

# МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №2 (780)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

Тема номера	Исследования	На кружке	ЕГЭ
Математика в реальной жизни	Международное исследование PISA: общие итоги	Математика выборов	Задачи с целочисленными неизвестными
	с. 4	с. 16	с. 36



ЗАДАЧИ НА КАРТЕ МОСКВЫ

ДАЛЕКО ЛИ, БЛИЗКО ЛИ, ВЫСОКО ЛИ, НИЗКО ЛИ



С. 64

Методический журнал  
для учителей математики  
Издается с 1992 г.  
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО  
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,  
МОСКВА, 119002

Издается совместно с  
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ  
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ  
[raum.math.ru](http://raum.math.ru)

РЕДАКЦИЯ:  
Главный редактор: Л. РОСЛОВА  
Ответственный секретарь:  
Т. ЧЕРКАВСКАЯ  
Редакторы: П. КАМАЕВ,  
О. МАКАРОВА, И. КОГАН  
Корректор: Л. ГРОМОВА  
Верстка: Л. КУКУШКИНА  
Дизайн обложки: Э. ЛУРЬЕ  
Дизайн макета: И. ЛУКЬЯНОВ

8 (499) 241-89-79  
[mat@mccme.ru](mailto:mat@mccme.ru)  
[mat@1september.ru](mailto:mat@1september.ru)

По вопросам распространения  
обращаться по телефону (499) 745-80-31  
e-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)

Иллюстрации:  
[depositphotos.com](http://depositphotos.com),  
[lickr.com](http://lickr.com) (Nickolas Titkov,  
Dennis Michelle, Richard Anderson,  
Andrew Barkhatov)  
[photopanorama.livejournal.com](http://photopanorama.livejournal.com)

**Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437  
от 14.07.16 в Роскомнадзоре**

Подписано в печать: 15.01.2017

Для получения доступа  
к журналу «Математика»  
в электронном виде  
необходима регистрация  
школы в системе «СтатГрад».  
Подробнее см. на сайте  
<https://statgrad.org/#2619>

## В НОМЕРЕ

4 В УЧИТЕЛЬСКОЙ  
Международное исследование PISA: общие итоги

8 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МАСТЕРСКАЯ  
Л. Рослова  
Задачи из реальной жизни

11 НА УРОКЕ / ОТКРЫТЫЙ УРОК  
Е. Выгонная  
Тема урока: «Масштаб». 6 класс

16 ПОСЛЕ УРОКА / ВНЕУРОЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ  
А. Шкловер  
Математика выборов

29 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ПРАКТИКУМ  
А. Шевкин  
Вокруг задачи Наполеона

32 НА УРОКЕ / ЭКЗАМЕНЫ  
С. Шестаков  
Задачи ОГЭ и ЕГЭ с экономическим содержанием. Тема 2

36 С. Шестаков  
Задачи с целочисленными неизвестными

43 ПОСЛЕ УРОКА / ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ  
С. Рамоданов  
XXV Межрегиональная олимпиада школьников  
по математике и криптографии

51 И. Барышев, А. Блинков, А. Иванищук, Н. Наконечный, П. Чулков, И. Эльман  
Турнир Архимеда. Московская математическая регата. 8 класс

55 ПОСЛЕ УРОКА / НА КРУЖКЕ  
А. Блинков  
Кружок по геометрии. Занятия 13 и 14

63 ПОСЛЕ УРОКА / В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК  
Н. Авилов  
Минус шарик

64 В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ / НА СТЕНД  
Задачи на карте Москвы. Задача 2: «Далеко ли, близко ли, высоко ли,  
низко ли»

# НЕ СТАЛО ВИТАЛИЯ АРНОЛЬДА

Л. РОСЛОВА

■ *Математическое образование понесло тяжёлую утрату.* Казенные, штампованные слова. В данном случае они точны, как никогда. *Нестандартный человек.* Еще один штамп. И снова уместный.

Поначалу он обратил на себя внимание своим нестандартным обликом, сочетанием веселой шумливости и внимательного острого взгляда из-под толстых стекол довольно массивных, как и он сам, очков. Потом понимаешь и ценишь его нестандартные идеи. И человеческие качества.

Вспоминаю ежегодную летнюю школу «Современная математика» в Дубне, им придуманную и организованную. Потому что многие прошли через нее: кто-то учился, кто-то учил. У меня еще целая футболка с самой первой школы, подаренная им. Я приезжала один раз и запомнила лекцию про мыльные пузыри и ту чудную атмосферу, которая возникает исключительно в кругу людей науки. Но сколько усилий надо приложить, чтобы все это состоялось! Это действительно уникальный проект, и очень хочется надеяться, что он продолжится.

Многие вспоминают созданный им и выложенный в Интернете электронный архив «Кванта» — заходи, бери, пользуйся. И только кажется, что все это просто — сканируй и выкладывай. Надо было не только организовать, но и продумать до мелочей — чтобы пользователю было комфортно. Его отношение к книгам, журналам вообще уникально: он любил сберегать историю, исторический опыт, ценил воспоминания. Он не раз помогал мне с журналом, и не только советами. Помню его традиционный вопрос, когда я заглядывала в его комнатку: «Ты книжку видела?» Он рылся на столе, в шкафу, в каких-то коробках, доставал и говорил: «Возьми почитай, тебе будет интересно».

Я вспоминаю подготовку заключительного этапа Всероссийской олимпиады 2004 года, многостраничный список его требований как руководителя московской команды к условиям проживания детей (и их сопровождающих), питания, отдыха, времяпрепровождения (Где теннисные столы? Почему окна выходят на железную дорогу? Как дети будут отдыхать? И пр.). Для него не было мелочей. И когда он сказал, что все нормально, я поняла, что могу гордиться собой и организаторами.

Помню, как мы везли на автобусе с вокзала в МЦНМО школьников, выступивших на олимпиаде, там были москвичи и китайская команда — традиционный гость наших олимпиад. Он спросил: «Хочешь, экскурсию проведу для китайцев?» И когда автобус остановился у ворот Центра, больше всего на свете в тот момент я жалела, что мы приехали так быстро. Ни из одной книги, ни от одного экскурсовода я не слышала о Москве ничего более интересного!

Перед Новым годом хотела ему позвонить, снова посоветоваться по поводу журнала. Отложила на «после праздников». Теперь навсегда...



[www.mccme.ru/dubna/2015/photos.htm](http://www.mccme.ru/dubna/2015/photos.htm)

Министерство образования и науки РФ  
Федеральная служба по надзору  
в сфере образования и науки

Федеральный институт  
оценки качества образования  
Центр национальных и  
международных исследований

Институт стратегии развития образования  
Российской академии образования  
Центр оценки качества образования

# МЕЖДУНАРОДНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ PISA: ОБЩИЕ ИТОГИ

## Основные результаты

В 2015 г. сохранились положительные тенденции в результатах российских учащихся 15-летнего возраста по всем направлениям функциональной грамотности.

В 2015 г., по сравнению с предыдущим циклом исследования 2012 г., повысились средние результаты российских учащихся 15-летнего возраста:

- по математической грамотности на 12 баллов (с 482 до 494 баллов);
- по читательской грамотности на 20 баллов (с 475 до 495 баллов).

Результаты российских учащихся по естественнонаучной грамотности практически не изменились.

Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся PISA (Programme for International Student Assessment) является мониторинговым исследованием качества общего образования, которое отвечает на вопрос «Обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие обязательное общее образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в современном обществе, то есть для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений?». Данная программа осуществляется Организацией Экономического Сотрудничества и Развития (OECD — Organization for Economic Cooperation and Development). Исследование проводится трехлетними циклами начиная с 2000 года.

В исследовании 2015 г. основное внимание уделялось естественнонаучной грамотности и выявлению тенденций развития естественнонаучного образования в мире за последние годы.

Около 536 тысяч 15-летних учащихся из 70 стран мира приняли участие в исследовании.

Выборка российских учащихся 15-летнего возраста в 2015 г. включала 6036 обучающихся из 210 образовательных организаций 42 регионов России. В выборку вошли 15-летние учащиеся основной и средней школы (7% — 7–8-е классы, 80% — 9-й класс, 10% — 10–11-е классы), а также учащиеся и студенты образовательных организаций среднего профессионального образования (3%).

Исследование PISA-2015 проводилось полностью на компьютерной основе с использованием нового типа интерактивных задач по естественнонаучной грамотности.

Результаты исследования PISA в 2015 г. дают ответы на следующие вопросы.

1. Изменилось ли состояние российского образования с позиций международных стандартов, основанных на компетентностном подходе?

2. В каком направлении следует совершенствовать российское образование для повышения конкурентоспособности выпускников российских школ?

## Математическая грамотность

### Результаты стран по математической грамотности

	Страна	Средний балл	Место страны среди других стран
1	Сингапур	564 ♀	1
2	Гонконг (Китай)	548 ♀	2–3
3	Макао (Китай)	544 ♀	2–4
4	Тайвань	542 ♀	2–4
5	Япония	532 ♀	5–6
6	Китай	531 ♀	4–7
7	Республика Корея	524 ♀	6–9
8	Швейцария	521 ♀	7–10
9	Эстония	520 ♀	7–10
10	Канада	516 ♀	8–12
11	Нидерланды	512 ♀	10–14
12	Дания	511 ♀	10–15
13	Финляндия	511 ♀	10–15
14	Словения	510 ♀	11–15
15	Бельгия	507 ♀	12–18
16	Германия	506 ♀	12–19
17	Польша	504 ♀	14–19
18	Ирландия	504 ♀	15–19
19	Норвегия	502 ♀	16–20
20	Австрия	497 ♀	18–27
21	Новая Зеландия	495 ♀	20–28
22	Вьетнам	495	18–32
23	<b>Российская Федерация</b>	<b>494</b>	<b>20–30</b>
24	Швеция	494	20–30
25	Австралия	494	21–29
26	Франция	493	21–30
27	Великобритания	492	21–31
28	Чешская Республика	492	21–31
29	Португалия	492	21–31
30	Италия	490	23–33
31	Исландия	488	27–33
32	Испания	486 ♂	29–34
33	Люксембург	486 ♂	32–34
34	Латвия	482 ♂	32–36
35	Мальта	479 ♂	34–38
36	Литва	478 ♂	34–38
37	Венгрия	477 ♂	35–39
38	Словакия	475 ♂	35–39
39	Израиль	470 ♂	37–41
40	США	470 ♂	38–41
41	Хорватия	464 ♂	40–42
42	Буэнос-Айрес (Аргентина)	456 ♂	40–42
43	Греция	454 ♂	32–43
44	Румыния	444 ♂	43–45
45	Болгария	441 ♂	44–46
46	Кипр	437 ♂	45–46
47	ОАЭ	427 ♂	47–48
48	Чили	423 ♂	47–51
49	Турция	420 ♂	47–54
50	Молдова	420 ♂	48–54
51	Уругвай	418 ♂	49–55
52	Черногория	418 ♂	49–54
53	Тринидад и Тобаго	417 ♂	50–55
54	Таиланд	415 ♂	49–55
55	Албания	413 ♂	51–56
56	Мексика	408 ♂	55–57
57	Грузия	404 ♂	56–59
58	Катар	402 ♂	57–59
59	Коста-Рика	400 ♂	57–60
60	Ливан	396 ♂	58–61
61	Колумбия	390 ♂	60–63
62	Перу	387 ♂	61–64
63	Индонезия	386 ♂	61–64
64	Иордания	380 ♂	63–65
65	Бразилия	377 ♂	64–65
66	Македония	371 ♂	66–67
67	Тунис	367 ♂	66–68
68	Косово	362 ♂	67–69
69	Алжир	360 ♂	68–69
70	Доминиканская Республика	328 ♂	70

Результаты приводятся по международной 100-балльной шкале со средним значением 500 баллов. Единая шкала по математической грамотности была введена в 2003 г., когда основная часть теста была направлена на оценку математической грамотности. ♀ Средний балл статистически выше среднего балла по странам ОЭСР. ♂ Средний балл статистически значимо ниже среднего балла по странам ОЭСР.

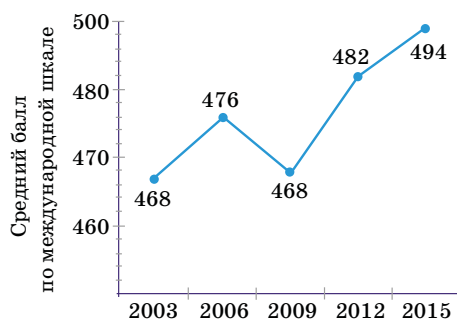
*Математическая грамотность — это способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие люди.*

В 2015 г. средний результат российских учащихся 15-летнего возраста по математической грамотности составил 494 балла. Впервые за 15 лет участия России в исследовании PISA результаты российских учащихся находятся в интервале значений, статистически значимо не отличающихся от среднего результата по странам ОЭСР (490 баллов).

Самые высокие результаты по математической грамотности продемонстрировали учащиеся Сингапура, за ними следуют учащиеся Гонконга, Макао (Китай) и Тайваня.

Результаты российских учащихся статистически значимо не отличаются от результатов учащихся 11 стран (Австрии, Новой Зеландии, Вьетнама, Швеции, Австралии, Франции, Великобритании, Чешской Республики, Португалии, Италии и Исландии) — статистически ниже результатов 19 стран и выше результатов 39 стран.

За годы участия в программе PISA за период с 2003 г., то есть года формирования шкалы математической грамотности, наблюдается повышение результатов российских учащихся по математической грамотности на 26 баллов.

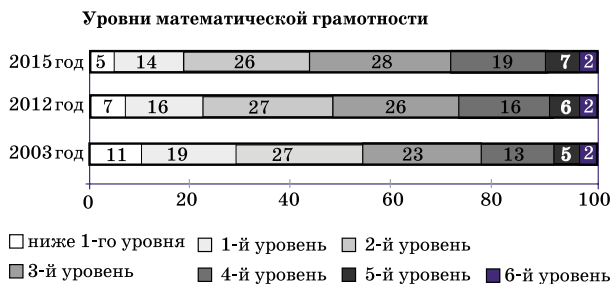


### Уровни математической грамотности

В соответствии с международной шкалой уровней математической грамотности 81% российских 15-летних учащихся продемонстрировали готовность адекватно применять математические знания и умения, они достигли порогового, 2-го уровня или превысили его. Для сравнения: в странах ОЭСР таких учащихся 77%.

9% российских учащихся обладают высоким уровнем математической грамотности (5–6-й

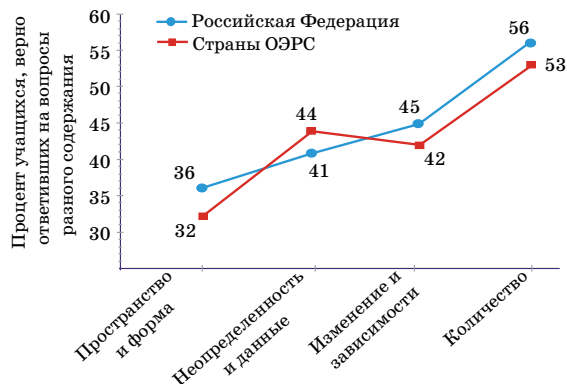
уровень). Они могут осмыслить, обобщить и использовать информацию, полученную ими на основе исследования и моделирования сложных проблемных ситуаций. Они могут использовать информацию из разных источников, представленную в различной форме. Для сравнения, в странах ОЭСР 10,4% учащихся продемонстрировали самые высокие уровни математической грамотности, а в лидирующих странах — от 25% в четырех провинциях Китая до 35% в Сингапуре.



Сравнение распределения российских учащихся по уровням математической грамотности показывает, что за период с 2003-го по 2015 г. с 7 до 9% увеличилось число 15-летних учащихся с более высоким уровнем математической грамотности (5–6-й

уровень по международной шкале) и с 30 до 19% уменьшилось число учащихся с низким уровнем математической грамотности (ниже 2-го уровня).

### Результаты по областям содержания



Средние результаты российских учащихся при выполнении заданий, связанных с четырьмя областями содержания, не имеют значимых различий по сравнению со средними результатами, показанными учащимися стран ОЭСР. Наиболее успешно российские учащиеся справляются с заданиями, относящимися к области «Количество»

### Продажа музыкальных дисков

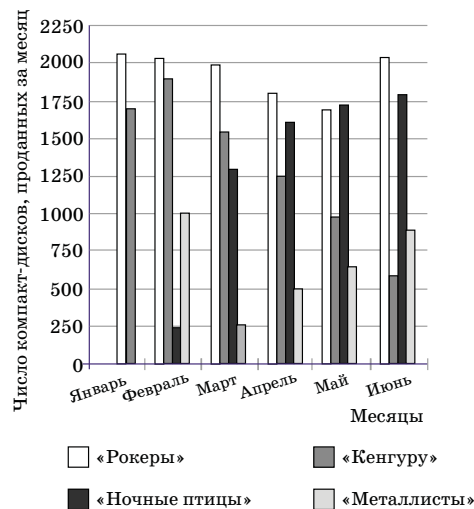
В январе были выпущены новые компакт-диски музыкальных групп «Рокеры» и «Кенгуру». В феврале последовали компакт-диски музыкальных групп «Ночные птицы» и «Металлисты». На следующей диаграмме показана продажа этих компакт-дисков с января по июнь.

**Вопрос 1.** Сколько компакт-дисков музыкальная группа «Металлисты» продала в апреле?

- A. 250                      B. 500  
C. 1000                      D. 1270

**Вопрос 2.** В каком месяце музыкальная группа «Ночные птицы» в первый раз продала больше своих компакт-дисков, чем музыкальная группа «Кенгуру»?

- A. Не было такого месяца   B. Март  
C. Апрель                      D. Май



**Содержание:** неопределенность и данные. **Вид деятельности:** «интерпретировать» (дать ответ с учетом представленной в задании ситуации). **Уровень сложности:** вопрос 1 — ниже 1-го уровня сложности, вопрос 2 — 1-й уровень. **Результат российских учащихся:** вопрос 1 — 89%, вопрос 2 — 72%. **Средний результат учащихся стран ОЭСР:** вопрос 1 — 87%, вопрос 2 — 80%. **Максимальный результат:** вопрос 1 — 93%, вопрос 2 — 91%.

**Комментарий эксперта.** Проверяется умение читать столбчатую диаграмму и извлекать из нее информацию, нужную для ответа на поставленный вопрос. Для российских учащихся оба вопроса базовой сложности, поэтому и результаты достаточно высо-

кие. Сложность вопроса 2 несколько выше, так как надо не только прочесть диаграмму, но и сравнить высоту столбцов, поэтому и результат несколько ниже. Эта тенденция характерна и для учащихся стран ОЭСР, и для лидирующих стран.