))(\vec{e}_1-\vec{e}_2)=\\
&=\left(a_1+\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1-a_2\right)(\vec{e}_1-\vec{e}_2)=\\
&=\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2\right)(\vec{e}_1-\vec{e}_2).
\end{aligned}$$

Сложим полученные равенства:

$$\vec{a}_{\overrightarrow{AB}} + \vec{a}_{\overrightarrow{AC}} + \vec{a}_{\overrightarrow{CB}} =$$
$$= \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) =$$
$$= \frac{3}{2}(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = \frac{3}{2}\vec{a}. \qquad \square$$

1.5. Площадь, объём и ориентация

Понятие об ориентации плоскости и пространства. Угол от одного вектора до другого на плоскости. Площадь ориентированного параллелограмма, объём ориентированного параллелепипеда.

[1; гл. 4, § 3, гл. 7, § 1]
[2; 1.5]
[3; 123—127]

Пример 8. Даны три вектора

$$\overrightarrow{OA} = (8, 4, 1), \quad \overrightarrow{OB} = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{OC} = (4, 0, 3),$$

отложенные от одной точки O. Найдите направляющий (единичный) вектор луча, выходящего из точки O и образующего с рёбрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ трёхгранного угла $OABC$ равные острые углы. Установите, лежит ли луч с найденным направляющим вектором внутри или вне трёхгранного угла $OABC$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OD} = (x, y, z)$ — единичный вектор, образующий с рёбрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ равные острые углы. Тогда будут равны между собой и косинусы этих углов, т. е.

$$\frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|},$$

или, в координатах,

$$\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z,$$

так как $|\overrightarrow{OD}| = 1$.

Приравнивая первое и третье выражения, стоящие в этом равенстве, второму, после преобразований получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y - z = 0, \\ x + 5y - 2z = 0, \end{cases}$$

откуда находим $z = 0$. Полагая, например, $y = 1$, найдём $x = -5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор $\overrightarrow{OD} = (-5, 1, 0)$

образует с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равные тупые углы, а вектор $\overrightarrow{OD}' = -\overrightarrow{OD} = (5, -1, 0)$ — равные острые углы.

Так как $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{26}$, единичным вектором, удовлетворяющим всем условиям задачи, будет вектор

$$\overrightarrow{OD}'' = \frac{\overrightarrow{OD}'}{|\overrightarrow{OD}'|} = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, 0\right).$$

Говорят, что луч, выходящий из вершины трёхгранного угла, лежит внутри трёхгранного угла, если он лежит по ту же сторону от плоскости каждой грани трёхгранного угла, что и ребро, не принадлежащее этой грани.

Чтобы установить, лежит ли луч с направляющим вектором $\overrightarrow{OD}'$ внутри или вне трёхгранного угла $OABC$, сравним с ориентацией векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ориентацию каждой из троек векторов

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD}',$$

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}',\ \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OD}',\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}.$$

Детерминант, составленный из координат векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ (в этом порядке), есть

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Детерминант, составленный из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}'$ (в этом порядке), есть

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Отсюда следует, что лучи с направляющими векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}'$ лежат по разные стороны от грани AOB, т. е. луч, образующий с рёбрами трёхгранного угла $OABC$ равные острые углы, лежит вне этого трёхгранного угла. □

1.6. Векторное произведение двух векторов, смешанное произведение трёх векторов

[1; гл. 9, § 4 (п. 1.2)]
[2; 1.5]
[3; 132—135, 139—150, 154—158, 166, 175, 178, 182]

Содержание